



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



Math 358.26









**Lehrbuch**  
der  
**Elemente der Geometrie**  
und  
der ebenen und sphärischen  
**Trigonometrie,**  
vorzüglich  
zum  
**Selbstunterrichte;**

*August Liebig*  
von  
**Dr. A. L. Crelle,**  
Königlich - Preussischem Geheimen - Ober - Baurathe.

---

**Erster Band,**  
welcher  
die Planimetrie, Goniometrie, ebene  
Trigonometrie und Polygonometrie  
enthält.

---

Mit achtzehn Kupfertafeln.

---

Berlin, 1826.  
Gedruckt und verlegt  
bei G. Reimer.

Math 358.26

1862, Aug. 12.  
( 2 vol. )  
\$1.55  
Gray Fund.

---

## V o r r e d e.

---

**Die** Elemente der Geometrie sind unzähligemal abgehandelt worden, und es fehlt nicht an Werken, welche, mit einem zeitgemäßerem Umfange, an Gediegenheit, dem unerreichten Muster und der Quelle aller, den Elementen des Euclides, nahe kommen.

Gleichwol bleibt dem Lehrgebäude der Geometrie noch Manches zu wünschen übrig. Entweder nemlich umfassen auch die vollständigeren Abhandlungen ihren Gegenstand nicht so ganz, wie es schon der innere Zusammenhang der Sätze zu erfordern scheint, oder wie es, wenn man einen Lehrbegriff der Elemente als Vorbereitung zur weiteren Entwicklung be-



Math 358.26









Lehrbuch  
der  
Elemente der Geometrie  
und  
der ebenen und sphärischen  
Trigonometrie,  
vorzüglich  
zum

Selbstunterrichte;  
verfaßt

*August Leopold*

Dr. A. L. Crelle,

Königlich - Preussischem Geheimen - Ober - Baurathe.

---

Erster Band,

welcher

die Planimetrie, Goniometrie, ebene  
Trigonometrie und Polygonometrie  
enthält.

---

Mit achtzehn Kupfertafeln.

---

Berlin, 1826.

Gedruckt und verlegt

bei G. Reimer.

Math 358.26

1862, Aug. 12.  
(2 vol.)  
\$1.55  
Gray Trind.

---

## V o r r e d e.

---

**Die Elemente der Geometrie sind unzähligemal abgehandelt worden, und es fehlt nicht an Werken, welche, mit einem zeitgemäßerem Umfange, an Gedicgenheit, dem unerreichten Muster und der Quelle aller, den Elementen des Euclides, nahe kommen.**

Gleichwol bleibt dem Lehrgebäude der Geometrie noch Manches zu wünschen übrig. Entweder nemlich umfassen auch die vollständigeren Abhandlungen ihren Gegenstand nicht so ganz, wie es schon der innere Zusammenhang der Sätze zu erfordern scheint, oder wie es, wenn man einen Lehrbegriff der Elemente als Vorbereitung zur weiteren Entwicklung be-

trachtet, zu wünschen ist: oder es fehlt dem System hie und da, mehr oder weniger noch an derjenigen nothwendigen innern Ordnung, welche die Strenge und Consequenz des Gegenstandes erheischt.

So zum Beispiel fehlt noch, um Einiges aus dem ersten Abschnitte, von den geradlinigen Figuren in der Ebene und dem Kreise, zu nennen (der zweite Abschnitt würde von den Körpern handeln), gewöhnlich die weitere Ausführung der Sätze von der Gleichheit und Aehnlichkeit mehrseitiger Figuren; es fehlen selbst die ersten Sätze von den Transversalen, von den Figuren von gleichem Umfange, von den Puncten der mittlern und kleinsten Entfernung, von den Ausdrücken der graden Linien und Ebenen und ihrer Lage, durch Gleichungen u. s. w. In der Trigonometrie, die in dem neueren Zustande der Geometrie wesentlich zu ihr gehört, fehlt gewöhnlich der allgemeine Beweis ihrer Fundamental-Sätze und eine

einigermassen weitere Ausführung der goniometrischen Sätze, so wie die Entwicklung der Reihen- und Factoren-Ausdrücke der trigonometrischen Linien durch die Kreisbogen; es fehlt gewöhnlich, wenn nicht die Polygonometrie ganz, so doch eine einigermaßen weitere Ausführung derselben, nebst vielem Andern, was wesentlich zu den Elementen der Geometrie gehört. In dem zweiten Theile, von den Polyedern und den sogenannten runden Körpern, sind der Lücken nicht weniger.

Für den Zusammenhang und die Ordnung der Sätze ist ebenfalls noch Manches zu wünschen. Man findet z. B. um wiederum Einiges aus dem ersten Theile zu nennen, häufig zusammengehörige Sätze nicht beisammen und andere neben einander, die getrennt seyn sollten. Es sind zum Beispiel die Lehrsätze nur selten mit ihren Gegensätzen, oder Sätze, die sich auf einen und denselben Gegenstand beziehen, mit einander verbunden, oder Sätze



der letzten Art, die nicht unmittelbar auf einander folgen können, wie z. B. diejenigen von der Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren, sind nicht recapitulirt; was die Uebersicht, und dem Lernenden das Studium erschwert. Dagegen findet man Sätze, die nicht wesentlich dieser oder jener Figur bedürfen, z. B. die Sätze von der Centricität der gradlinigen Figuren, welche des Kreises nicht bedürfen, bei der Hülfs-Figur abgehandelt, woraus eine Vermengung mit den Sätzen, die der Hülfs-Figur eigenthümlich sind, z. B. beim Kreise, mit den Sätzen von der Berührung etc., nach sich zieht. In den sogenannten Aufgaben ist häufig das, was Lehrsatz ist, mit dem was der beschreibenden Geometrie angehört, vermischt. Selbst gleich vom Anfange sind die Sätze gewöhnlich nicht nach ihrer natürlichen Eintheilung, nemlich nach Gleichheit, GröÙe und Aehnlichkeit der Figuren, streng gesondert, noch ist bei der Lehre von der GröÙe der Figuren

dasjenige, was ohne Hülfe der Zahl, oder rein geometrisch bewiesen werden kann, von dem was Zahlen oder Verhältnisse zu Hülfe nimmt, genau geschieden. Die Erklärungen und Beweise sind sogar zuweilen nicht streng, oder wenigstens unvollständig; selbst Euclid hat ja Erklärungen, die schon Lehrsätze voraussetzen, welche noch nicht vorausgingen, z. B. von der Aehnlichkeit der Figuren in der Ebene und der Polyëder. Solche Erklärungen, die sich auf später folgende Lehrsätze beziehen, und die also denselben nicht wohl vorhergehen können, sind nicht selten, eben wie nicht ganz vollständige Beweise, wie z. B. der Beweis beim Euclid von der Gleichheit zweier Dreiecke, deren Seiten in dem einen so groß sind als in dem andern, u. s. w. In der Trigonometrie ist der Mangel an innerer Ordnung gewöhnlich noch größer. Viele Lehrbücher erklären selbst noch die Trigonometrie für die Aufgaben vom Dreieck und ziehen also die Gonio-

metrie mit hinein, die dann an sich selbst ganz fehlt. Der Vortrag der Trigonometrie ist häufig zum Theil analytisch, zum Theil goniometrisch zugleich, welches den Gegenstand verdunkelt, und die Polygonometrie nimmt eine andere Art der Entstehung an, wie die Trigonometrie, was nicht der Natur des Gegenstandes gemäß ist u. s. w. Auch in dem zweiten Theile der Geometrie, der von den Körpern handelt, bleibt Manches zu wünschen übrig.

In keinem Fall kann das Lehrgebäude der Elemente der Geometrie als vollendet betrachtet werden, und wenn gleich die Mängel mehr oder weniger bestritten oder geleugnet werden mögen, so ist es doch wenigstens nicht überflüssig, sie näher durch That und Beispiel nachzuweisen und einen Lehrbegriff aufzustellen, in welchem die Anstöße, so weit sie bemerklich gewesen, zu vermeiden gesucht worden.

Ein solcher Lehrbegriff ist in dem gegenwärtigen Buche versucht worden. Es

sind in demselben einige Lücken auszufüllen, und die innere Ordnung, welche der Gegenstand zu erfordern scheint, ist näher zu beobachten gesucht worden. Der gegenwärtige erste Band enthält den ersten Theil der Elemente der Geometrie, welcher von gradlinigen Figuren in der Ebene und vom Kreise handelt, mit Einschluss der Goniometrie, Trigonometrie und Polygonometrie. Der zweite Band, welcher den zweiten Theil, von der Lage der Ebenen und von den Polyëdern und sogenannten runden Körpern, mit Einschluss der sogenannten sphärischen Trigonometrie, enthalten wird, soll in Kurzem nachfolgen. Das Lehrbuch ist für Schulen und Gymnasien, so wie für alle Diejenigen, welche die Mathematik sonst als Hülfswissenschaft studiren wollen, z. B. Militairs, Physiker, Bergleute, Architekten, Feldmesser etc., insbesondere aber zum Selbstunterrichte bestimmt. Wer sich blos auf die einfacheren Sätze beschrän-

ken will, kann das, was mit kleinerer Schrift gedruckt ist, übergehen.

Der Verfasser wünscht, daß man seine Arbeit eben so betrachten möge, wie er sie selbst ansieht, nemlich als Versuch eines Beitrages zur Förderung der Wissenschaft. Er hofft, man werde alsdann die Bestätigung der Versicherung, die er giebt, er habe keinen andern Zweck bei seiner Arbeit gehabt als den eben genannten und den Vortheil der Lernenden, auch in dem Werke selbst finden.

Berlin, im November 1825.

Der Verfasser.

---

---

# **I n h a l t.**

---

## **D i e   G e o m e t r i e.**

---

<b>Einleitung und Uebersicht.</b>	<i>Seite</i> <b>1</b>
-----------------------------------	--------------------------

### **Erster Theil.**

**Von den Figuren in der Ebene, die von graden Linien oder von der Kreislinie begrenzt sind.**

#### **Erstes Buch.**

**Von den graden Linien und zum Theil begrenzten Figuren.**

Von den graden Linien. . . . .	<b>9</b>
Von den Winkeln. . . . .	<b>10</b>
Von den Parallelen. . . . .	<b>12</b>
Grade Linien, die eine andere schneiden. . . . .	<b>15</b>

#### **Zweites Buch.**

**Von den Figuren in der Ebene, die von graden Linien umschlossen sind.**

Von solchen Figuren überhaupt. . . . .	<b>19</b>
--	-----------



## Erster Abschnitt.

Von der Gleichheit umschlossener Figuren und dem was sich darauf bezieht.

A. Von der Gleichheit der Dreiecke und dem was davon unmittelbar abhängt. . . . .	24
Von den schrägen Linien. . . . .	39
Erklärung von Coordinaten. . . . .	47
Von der Centricität der Dreiecke . . . . .	47
B. Von der Gleichheit der <i>Vierecke</i> und <i>Vielecke</i> , und dem, was davon abhängt.	
$\alpha$ ) Von den <i>Vierecken</i> .	
Gleichheit der Vierecke. . . . .	54
Von der Centricität der Vierecke. . . . .	64
Noch von der Gleichheit der Vierecke . . . . .	70
$\beta$ ) Von den <i>Vielecken</i> .	
Gleichheit der Vielecke. . . . .	72
Centricität der Vielecke. . . . .	81
Von den regelmäßigen Vielecken. . . . .	84

## Zweiter Abschnitt

Von der Gröfse oder dem Inhalte der Figuren in der Ebene und dem was davon abhängt.

A. Vergleichung der Gröfse der Figuren <i>ohne Hülfe der Zahl</i> , oder <i>geometrisch</i> . . . . .	87
Größere und kleinere Figuren von gleichem Umfange. . . . .	113
B. Vergleichung der Gröfse der Figuren mit Hülfe der Zahl, oder durch Rechnung. . . . .	117
Berechnung des Inhalts beliebiger gradliniger Figuren. . . . .	158

## Dritter Abschnitt.

Von der *Aehnlichkeit* umschlossener Figuren und dem was sich darauf bezieht.

Von der Möglichkeit ähnlicher Figuren . . . . .	163
Erklärung der Aehnlichkeit. . . . .	164
Von der Aehnlichkeit der Dreiecke. . . . .	164
Von der Aehnlichkeit beliebiger Figuren. . . . .	166

# *I n h a l t.*

XIII

	<i>Seite</i>
Von den Transversalen. . . . .	174
Von dem Mittelpuncte der Entfernungen. . . . .	185
Von dem Puncte kleinster Entfernung. . . . .	193
Von den <i>Gleichungen</i> der Linien, besonders der <i>graden</i> und ihrer Durchschnitte,	
Von den Gleichungen der Linien im Allgemeinen. . . . .	200
Von den Gleichungen der <i>graden</i> Linie insbesondere. . . . .	201

## *D r i t t e s   B u c h.*

Vom Kreise. . . . .	211
I. Von gleichen Kreisen und dem was davon abhängt. . . . .	213
II. Von ähnlichen Figuren im Kreise und dem was davon ab- hängt. . . . .	236
III. Von der Gröfse der Kreislinien und Kreisflächen. . . . .	251
IV. Von der Gleichung des Kreises. . . . .	267

---

## Die Goniometrie nebst Trigonometrie und Polygonometrie. . . . . 269

---

### *D i e   G o n i o m e t r i e.*

Von den goniometrischen Linien. . . . .	269
Gleichungen zwischen goniometrischen Linien. . . . .	277
Abdruck der goniometrischen Linien durch die Bogen, und umgekehrt. . . . .	321
Der Cotesische und Moivr'sche Lehrsatz. . . . .	334
Ausdrücke der goniometrischen Linien durch Factoren. . . . .	339
Tafel goniometrischer Ausdrücke. . . . .	350

Anwendung der Goniometrie auf drei- und mehrseitige Figuren, oder <i>Trigo-</i> <i>nometrie</i> und <i>Polygonometrie</i> . . . . .	365
---	-----

**A. Trigonometrie.**

Rechtwinklige Dreiecke. . . . .	368
Beliebige Dreiecke. . . . .	379

B. Polygonometrie. . . . .	437
----------------------------	-----

---

**A n h a n g.**

Auflösung einiger Aufgaben von Figuren in der Ebene, durch die grade Linie und den Kreis. . . . .	492
---	-----

---

# Die Geometrie.

---

## Einleitung und Uebersicht.

---

1.

**D**ie Geometrie ist die Wissenschaft von der Grösse und Gestalt begrenzter Räume.

2.

Die Grenzen von Räumen heissen *Flächen*. Ein begrenzter Raum heisst *körperlicher Raum* zum Unterschiede von dem Raume überhaupt, in welchem sich begrenzte Räume befinden. Die begrenzenden Flächen heissen auch *Flächenräume*.

Die Durchschnitte von Flächen, welche also Theile der Flächen begrenzen, heissen *Linien*.

Die Durchschnitte von Linien, welche nun Theile der Linien begrenzen, heissen *Puncte*.

Flächen sind daher Grenzen körperlicher Räume; Linien sind Grenzen von Flächen, und Puncte Grenzen von Linien, und so wie man aus dem unbegrenzten Raume beliebige körperliche Räume absondern und weiter in dieselben beliebige Flächen legen kann, so kann man in Flächen-Räume beliebige Linien und in Linien beliebige Puncte legen.

Von Flächen begrenzte körperliche Räume, und von Linien begrenzte Flächen-Räume heissen auch *Figuren*, auch wohl bloss letztere Figuren, erstere, abgekürzt, *Körper*.

Die Figuren und Körper sind entweder ganz oder zum Theil begrenzt.

## 3.

Je nachdem die Flächen, welche Körper, oder die Linien welche Flächen, oder die Punkte, welche Linien begrenzen, mehr oder weniger Raum einschliessen, sind die Körper, Flächen und Linien kleiner oder gröfser. Die Gröfse der Körper, Flächen und Linien in diesem Sinne heifst *Ausdehnung*.

## 4.

Da sich Linien nicht in die Flächen, die sie begrenzen, sondern nur in sich ausdehnen, so haben sie nur eine Ausdehnung. Diese eine Ausdehnung heifst *Länge*. Flächen dehnen sich nicht in die körperlichen Räume aus, die sie begrenzen, wohl aber neben beliebige Linien, die man in sie legen kann. Diese zweifache Ausdehnung wird bezeichnet, wenn man sagt: Flächen dehnen sich in die *Länge* und in die *Breite* aus. Körper dehnen sich auch neben beliebige Flächen aus, die man in sie legen kann. Deshalb sagt man, sie dehnen sich in die *Länge*, in die *Breite* und in die *Höhe* aus. Die Ausdehnung der Körper und Flächen überhaupt heifst auch *Inhalt*, auch wohl bei Körpern insbesondere, zum Unterschiede, *Volumen*.

Die verschiedenen Arten der Ausdehnung in die Länge, Breite und Höhe, heifsen *Abmessungen*. Die Körper haben also *drei* Abmessungen, die Flächen *zwei* und die Linien *eine*.

## 5.

Da gleich grofse Körper, Flächen und Linien verschiedene Gestalt und gleich gestaltete Körper, Flächen und Linien verschiedene Gröfse haben können, so kommt es nicht auf die Aus-

dehnung oder Grösse der Körper, Flächen und Linien allein an, sondern auch auf ihre *Gestalt*.

Körper, Flächen und Linien von gleicher Grösse und von gleicher Gestalt, deren Grenzen also, wenn man sie sich an einerlei Orte im Raume verstellt, alle in einander fallen oder sich decken, heissen *gleich* oder auch *congruent*. Ist blofs die Grösse oder Ausdehnung gleich, so heissen sie *gleich gross*, und ist blofs die Gestalt gleich, so heissen sie *ähnlich*.

## 6.

Das Verfahren, durch welches man die Grösse und Gestalt der Figuren vergleicht, das heisst, durch welches man, mittelst Figuren, von deren Grösse und Gestalt man ursprüngliche Vorstellungen hat, von beliebigen Figuren klare Vorstellungen ausdrückt, heisst *Messen*. Dieses Messen ist der Gegenstand der Geometrie. Deshalb heisst sie auch *Messkunst*.

## 7.

Da die Körper von Flächen und die Flächen von Linien begrenzt werden, so hängt die Grösse und Gestalt der Körper von Flächen, die Grösse und Gestalt der Flächen von Linien ab. Die Untersuchung der Flächen und Linien geht also der Ausmessung der Körper vorher.

## 8.

Es sind offenbar unzählige, an Grösse und Gestalt verschiedene Linien und Flächen möglich. Sie lassen sich aber in zwei, wesentlich verschiedene Arten theilen: in *grade* und *krumme*, oder vielmehr, es läßt sich aus den unendlich vielen Linien und Flächen eine Art absondern, die nicht mehr verschiedene Gattungen hat,



nemlich die der *graden Linien* und *Flächen*. Alle übrigen gehören in die zweite Abtheilung. Grade und krumme Linien und Flächen unterscheiden sich wie folgt.

I. Man stelle sich in einer beliebigen Fläche eine Linie und in dieser Linie zwei Punkte vor. Man lasse die beiden Punkte an demselben Orte im Raume bleiben, die Fläche aber alle Lagen annehmen, die sie annehmen kann. Bleibt die Linie, in welcher sich die beiden festen Punkte befinden, für jede beliebige Lage der Fläche an demselben Orte im Raume, so ist sie *grade*.

II. Befinden sich alle graden Linien, die durch beliebige Paare von Punkten einer Fläche gehen, ganz in der Fläche, so ist die Fläche *grade* und heißt *Ebene*.

III. Alle Linien, die nicht grade sind, heißen *krumm*, und zwar, wenn sie zugleich in einer Ebene liegen, *einfach krumm*, wenn sie in keiner Ebene liegen, *doppelt krumm*, oder von *doppelter Krümmung*.

IV. Alle Flächen, die nicht grade oder Ebenen sind, heißen *krumm*, und zwar wenn noch grade Linien darin möglich sind, von *einfacher Krümmung*, wenn keine graden Linien darin möglich sind, von *doppelter Krümmung*.

## 9.

Die Geometrie zerfällt nach dieser Unterscheidung der Linien und Flächen in zwei Haupt-Abtheilungen.

Der Gegenstand der ersten Abtheilung sind die graden Linien und die Ebenen, so wie die von denselben begrenzten Figuren und Körper; die andere Abtheilung beschäftigt sich mit den krummen Linien und krummen Flächen und den von denselben begrenzten Figuren und Körpern.

Die erste Abtheilung zerfällt weiter, erstlich in die Untersuchung der graden Linien und der von denselben ganz oder zum Theil begrenzten Figuren in der Ebene, und zweitens in die Untersuchung der graden Linien und Ebenen im Raume, so wie der von Ebenen ganz oder zum Theil begrenzten Körper.

Die zweite Abtheilung zerfällt erstlich in die Untersuchung der krummen Linien und der von denselben ganz oder zum Theil begrenzten Figuren in der Ebene, und zweitens in die Untersuchung der krummen Linien und Flächen im Raume und der von beliebigen Flächen ganz oder zum Theil begrenzten Körper.

Man pflegt nur die erste Abtheilung, und aus der zweiten nur, was den Kreis und Flächen betrifft, die vom Kreise und den graden Linien abhängen, zu den Elementen zu rechnen. Die Kreis-Linie ist diejenige krumme Linie in der Ebene, in welcher beliebige Punkte von einem und demselben Punkte, welcher Mittel-Punct heißt, gleich weit entfernt sind.

## 10.

Die Elemente, welche dieses Buch enthalten soll, lassen sich weiter, wie folgt, eintheilen:

**E r s t e r T h e i l.**

Von den Figuren in der Ebene, die von graden Linien oder von der Kreiskinie ganz oder zum Theil begrenzt sind.

*Erstes Buch.* Von den graden Linien und den davon zum Theil begrenzten Figuren.

*Zweites Buch.* Von den umschlossenen Figuren in der Ebene, und zwar

**Erster Abschnitt.** Von ihrer Gleichheit und dem was sich darauf bezieht.

**Zweiter Abschnitt.** Von ihrer Gröſſe und dem was ſich darauf bezieht.

**Dritter Abschnitt.** Von ihrer Aehnlichkeit und dem was ſich darauf bezieht.

*Drittes Buch.* Vom Kreiſe.

An dieſen erſten Theil ſchließt ſich gewöhnlich die Vergleichung und Meſſung der gegenseitigen Neigung grader Linien mit Hülfe der Kreislinie an, unter dem Namen *Goniometrie*, *Trigonometrie* und *Polygonometrie*.

## Zweiter Theil.

Von den graden Linien im Raume und den Ebenen, ſo wie von den Körpern, die zum Theil oder ganz von Ebenen begrenzt ſind und zwar:

*Erſtes Buch.* Von den graden Linien und den Ebenen im Raume und den davon zum Theil begrenzten Körpern.

*Zweites Buch.* Von den von Ebenen umschlossenen Körpern und zwar

**Erſter Abschnitt.** Von ihrer Gleichheit und dem was ſich darauf bezieht.

**Zweiter Abschnitt.** Von ihrer Gröſſe und dem was ſich darauf bezieht.

**Dritter Abschnitt.** Von ihrer Aehnlichkeit und dem was ſich darauf bezieht.

*Drittes Buch.* Von Flächen und Körpern die vom Kreiſe und graden Linien und Ebenen abhängen.

An dieſen zweiten Abschnitt ſchließt ſich gewöhnlich die Vergleichung und Meſſung der gegenseitigen Neigung von Ebenen und ihrer Durchschnitte mit Hülfe der Kreislinie an, unter dem Namen *sphäriſche Trigonometrie* und *Polyëdrometrie*.

Wir wollen die Elemente nach dieſer Eintheilung abhandeln.

---

# Erster Theil.

---

Von den Figuren in der Ebene, die von  
graden Linien oder von der Kreislinie  
begrenzt sind.

---



---

## Erstes Buch.

---

### Von den graden Linien und zum Theil begrenzten Figuren.

---

#### Von den graden Linien,

11.

**Lehrsatz.** Durch zwei Puncte ist nur eine grade Linie möglich.

**Beweis.** Denn man setze, es sey auſſer der graden Linie  $EACBF$  (Fig. 1.) noch irgend eine andere Linie  $GADBH$  durch die beiden Puncte  $A$  und  $B$  grade, so müſſte diese Linie  $GADCH$  nach (§. 8. I.) die Eigenschaft haben, daß sie, wenn die Fläche oder Ebene, in welcher sich die Figur  $GEADCBHF$  befindet, ihre Lage ändert, während  $A$  und  $B$  an demselben Orte im Raume bleiben, ebenfalls denselben Ort im Raume behält, weil sie sonst nicht grade wäre. Dieses aber ist nicht möglich, weil schon die grade Linie  $EACBF$ , nach der Voraussetzung, an demselben Orte bleibt und folglich  $GADBH$ , zwischen welcher und  $EACBF$  ein Raum liegt, je nachdem die Fläche, worin sich  $GADBH$  befindet, ihre Lage verändert, nothwendig an einen anderen Ort im Raume wie z. B.  $G'AD'BH'$  kommen muß. Also ist es unmöglich, daß irgend eine andere Linie durch zwei Puncte  $A$  und  $B$ , als die grade  $EACBF$ , ebenfalls grade seyn kann.

12.

**Zusätze.** I. Zwei grade Linien, wenn sie zwei Puncte gemein haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung in einander. Denn es ist durch die beiden Puncte nur eine grade Linie möglich. (§. 11.)

II. Zwei grade Linien können einander nur in einem Punkte schneiden. Denn schnitten sie sich in zwei Punkten, so fielen sie nach (I.) in ihrer ganzen Ausdehnung in einander und wären folglich nicht mehr zwei verschiedene Linien, sondern nur eine und dieselbe grade Linie.

III. Wenn eine grade Linie eine andere nur in einem Punkte trifft, so bleibt sie von diesem Durchschnits-Punkte ab in ihrer ganzen Ausdehnung an derselben Seite der andern Linie. Denn um auf die entgegengesetzte Seite zu kommen, müßte sie die andere Linie erst in einem zweiten Punkte schneiden, welches, da sie von derselben Anfangs abweichen sollte, nach (II.) nicht möglich ist.

### Von den Winkeln.

#### 13.

*Erklärung.* Die gegenseitige Neigung zweier graden Linien, die sich schneiden, wie AC und BC (Fig. 2.) heisst Winkel, und der zum Theil begrenzte Raum ACB der Ebene, worin AC und BC liegen, heisst Winkel-Raum, so daß zu gleichen Winkeln gleiche Winkel-Räume gehören und umgekehrt.

Der Winkel, wie z. B. zwischen AC und BC, wird gewöhnlich durch ACB oder auch durch ein einzelnes Zeichen, wie z. B.  $\gamma$ , oder auch durch den Buchstaben C, der an der Spitze steht, bezeichnet. Die graden Linien AC und BC, welche den Winkel begrenzen, heissen des Winkels Schenkel, der Durchschnits-Punkt der Schenkel, C heisst des Winkels Scheitel,

#### 14.

*Grundsatz.* Der Winkel ist, wie jede andere Ausdehnung, eine GröÙe.

Deshalb sind die Summen und die Unterschiede von Winkeln wiederum Winkel und nichts anderes. Z. B. die Summe der Winkel ACB, BCD und DCE (Fig. 3.) ist wieder ein Winkel ACE; der Unterschied zweier Winkel, wie ACD und ACB ist ebenfalls ein Winkel BCD und nichts anderes.

Auch sind eben deshalb Winkel und Winkel-Räume nur dann verschieden, wenn sie um einen Winkel oder Winkel-Raum von einander abweichen, und nur dann gleich, wenn sie um keinem Winkel oder Winkel-Raum verschieden sind.

## 15.

**Erklärung.** I. Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitel, deren Schenkel in einer und derselben graden Linie auf verschiedenen Seiten des Durchschnitts-Punctes liegen, wie z. B. (Fig. 4.)  $ACB$  und  $DCE$ ,  $ACD$  und  $BCE$  etc. heißen Scheitel-Winkel.

II. Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitel und einem gemeinschaftlichen Schenkel, den andern in einer und derselben graden Linie, wie z. B. die Winkel  $ACD$  und  $DCE$ ,  $DCE$  und  $BCE$  etc. heißen Nebenwinkel.

III. Neben-Winkel, die gleich groß sind, wie z. B.  $ACF$  und  $FCE$ ,  $FCE$  und  $ECG$  etc., wenn die Neigung der Linien  $AC$  und  $CF$ ,  $FC$  und  $CE$  etc. gegen einander gleich groß ist, heißen rechte Winkel. Grade Linien, die mit einander rechte Winkel machen, heißen senkrecht oder Perpendikel auf einander. Rechte Winkel sollen überall durch den Buchstaben  $\rho$  bezeichnet werden.

IV. Winkel, die kleiner sind als rechte, z. B.  $DCE$ , heißen spitz, sind sie größer als rechte, wie z. B.  $DCG$ , stumpf. Stumpfe Winkel können auch größer als zwei und selbst größer als vier rechte seyn, überhaupt so groß man will.

V. Die Ergänzung eines Winkels zu einem rechten, z. B. die Ergänzung  $FCD$  des Winkels  $DCE$  zu dem rechten  $FCE$  heißt des Winkels  $DCE$  Complement. Die Ergänzung eines Winkels zu der Summe zweier rechten, z. B. die Ergänzung  $ACB$  des Winkels  $BCE$  zu der Summe der beiden rechten  $ACG$  und  $GCE$  heißt des Winkels Supplement.

## 16.

**Lehrsätze.** I. Die Summe von Neben-Winkeln ist so groß als die Summe von zwei rechten Winkeln.

**Beweis.** Denn z. B. der Winkel  $DCE$  (Fig. 4.) ist um den Winkel  $FCD$  oder um sein Complement (§. 15. V.) kleiner als der rechte Winkel  $FCE$ , d. h. es ist  $DCE = \rho - FCD$ , und der Neben-Winkel  $ACD$  ist um den nemlichen Winkel  $FCD$  größer als der dem rechten Winkel  $FCE$  gleiche rechte Winkel  $ACF$ , d. h. es ist  $ACD = \rho + FCD$ . Also ist  $DCE + ACD = \rho - FCD + \rho + FCD = 2\rho$ . Also ist die Summe von  $DCE$  und  $ACD$  so groß als die Summe von zwei rechten Winkeln. Das Supplement (§. 15. V.) eines Winkels ist also sein Nebenwinkel.



II. Die Summe beliebiger Winkel um einen Punkt, die also alle einen und denselben Scheitel und je zwei einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, ist so groß als die Summe von vier rechten, z. B. die Summe der Winkel  $\angle ACB$ ,  $\angle BCD$ ,  $\angle DCE$ ,  $\angle ECF$ ,  $\angle FCG$  und  $\angle GCA$  (Fig. 5.) ist so groß als die Summe von vier rechten Winkeln.

*Beweis.* Es sey  $ACP$  eine grade Linie, in welche der gemeinschaftliche Schenkel  $AC$  zweier Winkel  $\angle ACB$  und  $\angle ACG$  fällt, so sind  $\angle ACE$  und  $\angle ECP$  Neben-Winkel, und folglich ist ihre Summe gleich der Summe zweier rechten (I.), also  $\angle ACE + \angle ECP = 2\rho$ . Eben so sind  $\angle ACF$  und  $\angle PCF$  Neben-Winkel; folglich ist auch  $\angle ACF + \angle PCF = 2\rho$ . Also ist  $\angle ACE + \angle ECP + \angle PCF + \angle FCA = 4\rho$ . Aber  $\angle ACE$  ist gleich der Summe der Winkel  $\angle ACB$ ,  $\angle BCD$  und  $\angle DCE$ ;  $\angle FCA$  ist die Summe der Winkel  $\angle FCG$  und  $\angle GCA$ , und  $\angle ECF$  ist gleich der Summe der Winkel  $\angle ECP$  und  $\angle PCF$ . Also ist die Summe der sämtlichen Winkel  $\angle ACB + \angle BCD + \angle DCE + \angle ECF + \angle FCG + \angle GCA = 4\rho$ , das heißt gleich der Summe von vier rechten.

III. Scheitel-Winkel sind gleich groß.

*Beweis.* Denn sie haben einen und denselben Nebenwinkel, und folglich ein und dasselbe Supplement. Z. B. in (Fig. 4.) ist  $\angle DCE = 2\rho - \angle ACD$  und  $\angle ACB = 2\rho - \angle ACD$ ; also ist  $\angle DCE = \angle ACB$ , das heißt die Scheitel-Winkel  $\angle DCE$  und  $\angle ACB$  sind gleich groß. Eben so sind die Scheitel-Winkel  $\angle ACD$  und  $\angle BCE$  gleich groß u. s. w.

## Von den Parallelen.

### 17.

*Lehrsätze.* I. Wenn zwei Winkel  $\angle DAC$  und  $\angle EBC$  (Fig. 6.), welche einen ihrer Schenkel in einer und derselben graden Linie haben, ohne daß die Scheitel in einander fielen, um keinen Winkel-Raum verschieden sind, so haben die Linien  $DA$ ,  $AC$  und  $EB$ ,  $BC$  gleiche Neigung gegen einander und die Winkel die sie einschließen sind einander gleich.

*Beweis.* Denn die Winkel sind nur dann ungleich, wenn sie um einen Winkel verschieden sind (§. 14.), was nach der Voraussetzung nicht seyn soll.

II. Wenn zwei Winkel  $\angle DAC$  und  $\angle EBC$ , die wie die vorigen liegen, einander gleich sind, so sind sie um keinen Winkel-Raum verschieden.

*Beweis.* Denn sonst wären sie nach (§. 14.) ungleich.

## 18.

**Zusatz.** Winkel können also nach (§. 17.) um Räume, die nicht Winkel-Räume sind, verschieden seyn, ohne daß sie deshalb ungleich wären. Z. B. die Winkel  $EBC$  und  $DAC$ , oder  $GBC$  und  $FAC$  in (Fig. 6.) sind um die Räume  $DABE$  und  $FABG$ , welche keine Winkel-Räume sind, verschieden, obgleich sie nach der Voraussetzung einander gleich sind.

Dieses ist kein Widerspruch. Denn

Erstlich sind Winkel nur dann ungleich, wenn sie um Winkel verschieden sind, so wie beliebige Dinge überhaupt nur dann ungleich sind, wenn sie um Dinge ihrer Art von einander abweichen (§. 14.).

Zweitens erfüllen Winkel, wie  $EBC$  und  $DAC$ , obgleich sie um den Raum  $DABE$  verschieden sind (Fig. 6.), noch vollkommen die Bedingung der Gleichheit oder Congruenz (§. 5.), nemlich, daß alle Grenzen in einander fallen; denn man lege den Schenkel  $BC$  in den Schenkel  $AC$ , so fällt auch der Schenkel  $BE$  in den Schenkel  $AD$ , weil nach der Voraussetzung der Winkel  $EBC$  dem Winkel  $DAC$ , oder die Neigung der Linien  $EB$  und  $BC$  der Neigung der Linien  $DA$  und  $AC$  gleich ist; also fallen alle Grenzen der Winkel  $EBC$  und  $DAC$  in einander.

## 19.

**Erklärung.** Grade-Linien, wie  $FD$  und  $GE$  (Fig. 6.), welche mit einer beliebigen dritten  $HC$  an einerlei Seite gleiche Winkel machen, heißen Parallelen. Räume zwischen Parallelen, wie zwischen den Linien  $FD$  und  $GE$ , oder auch blos die Räume  $DABE$  oder  $FABG$ , heißen Parallel-Räume.

**Grade Linien die eine andere schneiden.**

## 20.

**Erklärung.** Wenn zwei beliebige grade Linien eine dritte schneiden, wie  $DF$  und  $EG$  (Fig. 7.) die  $HC$ , so soll die dritte Linie Grundlinie, die beiden, welche sie schneiden, sollen Schenkel heißen.

Die Winkel an gleichen Seiten der Grundlinie und an gleichen Seiten der Schenkel, wie  $a$  und  $\alpha$ ,  $b$  und  $\beta$ ,  $c$  und  $\gamma$ ,  $d$  und  $\delta$ , sollen Neigungs-Winkel, die Winkel an gleichen Seiten der Schenkel und an verschiedenen Seiten der Grundlinie, wie z. B.  $a$  und  $\gamma$ ,

$b$  und  $\delta$ ,  $c$  und  $\alpha$ ,  $d$  und  $\beta$  sollen **Seitenwinkel**, die Winkel an gleichen Seiten der Grundlinie und an verschiedenen, entweder einander zugekehrten oder von einander abgekehrten Seiten der Schenkel, also wie  $b$  und  $\alpha$ , oder  $d$  und  $\gamma$ , oder  $a$  und  $\beta$  und  $c$  und  $\delta$  sollen **Gegenwinkel** und zwar erstere **innere**, letztere **äußere**, endlich die Winkel an verschiedenen Seiten der Grundlinie und verschiedenen Seiten der Schenkel, **Wechselwinkel**, und zwar, wenn sie einander zugekehrt sind, wie  $b$  und  $\gamma$ ,  $d$  und  $\alpha$  **innere**, und wenn sie von einander abgekehrt sind, wie  $a$  und  $\delta$ ,  $c$  und  $\beta$ , **äußere Wechselwinkel** heißen.

## 21.

**Zusätze.** I. Wenn also Parallelen eine Grundlinie schneiden, so sind nach (§. 17.) die Neigungswinkel gleich, nemlich (Fig. 7.):  $a = \alpha$ ,  $b = \beta$ ,  $c = \gamma$ ,  $d = \delta$ .

Die Summen der Seiten-Winkel sind zwei rechte, z. B.  $a + \gamma = b + \delta = c + \alpha = d + \beta = 2\varrho$ , denn es ist z. B.  $a = \alpha$ , also  $a + \gamma = \alpha + \gamma = 2\varrho$  u. s. w.

Die Summe der innern und äußern Gegenwinkel sind ebenfalls zwei rechte, nemlich  $b + \alpha = d + \gamma = a + \beta = c + \delta = 2\varrho$ ; aus einem ähnlichen Grunde.

Die innern und äußern Wechselwinkel sind gleich; aus gleichem Grunde.

Umgekehrt, wenn obiges Statt findet, sind die sich schneidenden graden Linien parallel.

II. Zwei Linien, die mit einer dritten parallel sind, sind auch mit einander parallel.

Denn alle machen mit einer beliebigen Grundlinie gleiche Neigungswinkel.

## 22.

**Lehrsatz.** I. Wenn zwei grade Linien  $IL$  und  $EG$  (Fig. 8.) mit einer dritten  $HC$ , die sie schneiden, an einerlei Seite ungleiche Winkel machen, z. B. die Winkel  $EBC$  und  $IAC$ , so begegnen sie sich nothwendig irgendwo und zwar an derjenigen Seite der Grundlinie, an welcher die inneren Gegenwinkel  $IAB$  und  $EBA$  zusammen kleiner als zwei rechte sind.

**Beweis.** Es sey  $DF$  mit  $EG$  parallel, so ist  $DAC = EBC$  (§. 21.) und folglich  $DAB + EBA = 2\varrho$ .

Soll nun  $\angle LAB + \angle EBA$  kleiner als zwei Rechte seyn, so ist  $\angle LAB$  nothwendig kleiner als  $\angle DAB$  und zwar um den Winkel  $\angle DAI$ ; folglich liegt die Linie  $AI$  ganz auf derjenigen Seite von  $AD$ , welche  $BE$  zugekehrt ist (§. 12. III.). Schnitten sich nun  $AI$  und  $BE$  nicht, so wäre der Raum  $LABE$  nur ein Theil des Parallel-Raums  $DABE$ . Die Winkel  $\angle EBC$  und  $\angle DAC$  sind aber noch gleich, wenn sie um den ganzen Parallel-Raum  $DABE$  verschieden sind (§. 18.). Also wären auch die Winkel  $\angle IAC$  und  $\angle EBC$ , gleich, die nur um einen Theil  $LABE$  dieses Parallel-Raums verschieden sind. Sie sollen aber ungleich seyn. Also ist es unmöglich, daß  $LABE$  ein Theil des Parallel-Raums  $DABE$  ist, das heißt, daß  $AI$  die  $BE$  nicht schneidet. Folglich schneidet  $AI$  die  $BE$ , wenn  $\angle LAB + \angle EBA$  kleiner als zwei rechte ist, nothwendig \*).

II. Wenn sich zwei grade Linien  $KL$  und  $EG$  (Fig. 9.), z. B. in  $P$  schneiden und sie begegnen einer dritten  $HC$ , so machen sie mit derselben an einerlei Seite nothwendig ungleiche Winkel  $\angle PAC$  und  $\angle PBC$  und die Summe der innern Gegenwinkel  $\angle PAB$  und  $\angle PBA$  ist kleiner als zwei rechte.

*Beweis.* Es sey  $AQ = QB$ ,  $PQI$  grade und  $QI = QP$ , so fällt, wegen der gleichen Scheitelwinkel,  $\angle AQP$  und  $\angle BQI$  (§. 16. III.), wenn man  $AQ$  in  $QB$  legt,  $QP$  in  $QI$  mithin  $A$  in  $B$  und  $P$  in  $I$ , und folglich  $AP$  in  $IB$  (§. 11.). Also ist auch  $\angle QBI = \angle QAP$ . Es ist aber  $\angle QBI$  kleiner als  $\angle QBG$  oder dessen Scheitel-Winkel  $\angle PBC$ , weil die Linie  $PI$  und folglich  $BI$  ganz an der von  $C$  abgekehrten Seite von  $PG$  liegt. Also ist der dem Winkel  $\angle QBI$  gleiche Winkel  $\angle QAP$  oder  $\angle PAC$  kleiner als der Winkel  $\angle PBC$ , folglich auch weil  $\angle PBC + \angle PBA = 2r$  (§. 16. I.)  $\angle PAB + \angle PBA$  kleiner als zwei rechte; wie behauptet wurde.

---

\*) Dieser Satz ist das berühmte eilfte Euclidische Axiom, worauf die Theorie der Parallelen und ein großer Theil der gesamten Geometrie beruht. Euclid erklärt den Satz für einen Grundsatz, d. h. für einen Satz der keines Beweises bedarf. Bekanntlich ist die Zahl der Versuche, den Satz zu beweisen, ungemein groß. Der obige Beweis kommt im wesentlichen mit demjenigen überein, welcher sich in der kleinen Schrift des Verfassers „Ueber Parallelen-Theorien etc. Berlin, bei Maurer 1816“ befindet. Die Ansichten, von welchen der Beweis ausgeht, sind denen von Bertrand und Schulz ähnlich, aber die Ausführung ist von der Bertrandschen und Schulzischen verschieden.

## 23.

**Lehrsätze.** I. Wenn zwei grade Linien  $DF$  und  $EG$  (Fig. 10.) mit einer dritten  $HC$ , die sie schneiden, an einerlei Seite gleiche Winkel  $DAC$  und  $EBC$  machen und folglich mit einander parallel sind (§. 21. I.), so begegnen sie sich nirgend.

**Beweis.** Denn begegneten sie sich, so machten sie mit der Grundlinie nach (§. 22. II.) ungleiche Winkel.

II. Wenn sich zwei grade Linien  $DF$  und  $EG$  (Fig. 10.) nirgend begegnen, so machen sie mit einer dritten  $HC$ , die sie schneiden, an einerlei Seite nothwendig gleiche Winkel  $DAC$  und  $EBC$ , und sind folglich mit einander parallel (§. 21. I.).

**Beweis.** Denn machten sie mit der Grundlinie ungleiche Winkel, so müßten sie sich nach (22. I.) nothwendig irgendwo begegnen.

## 24.

**Lehrsatz.** Wenn die Schenkel zweier Winkel parallel sind, so sind die Winkel, sie mögen liegen wie man will, gleich. Z. B. wenn  $AB$  (Fig. 11.) mit  $DE$ , und  $BC$  mit  $EF$  parallel ist, so sind die Winkel  $ABC$  und  $DEF$  gleich.

**Beweis.** Es sey  $GBE$  eine grade Linie, so ist, weil  $BC$  und  $EF$  parallel sind;  $GBC = GEF$  (§. 23. II.), folglich ist  $GED$  kleiner als  $GEF$  und folglich  $CBE + BED$  kleiner als  $2\varrho$ . Mithin schneiden sich  $BC$  und  $DE$  nothwendig (§. 22. I.); etwa in  $H$ . Aber  $ED$  oder die grade  $EHI$  ist nach der Voraussetzung mit  $AB$  parallel, also ist  $IHK = ABC$  (§. 23. II.). Aus gleichem Grunde ist auch  $IHK = DEF$  also ist  $ABC = DEF$ .

## 25.

**Lehrsatz.** Durch einen gegebenen Punkt, z. B.  $C$  (Fig. 12.), ist nur eine grade Linie möglich, die mit einer andern gegebenen graden Linie  $DE$  einen gegebenen Winkel  $CAE$  macht.

**Beweis.** Denn gäbe es eine zweite solche Linie, z. B.  $CB$ , so müßte  $CBE = CAE$  seyn, welches nach (§. 22. II.) nicht möglich ist, weil sich  $AC$  und  $BC$  nach der Voraussetzung schneiden.

26.

**Zusätze.** I. Also ist zu Folge (§. 25.) durch einen gegebenen Punkt auch nur ein Perpendikel auf eine gegebene grade Linie möglich.

Denn das Perpendikel ist eine grade Linie aus dem gegebenen Punkt nach der gegebenen Linie, die mit dieser einen rechten Winkel macht.

II. Auch ist durch einen gegebenen Punkt nur eine grade Linie, parallel mit einer andern gegebenen Linie möglich.

Denn sie muß, wenn sie parallel seyn soll, mit einer beliebigen Grundlinie den nemlichen Winkel machen, wie die gegebene Linie (§. 23. II.).

27.

**Lehrsatz.** Wenn zwei grade Linien BA und BD (Fig. 13.) einer dritten AD begegnen, so schneidet jede andere grade Linie durch B, wie z. B. BC, zwischen BA und BD, die AD nothwendig, und zwar zwischen A und D.

**Beweis.** Denn da BA und DA sich schneiden sollen, so ist  $ABD + ADB < 2\varrho$  (§. 22. II.). Da nun CB zwischen AB und DB liegen soll, und folglich CBD kleiner ist als ABD, so ist um so mehr  $CBD + CDB < 2\varrho$ . Deshalb schneiden sich umgekehrt BC und DC nothwendig, und zwar an derselben Seite wie BA die DA (§. 22. I.). Auf der andern Seite ist  $DBA + DAB < 2\varrho$ , weil sich DB und DA schneiden sollen (§. 22. II.). Und da wiederum CB zwischen AB und DB liegt, und folglich ABC kleiner ist als ABD, so ist um so mehr  $CBA + CAB < 2\varrho$ . Folglich schneiden sich auch BC und AC nothwendig, und zwar an derselben Seite wie BD die AD (§. 22. I.). Die Linie BC schneidet also die Linie AD von D nach A zu, und zugleich von A nach D zu, mithin nothwendig zwischen A und D.

28.

**Lehrsatz.** Wenn zwei grade Linien AB und CD (Fig. 14.) zwei andere AE und EF, die mit einander einen beliebigen Winkel AEC machen, unter gleichen Winkeln  $BAE = DCF$  schneiden, so begegnen sie sich nothwendig irgendwo und zwar an derjenigen Seite von AE und EC, an welcher der Winkel AEC kleiner ist als zwei rechte.

**Beweis.** Es sey ACG eine grade Linie durch A und C, so ist der Winkel BAC um CAE kleiner als

der Winkel  $BAE$ , zwischen den Linien  $AB$  und  $AE$ , hingegen  $DCG$  ist um den Winkel  $FCG = ACE$  größer als der gleich groß vorausgesetzte Winkel  $DCF$ , zwischen den Linien  $CD$  und  $CF$ . Also sind die Neigungs-Winkel  $BAC$  und  $DCG$  der Linien  $AB$  und  $CD$  mit der Linie  $ACG$  ungleich, und zwar ist  $BAC + DCA < 2\varrho$ ; denn es ist, wegen  $BAE = DCF$ ,  $BAE + DCE = 2\varrho$  und  $BAC + DCA$  ist um  $CAE + ACE$  kleiner als  $BAE + DCE$ . Also schneiden sich  $AB$  und  $CD$  nothwendig (§. 22. I.), und zwar an derjenigen Seite von  $AC$  oder  $AEC$ , an welcher der Winkel  $AEC$  kleiner ist als zwei rechte.

---

---

## Z w e i t e s   B u c h.

---

Von den Figuren in der Ebene, die von graden Linien umschlossen sind.

---

Von solchen Figuren überhaupt.

29.

*Erklärung.* Eine Figur in der Ebene, welche von drei graden Linien umschlossen ist, heisst Dreieck; wird sie von vier graden Linien umschlossen, Viereck, von fünf graden Linien, Fünfeck, u. s. w.; überhaupt von einer beliebigen Zahl grader Linien, Vieleck.

Die graden Linien, welche die Figur umschliessen, heissen Seiten, ihre Durchschnitte - Punkte Ecken der Figur.

Die Winkel zwischen je zwei zusammenstossenden Seiten, nach dem Innern der Figur zu, heissen innere Winkel; auch blos Winkel, nach aussen zu, wenn die eine Seite verlängert ist, äussere Winkel, welche also die Neben-Winkel der inneren sind.

Innere Winkel, die kleiner als zwei rechte sind, sollen ausspringende Winkel, sind sie grösser als zwei rechte, einspringende Winkel, und wenn die Seiten einander schneiden, überspringende Winkel heissen.

Figuren, die keine andere als ausspringende Winkel haben, heissen auch convex. Die äussere Seite der gebrochenen Linie, welche eine solche Figur umschliesst, heisst ebenfalls convex, die Seite nach dem Innern der Figur zu, concav.

Grade Linien durch die Ecken, welche nicht Seiten der Figur sind, heissen Diagonalen.



Z. B. die Figur *ABCDEFGHJK* (Fig. 16.) ist ein Zahnack, denn sie wird von 10 graden Linien umschlossen. *AB, BC, CD* etc. sind ihre Seiten, *A, B, C, D* etc. die Ecken, *ABC, BCD, CDE, DEF* etc. sind die inneren, *B<sub>1</sub>BC, C<sub>1</sub>CD, D<sub>1</sub>DE* etc. die äusseren Winkel. Winkel wie *ABC, CDE, EFG* etc. sind auspringende, Winkel wie *BCD, DEF* etc. einspringende, Winkel wie *GHI, HIK* überspringende Winkel; die graden Linien *ID, BG, KB* etc., welche Ecken der Figur verbinden, ohne dass sie Seiten wären, sind Diagonalen.

Wir wollen uns auf Figuren mit ausspringenden Winkeln, als auf den einfachsten Fall beschränken. Wo es nöthig, lassen sich Figuren mit einspringenden oder überspringenden Winkeln auf jene bringen.

## 30.

*Erklärungen.* I. Ein Punkt, welcher gleich weit von allen Ecken einer Figur entfernt ist, soll Mittel-Punkt der Ecken, oder Ecken-Mittel-Punkt; die Entfernung der Ecken von dem Mittelpunkte soll Halbmesser der Ecken heissen. Hat eine Figur einen solchen Mittel-Punkt der Ecken, so soll sie centrisc nach den Ecken heissen. Ein solcher Ecken-Mittel-Punkt kann also auch als Mittel-Punkt von Punkten betrachtet werden, nemlich von den Punkten, welche die Ecken der Figur sind. Ein beliebiges System, d. h. irgend eine Gesammtheit von Punkten ist also centrisc, wenn es einen Punkt giebt, der von allen gleich weit entfernt ist. Figuren, welche einen und denselben Mittel-Punkt der Ecken haben, sollen concentrisc nach den Ecken heissen.

II. Ein Punkt, aus welchem die Perpendikel auf die Seiten einer Figur alle gleich lang sind, soll Mittel-Punkt der Seiten, oder Seiten-Mittel-Punkt, das Perpendikel soll Halbmesser der Seiten heissen. Es heisst auch Apotome. Hat eine Figur einen solchen Mittel-Punkt der Seiten, so soll sie centrisc nach den Seiten heissen. Ein solcher Seiten-Mittel-Punkt kann auch als Mittel-Punkt von Linien betrachtet werden, nemlich von den Linien, welche die Seiten der Figur sind. Ein beliebiges System, d. h. irgend eine Gesammtheit von graden Linien, ist also centrisc, wenn es einen Punkt giebt, aus welchem die Perpendikel auf alle Linien gleich lang sind. Figuren, welche einen und denselben Mittel-

punct der Seiten haben, sollen concentrisch nach den Seiten heißen<sup>\*)</sup>).

31.

**Lehrsatz.** Die geringste Zahl grader Linien, welche eine Figur umschließen, ist drei.

**Beweis.** Denn zwei grade Linien begrenzen erst einen Winkel, und um zwei Puncte der Schenkel des Winkels zu verbinden, ist mindestens eine dritte grade Linie nöthig.

32.

**Lehrsatz.** Die Summe der drei innern Winkel jedes Dreiecks ist gleich der Summe von zwei rechten.

**Beweis.** Denn es sey  $CD$  (Fig. 16.) mit der Seite  $AB$  des Dreiecks  $ABC$  parallel und  $BCE$  eine grade Linie, so sind die Neigungs-Winkel  $\beta$  und  $\epsilon$  und die Wechsels-Winkel  $\alpha$  und  $\delta$  der Parallelen  $AB$  und  $DC$  einander gleich (§. 21. I.). Folglich ist  $\gamma + \delta + \epsilon = \gamma + \alpha + \beta$ . Aber die Winkel  $ACB = \gamma$  und  $ACE = \delta + \epsilon$  sind Neben-Winkel (§. 15. II.). Also ist  $\gamma + \delta + \epsilon = 2\rho$  (§. 16. I.). Nun war  $\gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \beta + \gamma$ . Also ist auch  $\alpha + \beta + \gamma = 2\rho$ .

33.

**Zusätze.** Aus (§. 32.) folgt:

I. Die Summe zweier Winkel jedes Dreiecks ist kleiner als die Summe von zwei rechten, und zwar um den dritten Winkel des Dreiecks.

II. Jeder Winkel eines Dreiecks ist kleiner als die Summe von zwei rechten, und zwar um die Summe der beiden andern Winkel.

III. Kein Dreieck kann mehr als einen rechten und noch weniger mehr als einen stumpfen Winkel haben, weil schon die Summe zwei solcher Winkel so groß oder größer seyn würde als die Summe von zwei rechten Winkeln, und also der dritte Winkel dann nicht Statt finden würde.

---

<sup>\*)</sup> Gewöhnlich rechnet man die Sätze von der Centricität der Figuren zu den Sätzen vom Kreise; allein der Kreis ist dazu, wie sich zeigen wird, nicht nothwendig und die Sätze hängen also von demselben nicht ab. Sie dürfen also auch bis zum Kreise nicht verschoben werden, weil sonst der Kreis dazu unentbehrlich seyn müßte, und sie, da dieses nicht der Fall ist, mit denjenigen Sätzen, die dem Kreise wirklich eigenthümlich sind, würden vermengt werden.

IV. In jedem Dreiecke ist ein rechter und noch mehr ein stumpfer Winkel der grösste von den dreien, weil kein zweiter Winkel ein rechter oder stumpfer Winkel seyn kann (III.)

V. Sind zwei oder alle drei Winkel eines Dreiecks einander gleich, so sind sie alle kleiner als rechte, weil keine zwei zugleich rechte seyn können (III.)

VI. Der äussere Neben-Winkel jedes Dreiecks-Winkels ist so gross, als die beiden andern Dreiecks-Winkel zusammen, und folglich grösser als jeder von ihnen. Z. B. der äussere Neben-Winkel  $ACE$  zu dem Dreiecks-Winkel  $\gamma$  (Fig. 16.) oder  $\delta + \epsilon$ , ist gleich  $\alpha + \beta$ .

## 34.

**Erklärung.** Wenn sämtliche Winkel einer Figur, in der Ordnung wie sie auf einander folgen, so gross sind als die Winkel einer andern Figur, in der nemlichen Aufeinanderfolge, so sollen die Figuren gleichwinklig heissen.

## 35.

**Lehrsatz.** Jede Figur hat so viel Seiten als Winkel und umgekehrt.

**Beweis.** Zu jedem Winkel gehören zwei Seiten als Schenkel, und jede Seite ist der Schenkel zweier Winkel, also sind der Seiten so viele als Winkel.

Oder auch: jede Seite ist der Schenkel zweier Winkel und zu jedem Winkel gehören zwei Schenkel, also sind der Winkel so viele als Seiten.

## 36.

**Lehrsatz.** Jede Figur lässt sich durch Diagonalen in an einander liegende Dreiecke theilen, aber in nicht weniger als die Figur Seiten hat, weniger zwei, oder wenn die Zahl der Seiten  $n$  ist, wo  $n$  eine beliebige ganze Zahl seyn kann, in nicht weniger als  $n - 2$ .

**Beweis.** Denn ein Viereck kann sich in nicht weniger als  $2 = 4 - 2$  Dreiecke theilen lassen, weil das Viereck sonst nur ein Dreieck wäre; ein Fünfeck in nicht weniger als in ein Viereck neben einem Dreieck, weil es sonst nur ein Viereck wäre, folglich in nicht weniger als  $3 = 5 - 2$  Dreiecke; ein Sechseck in nicht weniger als in ein Fünfeck neben einem Dreiecke, weil es sonst nur ein Fünfeck wäre,

folglich in nicht weniger als  $4 = 6 - 2$  Dreiecke u. s. w. also ein  $n$  Eck in nicht weniger als  $n - 2$  Dreiecke.

## 37.

**Lehrsatz.** Die Summe der innern Winkel eines Vielecks ist gleich der Summe von so viel mal zwei rechten Winkeln, als das Vieleck Seiten hat, weniger zwei, oder wenn das Vieleck  $n$  Seiten hat, gleich  $(n - 2)\rho$ . Die Summe der äußern Winkel eines Vielecks aber ist immer gleich der Summe von vier rechten.

**Beweis.** I. Es sey  $M$  (Fig. 17.) ein beliebiger Punkt im Innern des Vielecks  $ABCDEFG$ .  $AM$ ,  $BM$ ,  $CM$ , etc. mögen grade Linien von  $M$  nach den Ecken seyn, so liegen um den Punkt  $M$  so viel Dreiecke  $AMB$ ,  $BMC$ ,  $CMD$  etc., als das Vieleck Seiten oder Winkel hat, folglich im  $n$  Ecke,  $n$  Dreiecke. Die Summe der Winkel dieser  $n$  Dreiecke ist  $n \cdot 2\rho$ , weil die Summe der Winkel jedes Dreiecks  $2\rho$  ist (§. 32). Diese Winkel zusammen, wenn man davon den Winkel um den Punkt  $M$  abzieht, sind aber die  $n$  Winkel der Figur. Nun sind die Winkel um den Punkt  $M$  gleich  $4\rho$  (§. 16. II.)  $= 2 \cdot 2\rho$ . Also ist die Summe der innern Winkel der Figur gleich  $n \cdot 2\rho - 2 \cdot 2\rho = (n - 2)2\rho$ , wie behauptet wurde.

Das Nemliche folgt, wenn man sich die Figur, wie (Fig. 18.) nach (§. 36.) in  $n - 2$  Dreiecke getheilt vorstellt. Die Summe der Winkel dieser Dreiecke, welche zugleich die Summe der Winkel der Figur ist, ist  $(n - 2)2\rho$ .

II. Die äußern Winkel sind die Neben-Winkel der innern (§. 29.). Jeder also, mit dem zugehörigen innern Winkel zusammen, macht zwei rechte. Folglich ist die Summe der äußern und innern Winkel zusammen gleich so viel mal zwei rechten, als die Figur Winkel oder Seiten hat, mithin im  $n$  Eck gleich  $n \cdot 2\rho$ . Die Summe der innern Winkel aber war gleich  $(n - 2)2\rho$ , also ist die Summe der äußern Winkel gleich  $n \cdot 2\rho - (n - 2)2\rho = 2 \cdot 2\rho = 4\rho$ .

---

## Erster Abschnitt.

## Von der Gleichheit umschlossener Figuren und dem, was sich darauf bezieht.

## A. Von der Gleichheit der Dreiecke und dem was davon unmittelbar abhängt.

38.

**Erklärung.** Ein Dreieck heisst ungleichseitig, wenn keine seiner Seiten der andern gleich ist; gleichschenkelig, wenn zwei Seiten einander gleich sind; gleichseitig, wenn alle drei Seiten einander gleich sind; gleichwinklig, wenn alle drei Winkel einander gleich sind; rechtwinklig, wenn ein Winkel ein rechter ist; stumpfwinklig, wenn ein Winkel stumpf, oder grösser als ein rechter ist, und spitzwinklig, wenn alle drei Winkel spitz, oder kleiner als rechte sind. Im rechtwinkligen Dreiecke heissen die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, Catheten, die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite heisst Hypothenuse.

39.

**Lehrsätze.** I. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel so gross sind als in einem andern, so ist es auch der dritte.

**Beweis.** Denn die Summe aller drei Winkel ist in beiden Dreiecken gleich, nemlich gleich der Summe von zwei rechten (§. 32.).

II. Ist in einem Dreieck ein Winkel so gross als in einem andern, ein zweiter Winkel aber kleiner, so ist der dritte grösser.

**Beweis.** Denn sonst könnten nicht in beiden Dreiecken die Summen der drei Winkel gleich seyn.

40.

**Lehrsatz.** Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel in dem einen Dreiecke so gross sind, als in dem andern.

**Beweis.** Es sey z. B. in (Fig. 19.)  $AB = ED$ ,  $AC = DF$  und  $BAC = EDF$ . Die gleichen Seiten sind in der Figur durch Striche, die gleichen Winkel durch

Bogen bezeichnet, (welches leichter Uebersicht wegen hinfür, wo es dienlich ist, immer geschehen soll). Man lege den Punct  $A$  in den Punct  $D$  und die Linie  $AC$  in die Linie  $DF$ , so fällt nothwendig  $C$  in  $F$ , weil  $AC = DF$  seyn soll. Ferner fällt nothwendig  $AB$  in  $DE$ , weil die Winkel  $A$  und  $D$  gleich seyn sollen, und  $B$  in  $E$ , weil  $AB = DE$  seyn soll. Also fällt  $C$  in  $F$  und  $B$  in  $E$ , mithin auch  $BC$  in  $EF$  (§. 12. I.). Folglich fallen alle Grenzen der beiden Dreiecke in einander, und folglich sind die Dreiecke einander gleich (§. 5.).

## 41.

**Lehrsatz.** Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn zwei Winkel und die zwischen ihnen liegende Seite in dem einen so groß sind als in dem andern.

**Beweis.** Es sey z. B. in (Fig. 20.)  $AC = DF$  und  $BAC = EDF$ ,  $BCA = EFD$ . Man lege den Punct  $A$  in den Punct  $D$  und die Linie  $AC$  in die Linie  $DF$ , so fällt  $C$  in  $F$ , weil  $AC = DF$  seyn soll. Desgleichen fällt  $AB$  in  $DE$  und  $CB$  in  $FE$ , weil die Winkel  $A$  und  $C$  den Winkeln  $D$  und  $F$  gleich sein sollen. Nun können sich zwei grade Linien nur in einem Puncte schneiden (§. 12. II.). Also fällt auch nothwendig der Durchschnitts-Punct  $B$  in den Durchschnitts-Punct  $E$ . Folglich fallen alle Grenzen der beiden Dreiecke zusammen, und folglich sind die Dreiecke einander gleich (§. 5.).

## 42.

**Lehrsatz.** Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn zwei Winkel und eine anliegende Seite in dem einen Dreiecke so groß sind als in dem andern.

**Beweis.** Denn, wenn zwei Winkel in dem einen Dreiecke so groß sind als in dem andern, so ist es auch der dritte Winkel (§. 39. I.). Da auf diese Weise alle drei Winkel in dem einen Dreiecke so groß sind, als in dem andern, so liegt die gleiche Seite, welche sie auch seyn mag, immer zwischen zwei Winkeln, die in dem einen Dreiecke so groß sind, als in dem andern, und folglich sind die Dreiecke, zu Folge (§. 41.), gleich.

## 43.

**Lehrsatz.** Parallelen schneiden von einander gleich lange Stücke ab.

**Beweis.** Denn, wenn  $EF$ ,  $GH$  und  $AB$ ,  $CD$  (Fig. 21.) Parallelen sind, so sind die Wechselwinkel  $ILK$  und

$LKM$ , so wie  $IKL$  und  $KLM$  gleich (§. 21. I.). Also sind in dem Dreiecke  $ILK$  zwei Winkel  $ILK$  und  $IKL$  nebst der Seite  $LK$  so groß als in dem Dreiecke  $KLM$  die beiden Winkel  $LKM$  und  $KLM$  und die Seite  $LK$ ; folglich sind die Dreiecke einander gleich (§. 41.), und folglich ist  $IK = LM$  und  $IL = KM$ ; das heißt: die Parallelen schneiden gleich lange Stücke von einander ab.

## 44.

**Lehrsätze.** I. Wenn zwei Seiten eines Dreiecks einander gleich sind, so sind es auch die diesen Seiten gegenüber liegenden Winkel.

**Erster Beweis.** Es sey in dem Dreiecke  $ABC$  (Fig. 22.)  $AB = AC$ . Man nehme willkürlich  $BF = CG$ . Alsdann ist auch  $AF = AG$ , weil  $AB = AC$  seyn soll. Also sind in dem Dreiecke  $AFC$  die beiden Seiten  $AF$  und  $AC$  so groß, als in dem Dreiecke  $ABG$  die beiden Seiten  $AG$  und  $AB$ . Desgleichen ist der eingeschlossene Winkel  $A$  in beiden der nemliche. Folglich sind die Dreiecke  $AFC$  und  $ABG$  einander gleich (§. 40.). Also sind auch die Winkel  $AFC$  und  $AGB$  und ihre Supplemente  $BFC$  und  $CGB$ , nebst den Seiten  $FC$  und  $BG$  gleich. Folglich sind in dem Dreiecke  $BFC$  zwei Seiten  $BF$  und  $CF$ , nebst dem eingeschlossenen Winkel  $BFC$ , so groß, als in dem Dreiecke  $CGB$  die beiden Seiten  $CG$  und  $BG$ , mit dem eingeschlossenen Winkel  $BGC$ . Also sind auch die Dreiecke selbst gleich. Mit-hin sind in denselben die Winkel  $FBC$  und  $GCB$ , das heißt, die den gleichen Seiten  $AB$  und  $AC$  des Dreiecks  $ABC$  gegenüber liegenden Winkel  $ABC$  und  $ACB$  gleich.

**Zweiter Beweis.** Es sey  $AK$  (Fig. 22.) eine grade Linie durch  $A$ , welche den Winkel  $BAC$  halbt, so daß  $BAK = CAK$  ist. Dieselbe schneidet, weil sie zwischen  $AB$  und  $AC$  liegt, die  $BC$  nothwendig und zwar zwischen  $B$  und  $C$ , etwa in  $H$  (§. 27.). Nun sind in dem Dreiecke  $BAH$  die Seiten  $BA$  und  $HA$  so groß als in dem Dreiecke  $CAH$  die Seiten  $CA$  und  $HA$ . Desgleichen sind die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich; denn nach der Voraussetzung ist  $BAH$  gleich  $CAH$ . Also sind die Dreiecke  $BAH$  und  $CAH$  einander gleich (§. 40.). Folglich sind auch in denselben die Winkel  $ABH$  und  $ACH$ , die den gleichen Seiten  $AB$

und  $AC$  des gegebenen Dreiecks gegenüber liegen, einander gleich.

II. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks einander gleich sind, so sind es auch die diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten.

Erster Beweis. Gesetzt es sey möglich, daß in dem Dreiecke  $ABC$  (Fig. 23.) nicht  $AB = BC$  ist, während die Winkel  $ABC$  und  $ACB$  gleich sind, so setze man  $AC$  sey größer als  $AB$ , also etwa  $DC = AB$ , so wären in dem Dreiecke  $ABC$  zwei Seiten  $AB$  und  $BC$  und der eingeschlossene Winkel  $ABC$  so groß, als in dem Dreiecke  $DCB$  die beiden Seiten  $DC$  und  $BC$  und der eingeschlossene Winkel  $DCB$ , weil nach der Voraussetzung  $AB = DC$  und  $ABC = DCB$  seyn soll und  $BC$  sich selbst gleich ist. Die Dreiecke  $ABC$  und  $DCB$  wären also gleich. Sie sind es aber nicht, weil  $BD$  nicht in  $AB$  fällt. Also kann  $AC$  nicht größer seyn als  $AB$ . Eben so wird bewiesen, daß  $AB$  nicht größer seyn kann als  $AC$ , oder umgekehrt  $AC$  nicht kleiner als  $AB$ . Folglich kann  $AC$  weder größer noch kleiner als  $AB$  seyn, und folglich sind in dem Dreiecke  $ABC$  die den gleichen Winkeln  $ABC$  und  $ACB$  gegenüber liegenden Seiten  $AB$  und  $AC$  nothwendig gleich.

Auch könnte man, wenn man z. B. annimmt  $AB$  sey nicht gleich  $AC$ , wenn  $ABC = ACB$  ist, setzen:  $AC$  sey z. B. gleich  $AF$ . Daß diese Voraussetzung mit derjenigen  $ABC = ACB$  zugleich nicht statt findet, folgt daraus, daß der Winkel  $AFC$  als äußerer Winkel des Dreiecks  $BFC$  größer ist als der Winkel  $ABC$  (§. 33. VI.), hingegen  $ACF$  kleiner als der gleiche Winkel  $ACB$ , so daß die Winkel  $AFC$  und  $ACF$  ungleich wären, wenn  $AC$  und  $AF$  gleich sind. Sie sind aber alsdann zu Folge (I) nothwendig gleich. Also kann  $AC$  nicht gleich  $AF$ , das heißt nicht kleiner als  $AB$  sein. Eben so folgt, daß  $AB$  nicht kleiner als  $AC$ , also umgekehrt  $AC$  nicht größer als  $AB$  sein kann. Also ist nothwendig  $AB$  gleich  $AC$ .

Zweiter Beweis. Es sey wie in (I.)  $AK$  eine grade Linie durch  $A$ , welche den Winkel  $BAC$  halbt, und folglich die  $BC$  zwischen  $B$  und  $C$ , etwa in  $H$  schneidet (§. 27.). Nun sind in dem Dreiecke  $BAH$  zwei Winkel  $ABH$  und  $BAH$  und die eine anliegende Seite  $AH$  so groß als in dem Dreiecke  $CAH$  die beiden Winkel  $ACH$  und  $CAH$  und die anliegende Seite  $AH$ ; denn nach der Voraussetzung ist  $ABH = ACH$  und  $BAH = CAH$ ,  $AH$  aber ist sich selbst gleich. Also sind die



Dreiecke  $BAH$  und  $CAH$  einander gleich (§. 42.) und folglich ist  $AB = AC$ .

## 45.

**Zusätze.** I. In jedem Dreiecke mit zwei gleichen Seiten, d. h. in jedem gleichschenkligen Dreiecke sind die zu Folge (§. 44.) gleichen Winkel allemal kleiner als rechte (§. 33. V.).

II. In jedem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich. Denn sie liegen alle drei gleichen Seiten gegenüber.

III. In jedem gleichwinkligen Dreiecke (§. 38.) sind alle drei Seiten einander gleich. Denn sie liegen alle drei gleichen Winkeln gegenüber.

## 46.

**Lehrsätze.** I. In jedem Dreiecke liegt der grössere Winkel der grösseren Seite gegenüber.

Z. B. wenn  $BC > AB$  ist (Fig. 24.), so ist der Winkel  $BAC$  grösser als der Winkel  $ACB$ .

**Beweis.** Es sey  $BD = AB$ , so fällt  $D$  zwischen  $B$  und  $C$ , weil  $BC$  grösser seyn soll als  $AB$  oder  $BD$ ; also ist  $BAC > BAD$ . Nun ist in dem gleichschenkligen Dreieck  $ABD$ , den gleichen Seiten  $BD$  und  $AB$  gegenüber,  $BAD = BDA$  (§. 44. I.). Ferner haben die Dreiecke  $BAD$  und  $BAC$  den Winkel  $B$  gemein, der also in beiden gleich gross ist, der Winkel  $BAD$  hingegen ist in dem ersten kleiner als  $BAC$  in dem andern. Also ist der dritte Winkel  $ADB$  in dem ersten Dreieck grösser als der dritte Winkel  $ACB$  in dem andern (§. 39. II.). Folglich ist auch der dem Winkel  $ADB$  gleiche Winkel  $BAD$  grösser als  $ACB$ , und da  $BAD$  noch kleiner ist als  $BAC$ , so ist  $BAC$  um so mehr grösser als  $ACB$ .

II. In jedem Dreiecke liegt dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber.

Z. B. wenn  $BAC > ACB$  ist (Fig. 24.), so ist  $BC > AB$ .

**Beweis.** Man setze, es sey  $BC$  nicht grösser als  $AB$ , so ist  $BC$  entweder gleich  $AB$  oder kleiner als  $AB$ . Wäre  $BC = AB$ , so wäre nach (§. 44. I.)  $BAC = ACB$ , gegen die Voraussetzung; also kann  $BC$  nicht gleich  $AB$  seyn. Wäre  $BC < AB$ , so wäre nach (§. 46. I.)  $BAC$  kleiner  $ACB$ , ebenfalls gegen die Voraussetzung.

Also kann auch  $BC$  nicht kleiner als  $AB$  seyn. Es kann also  $BC$ , dem größern Winkel  $BAC$  gegenüber, nur größer seyn, als die Seite  $AB$ , dem kleinern Winkel  $ACB$  gegenüber.

## 47.

**Zusätze.** Aus (§. 46.) folgt:

I. Der größten Seite eines Dreiecks liegt der größte Winkel und dem größten Winkel die größte Seite gegenüber.

II. In jedem recht- oder stumpfwinkligen Dreiecke ist die dem rechten oder stumpfen Winkel gegenüber liegende Seite die größte von allen dreien, denn der rechte oder stumpfe Winkel ist der größte von allen drei Winkeln (§. 33. IV.).

III. Nur die größte Seite eines Dreiecks kann einem rechten oder stumpfen Winkel gegenüber liegen, denn sonst würde die noch größere Seite einem noch größeren Winkel gegenüber liegen, und kein Dreieck kann mehr als einen rechten oder stumpfen Winkel haben (§. 33. III.).

IV. Jeder Winkel eines Dreiecks, welcher nicht der größten Seite gegenüber liegt, ist kleiner als ein rechter. Denn wäre ein solcher Winkel auch nur ein rechter, so würde jeder größeren Seite, mehr als ein zweiter rechter Winkel, der schon selbst nicht Statt findet, gegenüber liegen.

V. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks ungleich sind, so liegt an dem größeren Winkel die kleinere, und an dem kleinern die größere Seite. Z. B. in (Fig. 24.) sind die Winkel  $BAC$  und  $ACB$  an  $AC$  ungleich, und wie bewiesen, ist die an dem größern Winkel  $BAC$  liegende Seite  $BA$ , die kleinere, die an dem kleinern Winkel  $ACB$  liegende Seite  $BC$  die größere.

## 48.

**Lehrsätze.** I. Wenn in einem recht- oder stumpfwinkligen Dreiecke die längste Seite nebst dem ihr gegenüber liegenden Winkel eben so groß, eine der beiden übrigen Seiten aber größer ist, als in einem andern Dreiecke, so ist die dritte Seite und der ihr gegenüber liegende Winkel kleiner.

Z. B. wenn in den Dreiecken  $ABC$  und  $DEF$  (Fig. 25.)  $B$  und  $E$  rechte, oder gleich große stumpfe

Winkel sind und es ist  $DF = AC$ ,  $EF$  aber größer als  $BC$ , so ist nothwendig  $DE$  kleiner als  $AB$  und der Winkel  $DFB$  ist kleiner als der Winkel  $ACB$ .

*Beweis.* Man lege  $E$  in  $B$  und  $EF$  in  $BC$ , so fällt  $ED$  in  $BI$ , weil  $E = B$  seyn soll.  $F$  falle in  $G$ , so wird  $C$  zwischen  $B$  und  $G$  liegen, weil  $EF > BC$  seyn soll. Nun kann  $D$  nicht in  $A$  fallen. Denn, wäre  $AB = ED$ , nächst  $BG = EF$  und  $E = B$ , so wären die Dreiecke  $DEF$  und  $ABG$  gleich (§. 40.), und folglich  $AG = DF = AC$ , welches nicht der Fall ist. Denn in dem Dreiecke  $ACG$  ist der Winkel  $ACG$ , als äußerer Winkel des Dreiecks  $ABC$ , größer als der Winkel  $ABC$  (§. 33. VI.) und folglich stumpf, mithin größer als  $ACG$  (§. 33. IV.); folglich ist die gegenüber liegende Seite  $AG$  größer als  $AC$ .  $DE$  kann aber auch nicht größer seyn als  $AB$ , z. B. nicht gleich  $AB$ . Denn die grade Linie  $IG$  ist, aus gleichem Grunde wie vorhin, länger als  $AG$  und folglich um so mehr länger als  $AC = DF$ ; also kann  $DE$  weder gleich  $AB$ , noch größer als  $AB$ , folglich nur kleiner als  $AB$ , etwa gleich  $HB$ , seyn, welches das Erste war.

Der Winkel  $HGB = DFE$  ist aber alsdann kleiner als  $ACB$ , denn  $HGB$  ist kleiner als  $AGB$  und  $AGB$  ist kleiner als der äußere Winkel  $ACB$  des Dreiecks  $AGC$ , welches das Zweite war.

II. Wenn in einem recht- oder stumpfwinkligen Dreiecke die längste Seite nebst dem ihr gegenüber liegenden Winkel eben so groß, einer der übrigen Winkel aber kleiner ist als in einem andern Dreiecke, so ist die dem dritten Winkel gegenüber liegende Seite in dem ersten Dreiecke größer, und die dritte Seite kleiner als in dem andern.

Z. B. wenn wie in (I.)  $B = E$  und  $DF = AC$  ist (Fig. 25.) und es ist  $F < C$ , so ist  $EF > BC$  und  $DE < AB$ .

*Beweis.* Man lege  $E$  in  $B$  und  $EF$  in  $BC$ , so fällt  $ED$  in  $BI$ , weil  $E = B$  seyn soll. Nun kann  $EF$  nicht gleich  $BC$  seyn; denn fiel  $F$  in  $C$ , so fiel  $DF$  zwischen  $BC$  und  $AC$ , etwa in  $KC$ , weil  $F < C$  seyn soll;  $KC = DF$  aber kann, aus gleichen Gründen wie in (I.), nicht gleich  $AC$  seyn.  $EF$  kann aber auch nicht kleiner als  $BC$  seyn, denn fiel  $F$  z. B. in  $L$ , so fiel  $DF$  wiederum zwischen  $BC$  und  $AC$ , weil  $F < C$  seyn soll, etwa in  $LK$  und  $LK = DF$  kann, wie in (I.), nicht gleich  $KC$ , und also um so weniger gleich  $AC$  sein.

Also kann  $EF$  weder gleich  $BC$  noch kleiner als  $BC$ , folglich nur grösser als  $BC$  seyn, z. B. gleich  $BG$ , welches das Erste war. Wenn aber  $EF > BC$  ist, so ist (nach I.)  $DE < AB$ , welches das Zweite war.

## 49.

**Lehrsatz.** Jede zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammen länger als die dritte.

Z. B. in (Fig. 26.) ist  $AB + AC > BC$ .

**Beweis.** Es sey  $CAD$  eine grade Linie und  $AD = AB$ , so sind in dem gleichschenkligen Dreiecke  $DAB$  die den gleichen Seiten  $AD$  und  $AB$  gegenüberliegenden Winkel  $ABD$  und  $ADB$  gleich groß (§. 44. I.). Nun liegt  $AB$  zwischen  $DB$  und  $CB$ , also ist  $DBC > ABD$ , folglich auch, weil  $ADB$  und  $ABD$  gleich sind,  $DBC > CDB$ . Dem grössern Winkel  $DBC$  liegt aber in dem Dreiecke  $DBC$  eine grössere Seite gegenüber (§. 46. II.). Also ist  $DC > BC$ . Es war aber  $AD = AB$ , also ist  $DC = AB + AC$  und folglich  $AB + AC > BC$ .

## 50.

**Lehrsatz.** Wenn eine Seite eines Dreiecks so gross ist als eine Seite eines andern, die anliegenden Winkel aber im ersten Dreiecke beide grösser sind als in dem andern, so ist die Summe der beiden übrigen Seiten im ersten Dreieck grösser als im zweiten.

Z. B. wenn in (Fig. 27.)  $BC = EF$  und  $E > B$ ,  $F > C$  ist, so ist  $ED + DF > AB + AC$ .

**Beweis.** Man lege  $B$  in  $E$  und  $BC$  in  $EF$ , so fällt  $C$  in  $F$  weil  $BC = EF$  seyn soll, desgleichen fällt  $BA$  zwischen  $ED$  und  $EF$ , etwa in  $EG$ , weil  $B < E$  seyn soll, und  $CA$  zwischen  $FE$  und  $FD$ , etwa in  $FG$ , weil  $C$  kleiner als  $F$  seyn soll. Eine grade Linie durch  $E$  und  $G$  schneidet aber die  $DF$  zwischen  $D$  und  $F$ , etwa in  $H$  (§. 27.). Nun ist in dem Dreiecke  $GHE$ ,  $GH + HE > GE$  (§. 49.), also ist, wenn man noch  $EG$  hinzuthut,  $EG + GH + HE$ , oder  $EH + HE > EG + GE$ . In dem Dreiecke  $EDH$  ist ferner  $ED + DH > EH$  (§. 49.), also, wenn man  $HF$  hinzuthut,  $ED + DH + HF$  oder  $ED + DF > EH + HF$ . Vorhin war aber  $EH + HE > EG + GE$ . Also ist um so mehr  $ED + DF > EG + GF$ , oder weil  $\triangle EGI = \triangle BAC$ ,  $ED + DF > AB + AC$ .

51:

**Lehrsätze.** I. Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten so groß sind als in einem anderen, der von ihnen eingeschlossene Winkel aber ist in dem ersten Dreiecke größer als in dem zweiten, so ist die dritte Seite in dem ersten Dreiecke ebenfalls größer als im zweiten, der der größeren von den beiden gleichen Seiten gegenüber liegende Winkel aber ist in dem ersten Dreiecke kleiner als in dem zweiten.

Z. B. wenn in (Fig. 23.)  $BC = EF$ ,  $AC = DF$ ,  $\angle ACB$  aber größer als  $\angle DFE$  ist, so ist  $AB > DE$  und wenn  $AC > BC$  ist, so ist zugleich  $\angle ABC < \angle DEF$ .

**Erster Beweis. Erster Theil.** Man lege den Punkt  $C$  in den Punkt  $F$  und die kleinere von den beiden Seiten  $AC$  und  $BC$ , also  $BC$ , in  $EF$ , so fällt  $B$  in  $E$ , weil  $BC = EF$  seyn soll,  $AC$  aber wird außerhalb  $DFE$ , etwa in  $GF$  fallen, weil  $\angle ACB > \angle DFE$  seyn soll, so daß  $DF$  zwischen  $EF$  und  $GE$  liegt. Fällt nun  $A$  etwa in  $G$ , also  $AB$  in  $GE$ , so ist das Dreieck  $GEF$  dem Dreiecke  $ABC$  gleich (§. 40.). Nun soll nach der Voraussetzung  $AC = DF$  seyn, also ist  $DF = GF$  und folglich in dem gleichschenkligen Dreiecke  $DFG$   $\lambda < \varphi$  (§. 45. I.). Ferner ist, weil  $BC < AC$  oder  $EF < DF$  seyn soll,  $\alpha < \varphi$  (§. 47. IV.). Also ist  $\alpha + \lambda$  oder  $\psi < 2\varphi$ . Mithin ist  $\nu > 0$  und folglich  $\angle GEF$  oder  $\angle ABC$  kleiner als  $\angle DEF$ , welches der zweite Theil des Satzes war.

**Zweiter Theil.** Es ist aber wegen  $\psi < 2\varphi$  auch  $\mu > 0$ . Also liegt  $GE$  zwischen  $GD$  und  $GE$ , und folglich ist  $\mu < \varphi$ , oder weil in dem gleichschenkligen Dreieck  $GFD$ , den gleichen Seiten  $GF$  und  $DF$  gegenüber,  $\varphi = \lambda$  ist (§. 44. I.)  $\mu < \lambda$  und folglich um so mehr  $\mu < \psi$ . Also ist in dem Dreieck  $GDE$  der Winkel  $\angle DGE$  kleiner als der Winkel  $\angle GDE$ , und folglich ist die dem Winkel  $\angle GDE$  gegenüber liegende Seite  $GE$  größer als die dem Winkel  $\angle DGE$  gegenüber liegende Seite  $DE$  (§. 46. II.), also auch, weil  $GE = AB$  ist,  $AB > DE$ ; welches der erste Theil des Satzes war.

**Zweiter Beweis. Erster Theil** wie oben.

**Zweiter Theil.** In dem Dreiecke  $DHE$  ist  $DH + HE > DE$  und in dem Dreiecke  $GHE$ ,  $HE + GH > GE$  (§. 49.), also ist zusammen genommen, um so mehr,  

$$DH + HE + HE + GH > DE + GE.$$

Es

Es ist aber  $DH + HF = DF = GF$  und  $HE + GH = GE = AB$ , also ist

$$GF + AB > DE + GF,$$

und wenn man  $GF$  auf beiden Seiten abzieht

$$AB > DE;$$

wie oben.

II. Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten so groß sind, als in einem anderen und die dritte Seite in dem ersten Dreiecke ist größer als in dem zweiten, so ist der der dritten Seite gegenüber liegende Winkel in dem ersten Dreiecke gleichfalls größer als in dem zweiten, der der größeren von den beiden gleichen Seiten gegenüber liegende Winkel aber ist in dem ersten Dreiecke kleiner als in dem zweiten.

Z. B. wenn in (Fig. 28.)  $BC = EF$ ,  $AC = DF$ ,  $AB$  aber größer ist als  $DE$ , so ist auch  $ACB > DFE$  und wenn  $AC > BC$  ist, so ist zugleich  $ABC < DEF$ .

Beweis. Wäre nicht  $ACB > DFE$ , so wäre entweder  $ACB = DFE$  oder  $ACB < DFE$ . Im ersten Falle wären in dem Dreieck  $ABC$  die beiden Seiten  $AC$  und  $BC$  und der eingeschlossene Winkel  $ACB$  so groß als in dem Dreiecke  $DFE$ , die beiden Seiten  $DF$  und  $EF$  und der eingeschlossene Winkel  $DFE$ , also wären die beiden Dreiecke, zu Folge (§. 40.), gleich, und folglich wäre  $AB = DE$ ; gegen die Voraussetzung. Also kann  $ACB$  nicht gleich  $DFE$  seyn. Wäre  $ACB < DFE$ , so wäre, nach (I.),  $AB < DE$ ; ebenfalls gegen die Voraussetzung. Also kann auch nicht  $ACB$  kleiner als  $DFE$  seyn. Folglich kann nur  $ACB$  größer seyn als  $DFE$ ; welches das Erste war.

Da aber  $ACB > DFE$  ist, so ist auch, nach (I.), notwendig  $ABC < DEF$ ; welches das Zweite war.

III. Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten so groß sind als in einem anderen, der der größern Seite gegenüber liegende Winkel aber in dem ersten Dreiecke kleiner ist als in dem andern, so sind die dritte Seite und der ihr gegenüber liegende Winkel in dem ersten Dreiecke größer als in dem zweiten.

Z. B. wenn in (Fig. 28.)  $BC = EF$  und  $AC = DF$ ,  $ABC$  aber, vorausgesetzt dass  $AC > BC$  ist, kleiner ist als  $DEF$ , so ist  $AB > DE$  und  $ACB > DFE$ .

Beweis. Wäre nicht  $ACB > DFE$ , so wäre entweder  $ACB = DFE$ , oder  $ACB < DFE$ . Im ersten Falle wären in dem Dreieck  $ABC$  die beiden Seiten  $AC$  und  $BC$  und der eingeschlossene Winkel  $ACB$  so groß, als in dem Dreieck  $DFE$  die beiden Seiten  $DF$  und  $EF$

und der eingeschlossene Winkel  $DFE$ , also wären die beiden Dreiecke, nach (§. 40.), gleich und folglich wäre  $ABC = DEF$ ; gegen die Voraussetzung. Also kann nicht  $ACB$  gleich  $DFE$  seyn. Wäre  $ACB < DFE$ , so wäre nach (I.)  $ABC > DEF$ , ebenfalls gegen die Voraussetzung. Also kann auch nicht  $ACB$  kleiner als  $DFE$  seyn. Folglich kann  $ACB$  nur gröfser seyn als  $DFE$ ; welches der zweite Theil des Satzes war.

Da aber  $ACB > DFE$  ist, so ist auch nach (I.) nothwendig  $AB > DE$ ; welches der erste Theil des Satzes war.

52.

**Lehrsatz.** Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn die drei Seiten des einen so grofs sind, als die drei Seiten des andern.

**Erster Beweis.** Wären die Dreiecke nicht gleich, so wäre irgend ein Winkel in dem einen gröfser oder kleiner als in dem andern. Gleiche Seiten schlössen also in dem einen Dreieck einen gröfsern oder kleinern Winkel ein als in dem andern. In solchem Fall aber wäre nach (§. 51. I.) die dritte Seite nicht in beiden Dreiecken gleich, sondern ebenfalls gröfser oder kleiner. Also kann kein Winkel in dem einen Dreiecke gröfser oder kleiner seyn als in dem andern, zwischen gleichen Seiten; mithin schliessen die nemlichen Seiten überall gleiche Winkel ein, und folglich sind die beiden Dreiecke gleich.

**Zweiter Beweis.** Die beiden Dreiecke mögen  $ABC$  und  $DEF$  seyn, (Fig. 29. I und II.), so dafs nach der Voraussetzung  $AB = DE$ ,  $BC = EF$  und  $CA = FD$  ist. Man lege z. B.  $A$  in  $D$  und  $AC$  in  $DF$ , so fällt  $C$  in  $F$ , weil  $AC = DF$  ist. Gesetzt nun, die beiden Dreiecke wären nicht gleich, so giebt es fünf Fälle:

- 1) Entweder wäre z. B.  $A < D$  und  $C = F$
- 2) oder  $A > D$  und  $C = F$
- 3) oder  $A > D$  und  $C > F$
- 4) oder  $A < D$  und  $C < F$
- 5) oder  $A > D$  und  $C < F$ .

Im ersten Falle fiel  $AB$  zwischen  $DE$  und  $EF$  (Fig. 29. II.), also da  $C = F$  vorausgesetzt wird,  $B$  etwa in  $G$ . Da alsdann  $FG = BC$  nicht gleich  $EF$  sein kann, wie es seyn soll, so ist der Fall nicht möglich.

Im zweiten Falle fiel  $AB$  aufserhalb  $DE$  und  $DF$ , also da  $C = F$  vorausgesetzt wird,  $B$  etwa in  $H$ , wenn



$FH$  eine grade Linie ist. Da alsdann  $FH = BC$  nicht gleich  $EF$  seyn kann, wie es seyn soll, so ist auch der zweite Fall nicht möglich.

Im dritten Falle fielen  $AB$  und  $CB$  beide außerhalb  $DEF$ , also etwa in  $DI$  und  $FI$ . Dann aber wären  $DI + FI > DE + FE$  (§. 50.). Also könnte nicht  $DI$ , oder  $AB$ , gleich  $DE$  und  $FI$  oder  $BC$  gleich  $FE$  seyn, wie es seyn soll. Also ist auch der dritte Fall nicht möglich.

Im vierten Falle fielen  $AB$  und  $CB$  beide innerhalb  $DEF$ , also etwa in  $DK$  und  $FK$ . Dann aber wären  $DK + FK < DE + FE$  (§. 50.) Also könnte nicht  $DK$ , oder  $AB$ , gleich  $DE$  und  $FK$  oder  $BC$  gleich  $FE$  seyn, wie es seyn soll. Also ist auch der vierte Fall nicht möglich.

Im fünften Falle fiel  $AB$  außerhalb  $DEF$  etwa in  $DG$  (Fig. 29. III.) und  $CB$  zwischen  $FD$  und  $FE$ , also etwa in  $GF$ . Da  $AB = GD$  und  $BC = GF$  und zugleich  $AB = DE$  und  $BC = EF$  seyn soll, so wäre  $DG = DE$  und  $FG = FE$ , also wären  $GDE$  und  $GFE$  gleichschenklige Dreiecke und folglich, den gleichen Seiten gegenüber, die Winkel  $DGE$ ,  $DEG$  und  $FGE$ ,  $FEG$  einander gleich (§. 44. I.). Es ist aber  $DGE$  um den Winkel  $DGF$  gröfser als  $FGE$ , also müfste, weil  $FGE = FEG$  seyn soll,  $DGE > FEG$  oder auch weil  $DGE = DEG$  seyn soll,  $DEG > FEG$  seyn. Es ist aber im Gegentheil  $DEG < FEG$ ; also ist auch der fünfte Fall nicht möglich.

Folglich können die Winkel  $A$  und  $C$  nicht von den Winkeln  $D$  und  $F$  verschieden seyn und mithin müssen die beiden Dreiecke gleich seyn.

*Anmerkung.* Man pflegt auch den Satz wie folgt zu beweisen.

Man stellt sich vor, das Dreieck  $ABC$  werde wie (Fig. 29. IV.) unter das Dreieck  $DEF$  gelegt, so dafs  $AC$  in  $DF$  fällt und  $AB = DG$ ,  $BC = GF$  ist. Dann sind, wenn  $GE$  eine grade Linie ist,  $GDE$  und  $GFE$  gleichschenklige Dreiecke, weil  $AB$  oder  $DG = DE$ , und  $BC$  oder  $FG = EF$  seyn soll. Also sind die Winkel  $DEG$  und  $DGE$ , und  $FGE$  und  $FEG$ , also auch  $DEF$  und  $DGF$  gleich, und folglich ist, weil die Winkel  $DEF$  und  $DGF$  von den nemlichen Seiten eingeschlossen werden, das Dreieck  $DGF$  dem Dreiecke  $DEF$  gleich, woraus man schliesst, dafs auch die Dreiecke  $ABC$  und  $DEF$  gleich sind.



Dieser Beweis ist aber nicht streng. Denn gesetzt, es wäre möglich, daß das Dreieck  $DEF$  zwar die nemlichen Seiten habe wie  $ABC$ , nicht aber die nemlichen Winkel, so würde ebenfalls noch folgen, daß die Dreiecke  $ABC$  und  $DEF$  gleich sind, welches doch unrichtig ist. Der Fehler liegt darin, daß der Beweis der Gleichheit der beiden Dreiecke  $ABC$  und  $DGF$  fehlt.

## 53.

**Lehrsatz.** Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn zwei Seiten und der der grösseren von beiden gegenüber liegende Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern.

Z. B. wenn in (Fig. 29. I. und II.)  $AC = DF$ ,  $BC = EF$  und, vorausgesetzt daß  $AC > BC$  ist,  $B = E$  ist, so sind die Dreiecke  $ABC$  und  $DEF$  einander gleich.

**Beweis.** Wären die Dreiecke nicht gleich, so wäre z. B. die dritte Seite  $AB$  in dem einen grösser oder kleiner, als  $DE$  in dem andern. Im ersten Falle wären die den grössern von den beiden gleichen Seiten gegenüber liegenden Winkel  $B$  und  $E$  in den beiden Dreiecken nicht gleich, sondern der Winkel in dem ersten Dreiecke wäre, nach (§. 51. II.), kleiner, im andern Fall grösser als in dem zweiten; gegen die Voraussetzung. Also können die Dreiecke nicht ungleich seyn.

## 54.

**Zusätze.** Aus (§. 53.) folgt:

I. Zwei Dreiecke sind gleich, wenn in dem einen der grösste von allen drei Winkeln und beliebige zwei Seiten, auch wenn sie den grössten Winkel nicht einschliessen, so groß sind als in dem andern; denn da es alsdann keinen grössern als den gleichen Winkel giebt und die grössere Seite dem grösseren Winkel gegenüber liegt (§. 46. II.), so ist der gleiche Winkel gewiss derjenige, welcher der grösseren von den beiden gleichen Seiten gegenüber liegt.

II. Also sind recht- und stumpfwinklige Dreiecke gleich, wenn ausser dem rechten oder stumpfen Winkel zwei beliebige Seiten, auch wenn sie den rechten oder stumpfen Winkel nicht einschliessen, in dem einen so groß sind als in dem andern. Denn der rechte und stumpfe Winkel ist immer der grösste von allen dreien (§. 33. IV.).

## 55.

*Anmerkung.* I. Die Fälle gleicher Dreiecke sind **zusammengenommen**, in der obigen Ordnung folgende.

**Erstlich**, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern (§. 40.).

**Zweitens**, wenn zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite in dem einen so groß sind, als in dem andern (§. 41.).

**Drittens**, wenn zwei Winkel und eine anliegende Seite in dem einen so groß sind, als in dem andern (§. 42.).

**Viertens**, wenn alle drei Seiten in dem einen so groß sind, als in dem andern (§. 52.).

**Fünftens**, wenn zwei Seiten und der der größern gegenüberliegende Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern (§. 53.).

Der zweite und dritte Fall lassen sich in einen zusammenfassen; und wenn man die Fälle nach der Zahl der Seiten ordnet, so sind sie folgende:

1. Wenn alle drei Seiten in dem einen Dreieck so groß sind, als in dem andern (§. 52.).

2. Wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern (§. 40.).

3. Wenn zwei Seiten und der der größern gegenüberliegende Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern (§. 53.).

4. Wenn eine Seite und zwei beliebige Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern (§. 41. 42.).

Für recht- und stumpfwinklige Dreiecke lassen sich die Fälle auf drei zusammenziehen, nemlich:

Recht- und stumpfwinklige Dreiecke sind gleich:

1. Wenn alle drei Seiten in dem einen so groß sind, wie in dem andern (§. 52.).

2. Wenn zwei beliebige Seiten und der rechte oder stumpfe Winkel in dem einen so groß sind, wie in dem andern (§. 54. II.).

3. Wenn eine Seite und zwei beliebige Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern (§. 55. 2.).

II. Wie man sieht, ist zur Gleichheit der Dreiecke immer nur die Gleichheit von drei Stücken (Winkel und Seite sollen gemeinschaftlich durch das Wort Stück bezeichnet werden) nöthig, den Fall dreier Winkel ausgenommen, aus deren Gleichheit nicht die Gleichheit von Dreiecken folgt. Also dürfen, mit andern Wor-

ten, an der Gleichheit der 6 Stücke eines Dreiecks; theils unbedingt, theils bedingt, drei Stücke, nur nicht drei Seiten fehlen, nemlich:

Drei Winkel können unbedingt fehlen (I. 1.).

Zwei Winkel und eine Seite können fehlen, wenn die fehlende Seite zwischen ihnen liegt (I. 2.) oder wenn der eine fehlende Winkel der fehlenden Seite gegenüber liegt, der andere fehlende Winkel aber der kleinere von den an der fehlenden Seite liegenden ist (I. 3.).

Ein Winkel und zwei Seiten können unbedingt fehlen (4.).

56.

*Erklärung.* Die Stücke, welche mindestens gleich seyn müssen, wenn zwei Dreiecke gleich seyn sollen, sollen bestimmende Stücke heißen, weil sie das Dreieck bestimmen und kein anderes Dreieck mit den nemlichen bestimmenden Stücken möglich ist. Die bestimmenden Stücke von Dreiecken sind also:

- 1) drei Seiten;
- 2) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;
- 3) zwei Seiten und der der größern gegenüberliegende Winkel;
- 4) eine Seite und zwei Winkel.

Die bestimmenden Stücke sind diejenigen, welche nicht von einander abhängen, sondern willkührlich sind, welche aber die übrigen bestimmen und von welchen diese abhängen.

57.

*Lehrsatz.* Wenn die Seiten eines Dreiecks mit den Seiten eines andern, in einerlei Richtung gleiche Winkel machen, so sind die Winkel des einen Dreiecks so groß, als die Winkel des andern.

*Beweis.* Die Winkel, welche die Seiten des Dreiecks  $abc$  (Fig. 30.) mit den Seiten des Dreiecks  $ABC$  machen, sollen gleich seyn, also wird vorausgesetzt  $BDG = AEH = CFI$ .

Nun ist z. B. der Nebenwinkel  $ADa = 2\rho - D$ , also in dem Vierecke  $ADaE$ , weil die Summe der vier Winkel eines Vierecks gleich der Summe von vier rechten ist (§. 37.),  $DaE = 4\rho - A - (2\rho - D) - E = 4\rho - A - 2\rho + D - E = 2\rho - A + D - E$ . Es wird aber  $D = E$  vorausgesetzt; also ist  $DaE = 2\rho - A$ , und folglich, weil  $a = 2\rho - DaE$  ist,

$$a = A.$$

Eben so ist  $BFb = 2\rho - F$ , also ist in dem Viereck  $BDbF$  der Winkel  $DbF = 4\rho - B - (2\rho - F) - D = 4\rho - B - 2\rho + F - D = 2\rho - B + F - D$ . Es wird aber  $F = D$  vorausgesetzt, also ist  $DbF = 2\rho - B$ , und folglich  $b = B$ .

Also ist auch  $c = C$ .

Folglich sind die Winkel des Dreiecks  $abc$  so groß als die Winkel des Dreiecks  $ABC$ .

### Von den schrägen Linien.

58.

**Lehrsatz.** Wenn eine grade Linie durch die Ecke eines Dreiecks und durch die gegenüberliegende Seite geht, wie  $AD$  (Fig. 31.) in dem Dreieck  $ABC$ , so können folgende fünf Stücke gleich seyn:

- 1) die Schenkel des getheilten Winkels  $AB$  und  $AC$ ;
- 2) die Theile dieses Winkels  $\varepsilon$  und  $\tau$ ;
- 3) die Abschnitte der dritten Seite  $BD$  und  $DC$ ;
- 4) die Winkel zwischen der Mittel-Linie und der Grund-Linie  $\alpha$  und  $\lambda$ ;
- 5) die Winkel an der Grund-Linie  $\beta$  und  $\gamma$ .

Von je zwei dieser Gleichheiten, mit Ausnahme der Verbindung der ersten und fünften, hängen die drei übrigen ab; welches neun Sätze giebt, die zu beweisen sind.

**Beweis:** I. Es sey  $AB = AC$  und  $\varepsilon = \tau$ .

Da  $AD$  sich selbst gleich ist, so sind in dem Dreiecke  $BAD$  zwei Seiten  $BA$  und  $AD$ , nebst dem eingeschlossenen Winkel  $\varepsilon$ , so groß als in dem Dreiecke  $CAD$  die beiden Seiten  $CA$  und  $AD$  mit dem eingeschlossenen Winkel  $\tau$ . Folglich sind die Dreiecke gleich (§. 40.), und folglich ist auch

$$BD = DC, \alpha = \lambda = \rho \text{ und } \beta = \gamma.$$

II. Es sey  $AB = AC$  und  $BD = DC$ .

Da  $AD$  sich selbst gleich ist, so sind in dem Dreiecke  $BAD$  alle drei Seiten so groß als in dem Dreiecke  $CAD$ ; folglich sind die Dreiecke gleich und folglich ist auch

$$\alpha = \lambda = \rho, \beta = \gamma \text{ und } \varepsilon = \tau.$$

III. Es sey  $AB = AC$  und  $\alpha = \lambda$ .

Da alsdann  $\alpha = \lambda = \rho$ , so sind die Dreiecke  $ADB$  und  $ADC$  rechtwinklig und die beiden Seiten  $AB$  und  $AD$  sind in dem einen so groß, als die Seiten  $AC$  und  $AD$  in dem andern. Folglich sind die Dreiecke gleich (§. 54. II.) und folglich ist auch

$$\varepsilon = \tau, BD = CD \text{ und } \beta = \gamma.$$

IV. Es sey  $\varepsilon = \tau$  und  $BD = DC$ .

Es sey  $ADE$  eine grade Linie und  $DE = DA$ , so sind die Dreiecke  $BDA$  und  $CDE$  gleich; denn es ist nach der Voraussetzung  $BD = DC$  und  $AD = DE$ , und die eingeschlossenen Winkel  $\alpha$  und  $\nu$  sind, als Scheitel-Winkel, gleich. Also ist auch  $\psi = \varepsilon$ , und da  $\varepsilon = \tau$  vorausgesetzt wird,  $\psi = \tau$ . Folglich ist das Dreieck  $ACE$  über  $AE$  gleichschenkelig (§. 44. II.), d. h. es ist  $AC = CE$ . Da aber, wegen der Gleichheit der Dreiecke  $BDA$  und  $CDE$ ,  $CE = AB$  ist, so ist auch  $AC = AB$ , und folglich sind nunmehr alle drei Seiten der beiden Dreiecke  $ABD$  und  $ACD$  gleich; folglich sind die Dreiecke selbst gleich (§. 52.) und es ist

$$AB = AC, \alpha = \lambda = \varrho \text{ und } \beta = \gamma.$$

V. Es sey  $\varepsilon = \tau$  und  $\alpha = \lambda$ .

Alsdann sind in dem Dreieck  $ABD$  eine Seite  $AD$  und die beiden daran liegenden Winkel  $\alpha$  und  $\varepsilon$  so groß, als in dem Dreieck  $ACD$  die Seite  $AD$  und die beiden daran liegenden Winkel  $\lambda$  und  $\tau$ . Also sind die Dreiecke gleich (§. 41.), und es ist folglich

$$AB = AC, BD = DC \text{ und } \beta = \gamma.$$

VI. Es sey  $\varepsilon = \tau$  und  $\beta = \gamma$ .

Alsdann sind in dem Dreieck  $ABD$  die beiden Winkel  $\varepsilon$  und  $\beta$  und die anliegende Seite  $AD$  so groß, als in dem Dreieck  $ACD$  die Winkel  $\tau$  und  $\gamma$  und die anliegende Seite  $AD$ ; folglich sind die Dreiecke gleich (§. 42.) und es ist folglich

$$AB = AC, BD = DC \text{ und } \alpha = \lambda = \varrho.$$

VII. Es sey  $BD = DC$  und  $\alpha = \lambda$ .

Alsdann sind in dem Dreieck  $ABD$  die beiden Seiten  $AD$  und  $BD$ , nebst dem eingeschlossenen Winkel  $\alpha$ , so groß, als in dem Dreieck  $ACD$  die beiden Seiten  $AD$  und  $DC$ , nebst dem eingeschlossenen Winkel  $\lambda$ . Folglich sind die Dreiecke gleich (§. 40.) und es ist

$$AB = AC, \varepsilon = \tau \text{ und } \beta = \gamma.$$

VIII. Es sey  $BD = DC$  und  $\beta = \gamma$ .

Alsdann ist das Dreieck  $ABC$  über  $AC$  gleichschenkelig (§. 44. II.) und folglich ist  $AB = AC$ . Also sind nunmehr in dem Dreieck  $ABD$  alle drei Seiten so groß, als in dem Dreieck  $ACD$ , nemlich  $AB = AC$ ,  $BD = DC$ , nach der Voraussetzung, und  $AD = AD$ . Folglich sind die Dreiecke gleich (§. 52.) und folglich ist:

$$AB = AC, \varepsilon = \tau \text{ und } \alpha = \lambda = \varrho.$$

IX. Es sey  $\alpha = \lambda$  und  $\beta = \gamma$ .

Alsdann sind in dem Dreiecke  $ABD$  die beiden Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  und die anliegende Seite  $AD$  so groß, als in dem Dreiecke  $ACD$  die Winkel  $\lambda$  und  $\gamma$  und die anliegende Seite  $AD$ ; folglich sind die Dreiecke gleich (§. 42.) und es ist

$$AB = AC, BD = DC \text{ und } \varepsilon = \tau.$$

Dass der zehnte Fall nicht Statt findet, nemlich dass nicht nothwendig

$$BD = DC, \alpha = \lambda = \varrho \text{ und } \varepsilon = \tau$$

ist, wenn

$$AB = AC \text{ und } \beta = \gamma,$$

vorausgesetzt wird, folgt daraus, dass  $AB = AC$  und  $\beta = \gamma$  nicht zwei von einander unabhängige Voraussetzungen sind, sondern nur eine: denn wenn  $AB = AC$  ist, so ist in dem Dreiecke  $ABC$  nothwendig  $\beta = \gamma$ , und umgekehrt (§. 44. I. und II.).

## 59.

*Anmerkung.* Wenn man die beiden äußern von drei graden Linien  $AB$ ,  $AD$  und  $AC$  (Fig 31.), welche durch einen und denselben Punkt  $A$  gehen und eine vierte  $BC$  schneiden, schräge Linien, die mittlere Mittel-Linie und die vierte Grund-Linie nennt, so lassen sich die Sätze (§. 58.) auch wie folgt ausdrücken.

I. Wenn zwei gleich lange schräge Linien  $AB$  und  $AC$  mit der Mittel-Linie gleiche Winkel machen, so ist die Mittel-Linie ein Perpendikel auf die Grund-Linie und die schrägen Linien entfernen sich von dem Perpendikel, an verschiedenen Seiten in der Grund-Linie, gleich weit und machen mit ihr gleiche Winkel. Denn wenn  $AB = AC$  und  $\varepsilon = \tau$  ist, so ist  $\alpha = \lambda = \varrho$ ,  $BD = DC$  und  $\beta = \gamma$  (§. 58. I.).

II. Wenn sich zwei gleich lange schräge Linien  $AB$  und  $AC$  von der Mittel-Linie, in der Grund-Linie gleich weit entfernen, so machen sie mit der Mittel-Linie, so wie mit der Grund-Linie, gleiche Winkel, und die Mittel-Linie ist ein Perpendikel auf die Grundlinie. Denn wenn  $AB = AC$  und  $BD = DC$  ist, so ist  $\varepsilon = \tau$ ,  $\beta = \gamma$  und  $\alpha = \lambda = \varrho$  (§. 58. II.).

III. Wenn zwei gleich lange schräge Linien ein Perpendikel auf die Grund-Linie zur Mittel-Linie haben, so machen sie mit demselben, so wie mit der Grund-Linie, gleiche Winkel, und entfernen sich in der Grund-Linie, von der Mittel-Linie gleich weit. Denn wenn  $AB = AC$  und  $\alpha = \lambda = \varrho$ , so ist  $\varepsilon = \tau$ ,  $\beta = \gamma$  und  $BD = DC$  (§. 58. III.).

IV. Wenn zwei schräge Linien mit einer Mittel-Linie gleiche Winkel machen und sich von derselben in der Grund-Linie gleich weit entfernen, so sind sie gleich lang, machen mit der Grund-Linie gleiche Winkel und die Mittel-Linie ist ein Perpendikel auf die Grund-Linie. Denn wenn  $\varepsilon = \tau$  und  $BD = DC$  ist, so ist  $AB = AC$ ,  $\beta = \gamma$  und  $\alpha = \lambda = \varrho$  (§. 58. IV.).

V. Wenn zwei schräge Linien mit einem Perpendikel auf die Grund-Linie gleiche Winkel machen, so sind sie gleich lang, entfernen sich vom Perpendikel, in der Grund-Linie gleich weit, und

machen mit der Grund-Linie gleiche Winkel. Denn wenn  $\epsilon = \tau$  und  $\alpha = \lambda = \rho$  ist, so ist  $AB = AC$ ,  $BD = CD$  und  $\beta = \gamma$  (§. 58. V.).

VI. Wenn zwei schräge Linien mit ihrer Mittel-Linie, so wie mit der Grund-Linie gleiche Winkel machen, so sind sie gleich lang, entfernen sich in der Grund-Linie, von der Mittel-Linie gleich weit und die Mittel-Linie steht auf der Grund-Linie senkrecht. Denn wenn  $\epsilon = \tau$  und  $\beta = \gamma$  ist, so ist  $AB = AC$ ,  $BD = DC$  und  $\alpha = \lambda = \rho$  (§. 58. VI.).

VII. Wenn sich zwei schräge Linien in der Grund-Linie von einem Perpendikel gleich weit entfernen, so sind sie gleich lang und machen mit dem Perpendikel, so wie mit der Grund-Linie gleiche Winkel. Denn wenn  $BD = DC$  und  $\alpha = \lambda = \rho$ , so ist  $AB = AC$ ,  $\epsilon = \tau$  und  $\beta = \gamma$  (§. 58. VII.).

VIII. Wenn sich zwei schräge Linien in der Grund-Linie von der Mittel-Linie gleich weit entfernen und mit der Grund-Linie gleiche Winkel machen, so sind sie gleich lang, machen mit der Mittel-Linie gleiche Winkel und die Mittel-Linie steht auf der Grund-Linie senkrecht. Denn wenn  $BD = DC$  und  $\beta = \gamma$ , so ist  $AB = AC$ ,  $\epsilon = \tau$  und  $\alpha = \lambda = \rho$  (§. 58. VIII.).

IX. Wenn zwei schräge Linien mit der Grund-Linie gleiche Winkel machen und die Mittel-Linie steht auf der Grund-Linie senkrecht, so sind die schrägen Linien gleich lang, entfernen sich in der Grund-Linie vom Perpendikel gleich weit und machen mit ihm gleiche Winkel. Denn wenn  $\beta = \gamma$  und  $\alpha = \lambda = \rho$ , so ist  $AB = AC$ ,  $BD = DC$  und  $\epsilon = \tau$  (§. 58. IX.).

X. Jeder Punct eines Perpendikels ist also von zwei beliebigen, von seinem Fusse, in der Grundlinie, gleich weit abstehenden Puncten, gleich weit entfernt (VII.).

## 60.

**Lehrsatz.** Das Perpendikel aus der Ecke eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite fällt ausserhalb des Dreiecks, wenn das Dreieck daselbst stumpfwinklig ist, und innerhalb, wenn es spitzwinklig ist.

**Beweis.** Fiele in einem stumpfwinkligen Dreiecke wie  $ACB$  (Fig. 32.) das Perpendikel aus  $A$  auf  $BC$  innerhalb des Dreiecks, wie  $AG$ , so wäre in dem rechtwinkligen Dreiecke  $AGC$  nothwendig der Winkel  $ACG$  kleiner als ein rechter, weil ein Dreieck nur einen rechten Winkel haben kann (§. 33. III.), gegen die Voraussetzung, da vielmehr  $ACG$  gröfser als ein rechter Winkel seyn soll.

Fiele in einem spitzwinkligen Dreieck, wie  $ABC$  (Fig. 33.) das Perpendikel aus  $A$  auf  $BC$  ausserhalb des Dreiecks, wie  $AF$ , so wäre in dem rechtwinkligen Dreiecke  $ACF$  nothwendig der Winkel  $ACF$  kleiner als ein rechter, weil ein Dreieck nur einen rechten Winkel haben kann (§. 33. III.). Gegentheils ist  $ACF$ , als Supplement zu dem spitzen Winkel  $ACB$ , gröfser als ein rechter.



Also kann in einem stumpfwinkligen Dreiecke das Perpendikel nicht innerhalb und in einem spitzwinkligen Dreiecke nicht ausserhalb fallen. Es kann aber auch nicht in die Seiten selbst fallen, weil das Dreieck nicht rechtwinklich seyn soll. Also fällt es in einem stumpfwinkligen Dreieck nothwendig ausserhalb und in einem spitzwinkligen innerhalb.

## 61.

**Lehrsatz.** Wenn eine grade Linie durch die Ecke eines Dreiecks geht und auf der gegenüber liegenden Seite senkrecht ist, so können:

- 1) die beiden Seiten des Dreiecks neben dem Perpendikel,
  - 2) die Winkel zwischen den Seiten und dem Perpendikel,
  - 3) die Abstände der Seiten vom Perpendikel in der Grundlinie,
- ungleich seyn. Ist eines von diesen Stücken grösser als das andere gleicher Art, so sind es auch die beiden übrigen, welches drei Sätze giebt, die zu beweisen sind.

I. Es sey (Fig. 32. und 33.)  $AD$  auf  $BC$  senkrecht und  $\mu > \nu$ , so ist  $BD > CD$  und  $AB > AC$ .

**Beweis.**  $\alpha$ ) Fallen  $\mu$  und  $\nu$  auf einerlei Seite des Perpendikels, wie (Fig. 32.), so schneiden  $AB$  und  $AC$  die  $BD$ , in so fern  $\mu + \varrho < 2\varrho$ , also  $\mu < \varrho$  ist, an einer und derselben Seite von  $AD$  (§. 22. I.); also ist nothwendig  $BD > CD$ , welches das Erste war.

Nun ist der äussere Neben-Winkel  $BCA$  des rechtwinkligen Dreiecks  $ACD$  grösser als  $\varrho$  (§. 33. VI.), hingegen der Winkel  $ABC$  in dem rechtwinkligen Dreieck  $ABD$  ist kleiner als  $\varrho$  (§. 33. III.). Also ist in dem Dreieck  $ABC$  der Winkel  $ACB$  grösser als der Winkel  $ABC$ , und folglich ist die dem ersten gegenüber liegende Seite  $AB$  grösser als die dem andern gegenüber liegende Seite  $AC$  (§. 46. II.), welches das Zweite war.

$\beta$ ) Fallen  $\mu$  und  $\nu$  auf verschiedene Seiten des Perpendikels wie (Fig. 33.), so sey  $EAD$  oder  $\lambda$  gleich  $\nu$ , so dass  $\lambda < \mu$  ist. Alsdann wird wie in ( $\alpha$ ) bewiesen, dass nothwendig  $BD > ED$  und  $AB > AE$  ist. Es ist aber, wenn  $\nu = \lambda$  ist,  $AE = AC$  und  $ED = DC$  (§. 59. V.). Also ist auch in diesem Falle  $BD > CD$  und  $AB > AC$ .

Es ist also in allen Fällen  $BD > CD$  und  $AB > AC$ , wenn  $\mu > \nu$  ist.

II. Es sey  $AD$  auf  $BC$  senkrecht und  $AB > AC$ , so ist  $\mu > \nu$  und  $BD > CD$ .



$\alpha$ ) Es mögen zuerst wieder  $AB$  und  $AC$  auf einerlei Seite des Perpendikels liegen, wie (Fig. 32.). Wäre nicht  $\mu > \nu$ , so wäre  $\mu = \nu$  oder  $\mu < \nu$ . Im ersten Falle aber fielen  $AB$  und  $AC$  in einander und es wäre nicht  $AB > AC$ , sondern  $AB = AC$ , gegen die Voraussetzung. Im andern Falle,  $\mu < \nu$ , wäre nach (I.  $\alpha$ .)  $AB < AC$ ; ebenfalls gegen die Voraussetzung. Also kann weder  $\mu = \nu$  noch  $\mu < \nu$ , folglich nur  $\mu > \nu$  seyn. Wenn aber  $\mu > \nu$  ist, so ist auch nach (I.  $\alpha$ .)  $BD > BC$ .

$\beta$ ) Es mögen  $AB$  und  $AC$  auf verschiedene Seiten des Perpendikels fallen, wie (Fig. 33.). Wäre nicht  $\mu > \nu$ , so wäre  $\mu = \nu$  oder  $\mu < \nu$ . Im ersten Falle aber wäre nicht  $AB > AC$ , sondern, nach (§. 69. V.),  $AB = AC$ ; gegen die Voraussetzung. Im andern Falle,  $\mu < \nu$ , wäre nach (I.  $\beta$ .)  $AB < AC$ ; ebenfalls gegen die Voraussetzung. Also kann weder  $\mu = \nu$  noch  $\mu < \nu$ , sondern nur  $\mu > \nu$  seyn. Wenn aber  $\mu > \nu$  ist, so ist auch nach (I.  $\beta$ .)  $BD > DC$ .

Es ist also in allen Fällen  $\mu > \nu$  und  $BD > DC$ , wenn  $AB > AC$  ist.

III. Es sey  $AD$  auf  $BC$  senkrecht und

$BD > CD$ , so ist  $AB > AC$  und  $\mu > \nu$ .

$\alpha$ ) Fallen  $BD$  und  $CD$  auf einerlei Seite des Perpendikels, wie (Fig. 32.), so ist offenbar  $\mu > \nu$ , wenn  $BD > CD$  ist, und folglich ist alsdann auch, nach (I.  $\alpha$ .)  $AB > AC$ .

$\beta$ ) Fallen  $BD$  und  $CD$  auf verschiedene Seiten des Perpendikels, wie (Fig. 33.), und es wäre nicht  $\mu > \nu$ , so wäre  $\mu = \nu$ , oder  $\mu < \nu$ . Im ersten Falle aber wäre nicht  $BD > CD$ , sondern, nach (§. 69. V.),  $BD = CD$ ; gegen die Voraussetzung. Im andern Falle,  $\mu < \nu$ , wäre nach (I.  $\beta$ .)  $BD < CD$ ; ebenfalls gegen die Voraussetzung. Also kann weder  $\mu = \nu$ , noch  $\mu < \nu$ , folglich nur  $\mu > \nu$  seyn. Wenn aber  $\mu > \nu$  ist, so ist, nach (I.  $\beta$ .)  $AB > AC$ .

Es ist also in allen Fällen  $AB > AC$  und  $\mu > \nu$ , wenn  $BD > CD$  ist.

62.

*Anmerkung.* Wenn man, wie in (§. 59.) von drei Linien  $AB$ ,  $AD$  und  $AC$  (Fig. 32.), welche eine vierte  $BD$  schneiden, die äusseren schräge, und die vierte, auf welcher die Mittel-Linie senkrecht steht, Grund-

Linie nennt, so lassen sich auch die Sätze (§. 61.) wie folgt ausdrücken.

I. Von zwei schrägen Linien ist diejenige die längere und entfernt sich in der Grundlinie am weitesten vom Perpendikel, welche mit ihm den grössten Winkel macht (§. 61. I.).

II. Die längste von zwei schrägen Linien macht mit dem Perpendikel den grössten Winkel und entfernt sich von ihm in der Grundlinie am meisten (§. 61. II.).

III. Von zwei schrägen Linien ist diejenige die längere, und macht mit dem Perpendikel den grössten Winkel, welche sich von ihm in der Grundlinie am meisten entfernt (§. 61. III.).

## 63.

*Zusätze.* I. Jeder Punct ausserhalb eines Perpendikels ist von zwei Puncten in der Grundlinie, die gleich weit vom Perpendikel abstehen, ungleich weit, und zwar von demjenigen Puncte am weitesten entfernt, welcher auf der andern Seite des Perpendikels liegt.

Wenn z. B.  $EF$  (Fig. 34.) perpendicular auf  $BC$ , und  $BE = EC$  ist, so ist ein beliebiger Punct  $A$  ausserhalb  $EF$  von  $B$  und  $C$  ungleich weit entfernt, und zwar ist  $AB > AC$ . Denn, wenn  $AD$  durch  $A$  auf  $BC$  senkrecht ist, so ist  $BD > DC$ , weil  $AD$  mit  $FE$  parallel ist. Also ist nach (§. 62. III.)  $AB > AC$ .

II. Es giebt nur zwei gleich lange schräge Linien aus einem Punct nach einer graden Linie, die allemal auf verschiedenen Seiten des Perpendikels liegen.

Denn alle schräge Linien auf der nemlichen Seite des Perpendikels sind von einander verschieden.

III. Es sind zwei verschiedene Dreiecke möglich, aber nur zwei, in deren einem zwei Seiten und der der kleinern gegenüber liegende Winkel so gross sind, als in dem andern.

Wenn z. B. in dem an der unbestimmten Seite  $BC$  stumpfwinkligen Dreiecke  $ABC$  (Fig. 32.)  $AC$  die kleinere der beiden bestimmten Seiten  $AB$  und  $AC$  ist, so ist mit dem nemlichen, der Seite gegenüber liegenden Winkel  $B$ , und gleich langen Seiten, ein zweites Dreieck  $ABE$  möglich; denn das Perpendikel  $AD$ , welches in diesem Falle innerhalb des Dreiecks liegt (§. 60.), fällt dann näher an die kürzere schräge Linie  $AC$  als an die längere  $AB$  (§. 62. II.), und folglich eine

zweite gleich lange schräge Linie  $AE$ , die in gleicher Entfernung vom Perpendikel liegt (§. 59. III.) nicht zwischen  $B$  und  $D$ ; mithin entsteht ein zweites Dreieck  $ABE$ , welches die nemlichen zwei Seiten  $AB = AB$ ,  $AE = AC$  und, der kleinern gegenüber, den nemlichen Winkel  $ABE$  hat. Aber auch nur ein solches zweites Dreieck ist möglich, weil nur zwei gleich lange schräge Linien  $AC$  und  $AE$  möglich sind (II.).

Ist in dem, an der unbestimmten Seite  $BC$ , in  $C$  spitzwinkligen Dreieck  $ABC$  (Fig. 33.)  $AC$  die kleinere der beiden bestimmten Seiten  $AB$  und  $AC$ , so verhält es sich eben so. Das Perpendikel  $AD$ , welches in diesem Falle innerhalb des Dreiecks liegt (§. 60.), fällt näher an die kürzere schräge Linie  $AC$  als an die längere  $AB$  (§. 62. II.), und folglich eine zweite gleich lange schräge Linie  $AE$ , die in gleicher Entfernung vom Perpendikel liegt (§. 59. III.), auf die nemliche Seite von  $BA$ . Mithin entsteht ein zweites Dreieck  $ABE$ , welches die nemlichen zwei Seiten  $AB = AB$ ,  $AE = AC$  und, der kleinern gegenüber, den nemlichen Winkel  $ABE$  hat. Aber auch nur ein solches zweites Dreieck ist möglich, weil nur zwei gleich lange schräge Linien  $AC$  und  $AE$  möglich sind (II.).

Mit den nemlichen zwei Seiten und dem nemlichen, der größern gegenüber liegenden Winkel ist kein zweites Dreieck möglich. Denn, wenn z. B. die beiden Seiten  $AB$  und  $AC$  (Fig. 32: und 33.) und der der größern  $AB$  gegenüber liegende Winkel  $ACB$  bleiben sollen, so fällt eine zweite, der Seite  $AB$  gleiche schräge Linie  $AF$  außerhalb des Dreiecks und das zweite Dreieck mit den nemlichen Seiten  $AC = AC$ , und  $AF = AB$  hat nicht mehr den bestimmten Winkel  $ACB$ , sondern den davon-verschiedenen Winkel  $ACF$ .

IV. Jede schräge Linie ist länger als das zugehörige Perpendikel.

Denn eine schräge Linie ist um so kürzer, je näher sie dem Perpendikel liegt (§. 62. III.).

V. Das Perpendikel, dergleichen es aus einem Punkte nur eines giebt (§. 26. I.), ist die kürzeste grade Linie aus einem Punkt nach einer graden Linie.

Denn jede schräge Linie ist länger (IV.).

Deshalb nennt man die Länge des Perpendikels aus einem Punkte nach einer Linie, Entfernung oder Abstand des Points von der Linie.

## Erklärung von Coordinaten.

64.

**Erklärung.** Die Parallelen MB und MC (Fig. 35.) mit graden Linien SAQ und RAP, die sich unter beliebigem Winkel schneiden, von dem Punkte M bis an diese Linien, heißen Coordinaten des Punkts M. Die eine Parallele, z. B.  $AB=CM$ , heißt Abscisse, die andere,  $AC=BM$ , Ordinate. Bleiben die Linien PR und SQ für beliebige Punkte, wie M, dieselben, so heißen sie Coordinaten-Axen; die mit der Abscisse parallele Axe SQ heißt Abscissen-Axe, die mit der Ordinate parallele Axe PR, Ordinaten-Axe. Der Durchschnits-Punct der Axen A heißt Anfangs-Punct der Coordinaten. Ist der Winkel PAQ, unter welchem sich die Axen schneiden, ein rechter, so heißen die Coordinaten rechtwinklig. Abscissen und Ordinaten sind alsdann die Abstände oder Entfernungen der Punkte, welchen sie angehören, von den senkrechten Axen.

Eine grade Linie, wie AM, von einem beliebigen Punkte M nach dem Anfangs-Puncte der Coordinaten, heißt Ordinate aus einem Punkte von M; auch Radius-vector. Der Winkel MAB heißt Ordinaten-Winkel.

65.

**Lehrsatz.** Die Lage beliebiger Punkte, z. B. der Ecken einer Figur, also die Figur selbst, ist vollständig gegeben, wenn entweder für einen gegebenen Axen-Winkel, Abscissen und Ordinaten, oder Ordinaten aus einem Punkte, nebst dem Ordinaten-Winkel für jede Ecke gegeben sind, und es sind mit den nemlichen Coordinaten der Ecken nicht verschiedene Figuren möglich.

**Beweis.** Mit den nemlichen zwei Seiten AB und BM (Fig. 35.) und dem nemlichen eingeschlossenen Axen-Winkel  $PAS=MBA$ , oder mit den nemlichen beiden Winkeln MAB und MBA und der Seite AM ist nur ein einziges Dreieck ABM möglich (§. 56. 2. u. 4.), folglich ist durch diese Seiten und Winkel der Punkt M fest bestimmt. Eben so der Punkt N durch AD, DN und den Winkel ADN oder durch AN, und die beiden Winkel ADN und NAD, also auch die Linie MN, weil nur eine grade Linie zwischen zwei Punkten möglich ist; und so jede Seite einer beliebigen Figur.

## Von der Centricität der Dreiecke.

66.

**Lehrsatz.** In jedem Dreiecke giebt es einen Punkt; der von den drei Ecken gleich weit entfernt ist, aber nur einen. Dafs heißt: Jedes Dreieck ist centrisch nach den Ecken oder hat einen Eck-Mittel-Punct (§. 30. I.), aber nur einen; oder auch: beliebige drei Punkte in der Ebene sind centrisch, haben aber nur einen Mittel-Punct.

**Beweis.** Wenn ED und GF (Fig. 36.) Perpendikel auf die Seiten BC und AC des Dreiecks ABC sind,

welche diese Seiten halbiren, so ist jeder Punct des Perpendikels  $ED$  gleich weit von  $B$  und  $C$ , und jeder Punct des Perpendikels  $GF$  gleich weit von  $A$  und  $C$  entfernt (§. 59. VII.) Die Perpendikel machen aber mit den beiden, nicht in grader Linie liegenden Linien  $BC$  und  $AC$ , gleiche Winkel, also begegnen sie sich nothwendig irgendwo (§. 28.), etwa in  $M$ . Daher ist der Punct  $M$ , weil er in beiden Perpendikeln zugleich liegt, sowohl von  $B$  und  $C$  als von  $C$  und  $A$ , folglich von  $B$  und  $C$  und  $A$  zugleich, gleich weit entfernt. Es giebt also nothwendig einen Punct  $M$ , der von den drei Ecken des Dreiecks gleich weit entfernt ist. Aber auch nur einen. Denn ein zweiter solcher Punct könnte immer nur in den Perpendikeln  $ED$  und  $GF$  liegen, weil alle Puncte aufserhalb eines Perpendikels von zwei Puncten, die gleich weit von seinem Fusse abstehen, ungleich weit entfernt sind (§. 63. I.). Er könnte also nur in dem Durchschnitte der Perpendikel  $ED$  und  $GF$  liegen, und es giebt nur einen Durchschnitt (§. 12. II.).

67.

*Zusatz.* Aus (66.) folgt, dass sich die Perpendikel  $DE$ ,  $FG$  und  $HI$  (Fig. 36.) auf die drei Seiten eines Dreiecks, wenn sie die Seiten halbiren, alle drei in einem und demselben Puncte und zwar in dem Puncte schneiden, der gleich weit von den drei Ecken des Dreiecks entfernt ist, so dass also  $AM = BM = CM$  ist.

68.

*Lehrsatz.* I. Jeder Winkel eines Dreiecks, einer beliebigen Seite gegenüber, ist halb so gross als der Winkel, der nemlichen Seite gegenüber, am Eck-Mittel-Puncte des Dreiecks.

Z. B. wenn in (Fig. 37. I. II. III.)  $AM = BM = CM$  ist, so ist  $\angle AMC = 2 \angle B$ .

*Beweis.* Es sind drei Fälle möglich. Entweder kann der Mittel-Punct in eine Seite des Dreiecks fallen, wie (Fig. 37. I.) oder innerhalb des Dreiecks, wie (Fig. 37. II.) oder aufserhalb des Dreiecks, wie (Fig. 37. III.).

In allen drei Fällen sind die Dreiecke  $AMB$ ,  $AMC$  und  $BMC$  gleichschenkelig; denn die Seiten  $AM$ ,  $BM$  und  $CM$  sind, als Halbmesser, nach der Voraussetzung gleich.

gleich. Also sind auch die den gleichen Schenkeln gegenüber liegenden Winkel gleich, nemlich  $\angle BAM = \angle ABM$ ,  $\angle BCM = \angle CBM$  (§. 44. I.).

Nun ist in Figur I.  $\angle AMC$  der äussere Winkel des Dreiecks  $ABM$ , welcher gleich  $\angle ABM + \angle BAM$  ist, (§. 33. VI.). Also ist  $\angle AMC = 2B$ . In Figur II. III. sind, wenn  $BMD$  eine grade Linie ist,  $\angle AMD$  und  $\angle CMD$  die äussern Winkel der Dreiecke  $AMB$  und  $CMB$ , welche gleich  $\angle MBA + \angle MAB$  und  $\angle MBC + \angle MCB$  sind; also ist  $\angle AMD = 2\angle ABM$  und  $\angle CMD = 2\angle CBM$ ; folglich ist in Fig. II.  $\angle AMC$ , oder  $\angle CMD + \angle AMD = 2\angle CBM + 2\angle ABM$  und in Fig. III.  $\angle AMC$ , oder  $\angle CMD - \angle AMD = 2\angle CBM - 2\angle ABM$ , und folglich in beiden  $\angle AMC = 2B$ .

In allen drei Fällen ist also der den Dreiecks-Seite  $AC$  gegenüberliegende Winkel  $B$  halb so gross, als der der nemlichen Seite gegenüber liegende Winkel  $\angle AMC$  am Eck-Mittel-Puncte  $M$ . Und eben so verhält es sich für jede andere Seite.

II. Wenn ein gleichschenkliges Dreieck die Seite zwischen den gleichen Schenkeln mit einem beliebigen andern Dreieck gemein hat, und der Winkel des gleichschenkligen Dreiecks, der gemeinschaftlichen Seite gegenüber, ist doppelt so gross, als der Winkel des andern Dreiecks der nemlichen Seite gegenüber, so ist der Scheitel des Winkels im gleichschenkligen Dreieck, der Mittel-Punct der Ecken des andern Dreiecks.

Z. B. wenn in (Fig. 37. I. II. III.)  $BM = CM$  und  $\angle BMC = 2\angle BAC$  ist, so ist  $AM = BM = CM$ .

Beweis. Man setze  $\angle BMC$  sey gleich  $2\angle BAC$ , und wenn es angeht  $A, M$ , nicht gleich  $BM = CM$ , sondern z. B. grösser als  $BM = CM$ . Alsdann sey  $A, AM$  eine grade Linie und  $AM = BM = CM$ , so ist zu Folge (I.)  $\angle BMC = 2\angle BAC$ .

Nun ist  $A, M$  nach der Voraussetzung eine längere schräge Linie als  $AM$  aus  $M$  nach der graden Linie  $A, AB$ . Also fällt  $A$  zwischen  $B$  und  $A$ , und folglich  $AC$  zwischen  $A, C$  und  $BC$ . Dieserhalb aber ist der Winkel  $\angle BAC$ , als äusserer Winkel des Dreiecks  $AA, C$ , grösser als der Winkel  $\angle BAC$ , und folglich kann  $\angle BMC$  nicht gleich  $2\angle BAC$  seyn; denn es war  $\angle BMC$  gleich  $2\angle BAC$ . Also kann  $A, M$  nicht grösser seyn, als  $BM = CM$ , wenn  $\angle BMC = 2\angle BAC$  seyn soll.

Eben so wird bewiesen, dass  $A, M$  nicht kleiner als  $BM = CM$  seyn kann, wenn  $\angle BMC = 2\angle BAC$  seyn

soll. Daher ist, für  $BMC = 2BAC$ , nothwendig  $AM = BM = CM$ .

## 69.

**Lehrsätze.** I. Der Eck-Mittel-Punct eines rechtwinkligen Dreiecks liegt in der Mitte seiner Hypothenuse; und umgekehrt: ein Dreieck, dessen Eck-Mittel-Punct in der Mitte einer seiner Seiten liegt, ist rechtwinklig.

**Beweis.** Wenn einer Seite, z. B.  $BC$  des Dreiecks  $BAC$  (Fig. 37. I.) gegenüber, der Winkel ein rechter ist, so ist, der nemlichen Seite gegenüber, der Winkel  $BMC$  am Eck-Mittel-Puncte  $M$  des Dreiecks gleich zwei rechten (§. 68. I.); folglich liegt  $M$  in der Hypothenuse  $BC$ , und zwar, weil die Halbmesser  $BM$  und  $CM$  gleich sind, in der Mitte der Hypothenuse; welches das Erste war.

Wenn der Eck-Mittel-Punct eines Dreiecks in der Mitte einer Seite liegt, so ist der Winkel am Mittel-Punct für diese Seite zwei rechte, also der Dreiecks-Winkel, der nemlichen Seite gegenüber, ein rechter (§. 68. I.); welches das Zweite war.

II. Der Eck-Mittel-Punct eines spitzwinkligen Dreiecks liegt im Innern des Dreiecks; und umgekehrt: ein Dreieck, dessen Eck-Mittel-Punct im Innern liegt, ist spitzwinklig.

**Beweis.** Sind alle Winkel des Dreiecks kleiner als rechte, so sind die Winkel am Eck-Mittel-Punct, den Seiten gegenüber, kleiner als zwei rechte (§. 68. I.), das heisst: in (Fig. 37. II.), sind die Winkel  $AMB$ ,  $BMC$  und  $CMA$  sämmtlich kleiner als zwei rechte. Folglich liegt  $M$  im Innern des Dreiecks; welches das Erste war.

Liegt der Eck-Mittelpunct eines Dreiecks im Innern, so sind alle Winkel an demselben, den Seiten gegenüber, nemlich die Winkel  $AMB$ ,  $BMC$  und  $CMA$  kleiner als zwei rechte, folglich die Winkel des Dreiecks  $C$ ,  $A$ ,  $B$ , den nemlichen Seiten gegenüber, kleiner als rechte, oder sämmtlich spitz; welches das Zweite war.

III. Der Eck-Mittel-Punct eines stumpfwinkligen Dreiecks liegt ausserhalb des Dreiecks; und umgekehrt: ein Dreieck, dessen Eck-Mittel-Punct ausserhalb liegt, hat nothwendig einen stumpfen Winkel.

**Beweis.** Ist ein Winkel des Dreiecks, z. B.  $ACB$ , der Seite  $AB$  gegenüber (Fig. 37. III.), stumpf oder grösser als ein rechter, so ist der Winkel  $AMB$  am Mittel-Punct, der nemlichen Seite gegenüber, grösser



als zwei rechte (§. 68. I.), folglich liegt alsdann der Eck-Mittel-Punct des Dreiecks ausserhalb desselben; welches das Erste war.

Liegt der Eck-Mittel-Punct eines Dreiecks ausserhalb desselben, so ist der Winkel an ihm, einer Seite gegenüber, grösser als zwei rechte, also der Winkel des Dreiecks, der nemlichen Seite gegenüber, grösser als ein rechter, oder stumpf (§. 68. I.); welches das Zweite war.

## 70.

**Lehrsätze.** I. *Alle Dreiecke, deren eine Seite und der gegenüber liegende Winkel in dem einen so gross sind als in dem andern, haben die nemlichen Mittel-Puncte- und gleiche Halbmesser der Ecken.*

**Beweis.** Es sey z. B. in den Dreiecken  $ABC$  und  $DEF$  (Fig. 38.),  $BC = EF$ , und der Winkel  $A$  gleich dem Winkel  $D$ .  $M$  sey der Eck-Mittel-Punct des Dreiecks  $ABC$ , so ist der Winkel  $BMC$  doppelt so gross, als der Winkel  $BAC$  (§. 68. I). Nun lege man  $EF$  in  $BC$ ;  $D$  falle in  $G$ ; so ist nach der Voraussetzung der Winkel  $BGC$  oder  $EDF = BAC$ . Der Eck-Mittel-Punct des Dreiecks  $BGC$  kann aber nur in dem Perpendikel  $MQ$  auf  $BC$  durch die Mitte von  $BC$  liegen, eben wie der Eck-Mittel-Punct des Dreiecks  $ABC$ , und der Winkel  $BMC$  kann nur gleich  $2BGC = 2BAC$  seyn; also kann der Eck-Mittel-Punct nur in  $M$  fallen, denn jeder Winkel an einem andern Punct des Perpendikels, wie  $BPC$ , ist grösser oder kleiner als  $BMC$ , also haben die Dreiecke  $GBC$  oder  $DEF$  und  $ABC$  gleiche Halbmesser und ihre Mittel-Puncte fallen in einander, wenn man die gleichen Seiten in einander legt.

II. *In allen Dreiecken, welche eine Seite gemein und gleiche Mittel-Puncte der Ecken haben, ist der der gemeinschaftlichen Seite gegenüber liegende Winkel gleich gross.*

**Beweis.** Denn derselbe ist die Hälfte eines und desselben Winkels am Mittel-Punct.

## 71.

**Lehrsatz.** *Die Perpendikel aus den Winkel-Spitzen eines Dreiecks auf die gegenüber liegenden Seiten schneiden sich in einem und demselben Puncte.*

Z. B. in dem Dreieck  $ABC$  (Fig. 39. I. und II.) schneiden sich die Perpendikel  $AP$ ,  $BQ$ ,  $CR$  aus  $A$ ,  $B$  und  $C$  auf die Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  in einem und demselben Punct  $M$ .

**Beweis.** Es sey  $DEF$  ein Dreieck, dessen Seiten mit den Seiten des gegebenen Dreiecks  $ABC$  parallel sind, und durch die Win-



recht, denn es ist z. B.  $MAB = \frac{1}{2} BAC$  und  $QAD = \frac{1}{2} DAC$ , also  $MAQ = 2\varrho - \frac{1}{2} BAC - \frac{1}{2} DAC = 2\varrho - \frac{1}{2} (BAC + DAC)$ . Aber  $BAC + DAC$  ist  $= 2\varrho$ , also ist  $MAQ = 2\varrho - \frac{1}{2} \cdot 2\varrho = \varrho$ . Eben so wird bewiesen, daß  $MBN = \varrho$  und  $MCP = \varrho$  ist.

III. Aus (II.) folgt auch noch, daß der Durchschnitts-Punct M (Fig. 42.) der Perpendikel PA, QB, NC aus den Scheiteln eines beliebigen Dreiecks PQN auf die gegenüber liegenden Seiten, zugleich der Mittelpunkt der Seiten eines Dreiecks ABC ist, dessen Ecken die Punkte A, B, C sind, in welchen die Perpendikel PA, QB, NC die gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks PQN schneiden.

## B. Von der Gleichheit der Vierecke und Vielecke, und dem, was davon abhängt.

### a) Von den Vierecken.

#### Gleichheit der Vierecke.

76.

**Lehrsatz. I.** Zwei Vierecke sind einander gleich, wenn alle vier Seiten und ein Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern.

**Beweis.** In (Fig. 43.) sind in dem Dreieck ABC die beiden Seiten AB und AC und der eingeschlossene Winkel A so groß, als in dem Dreieck EFG die beiden Seiten EF und EG und der eingeschlossene Winkel E; folglich sind die Dreiecke gleich (§. 40.), und folglich ist  $CB = FG$ . Nun sind in dem Dreieck BCD alle drei Seiten so groß, als in dem Dreieck FGH; also sind auch diese Dreiecke einander gleich (§. 62.), und folglich sind die Winkel DBC, HFG und DCB, HGF gleich. Legt man daher A in E und AB in EF, so fällt AC in EG, BC in FG, BD in FH, CD in GH und D in H. Folglich fallen alle Grenzen der beiden Vierecke in einander, und folglich sind die Vierecke gleich.

II. Zwei Vierecke sind einander gleich, wenn drei Seiten und die beiden von denselben eingeschlossenen Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern.

**Beweis.** Wie im vorigen Satze sind die Dreiecke ABC und EFG (Fig. 44.) gleich. Also ist  $BC = FG$  und der Winkel ABC gleich dem Winkel EFG. Da nun  $ABD = EFH$  seyn soll, so ist auch  $CBD = GFH$ . Folglich sind in dem Dreieck CBD die beiden Seiten CB und BD und der eingeschlossene Winkel CBD so groß, als in dem Dreiecke GFH die beiden Seiten GF

und  $FH$  und der eingeschlossene Winkel  $GFH$ ; folglich sind auch diese Dreiecke gleich. Legt man also  $A$  in  $B$  und  $AB$  in  $EF$ , so fällt  $AC$  in  $EG$ ,  $BC$  in  $FG$ ,  $BD$  in  $FH$ ,  $D$  in  $H$  und folglich  $CD$  in  $GH$ . Mithin fallen alle Grenzen der beiden Vierecke in einander, und folglich sind sie gleich.

III. Zwei Vierecke sind einander gleich, wenn, wie (Fig. 45.), drei Seiten, ein eingeschlossener und ein auf diesen folgender anliegender Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern, und wenn zugleich die Diagonal durch den anliegenden Winkel kleiner ist, als die Seite zwischen den beiden unbestimmten Winkeln. Ist die Diagonal größer, so können zwei verschiedene Vierecke die nemlichen Seiten und Winkel haben, aber nur zwei.

Beweis. Wie in den vorigen Sätzen sind die Dreiecke  $ABC$  und  $EFG$  gleich; also ist  $BC = FG$  und der Winkel  $ABC$  gleich dem Winkel  $EFG$ . Da nun  $ABD = EFH$  seyn soll, so ist auch  $CBD = GFH$ . Also sind in dem Dreieck  $CBD$  die beiden Seiten  $CB$  und  $CD$  und der eine anliegende Winkel  $CBD$  so groß, als in dem Dreieck  $GFH$  die beiden Seiten  $GF$ ,  $GH$  und der anliegende Winkel  $GFH$ , folglich sind die Dreiecke unter der Bedingung gleich, dass die dem gleichen Winkel gegenüber liegende Seite  $CD$  die größere, also  $CD > CB$  ist (§. 63.). Legt man also  $A$  in  $E$  und  $AB$  in  $EF$ , so fällt  $AC$  in  $EG$ ,  $BC$  in  $FG$ ,  $BD$  in  $FH$  und  $CD$  in  $GH$ . Mithin fallen alle Grenzen der beiden Vierecke in einander und sie sind gleich. Ist dagegen  $CD < CB$ , so sind mit den nemlichen Seiten  $BC$  und  $DC$  und dem nemlichen Winkel  $CBD$ , zwei verschiedene Dreiecke möglich, nemlich  $CBD$  und  $CBK$ , wenn  $CK = CD$  ist (§. 63. III.), aber auch nur zwei; also auch zwei verschiedene Vierecke  $ABCD$  und  $ABCK$ , aber nur zwei mit den nemlichen gegebenen Stücken  $AB = AB$ ,  $AC = AC$ ,  $CD = CK$ ,  $CAB = CAB$  und  $ABD = ABK$ .

IV. Zwei Vierecke sind einander gleich, wenn drei Seiten und die beiden anliegenden Winkel in dem einen so groß sind als in dem andern.

Beweis. Es sey in dem einen Viereck (Fig. 46. I. II. III.)  $AP$  und  $BQ$  auf  $CD$  und in dem andern  $EX$  und  $FY$  auf  $GH$  senkrecht, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $ACP$  und  $EGX$ , und  $BDQ$  und  $FHY$  einander gleich, weil zwei Winkel und eine Seite in dem einen so groß sind, als in dem andern (§. 41. 42.). Also ist  $AP = EX$  und  $BQ = FY$ . Nun sind  $AP$  und  $BQ$ , so wie  $EX$  und

$FY$ , weil sie mit  $CD$  und  $GH$  gleiche Winkel machen, parallel. Es sey  $AR$  mit  $PQ$  und  $EZ$  mit  $XY$  parallel, so ist  $AP = RQ$  und  $EX = ZY$  (§. 43.), und folglich, weil  $AP = EX$  war,  $RQ = ZY$ , folglich auch, weil  $BQ = FY$  war,  $BR = FZ$ . Desgleichen sind die Winkel  $ARB$ ,  $PQB$  und  $EZF$ ,  $XYF$  gleich, und folglich rechte. Also sind in dem rechtwinkligen Dreieck  $ARB$  zwei Seiten  $AB$  und  $RB$  so groß, als in dem rechtwinkligen Dreieck  $EZF$  die beiden Seiten  $EZ$  und  $ZF$ ; folglich sind diese Dreiecke gleich. Mithin ist der Winkel  $BAR$  dem Winkel  $FEZ$ , und folglich auch der Winkel  $BAC$  dem Winkel  $FEG$  und der vierte Winkel  $ABD$  des Vierecks dem Winkel  $EFH$  gleich. Folglich sind nach (II.) die Vierecke gleich.

V. *Zwei Vierecke sind gleich, wenn drei Seiten, ein anliegender und der diesem gegenüberliegende, eingeschlossene Winkel in dem einen so groß sind als in dem andern, und wenn zugleich die Diagonal durch die beiden übrigen Winkel größer ist als die Seite an dem anliegenden Winkel. Ist die Diagonal kleiner, so können zwei verschiedene Vierecke die nemlichen Seiten und Winkel haben, aber nur zwei.*

*Beweis.* Es sey z. B. in (Fig. 45.)  $AB = EF$ ,  $CA = GE$ ,  $DC = HG$  und  $CAB = GEF$ ,  $CDB = GHF$ , so sind, wie in (I. II. und III.), die Dreiecke  $ABC$  und  $EFG$  gleich. Also ist  $BC = FG$ . Folglich sind in dem Dreieck  $CBD$  die beiden Seiten  $CB$  und  $CD$  und der eine anliegende Winkel  $CDB$  so groß als in dem Dreieck  $GFH$  die beiden Seiten  $GF$  und  $GH$  und der anliegende Winkel  $GHF$ ; folglich sind die Dreiecke unter der Bedingung gleich, daß die dem gleichen Winkel gegenüberliegende Seite  $CB$  die größere, also  $CB > CD$  ist (§. 53.). Legt man also  $A$  in  $E$  und  $AB$  in  $EF$ , so fällt  $AC$  in  $EG$ ,  $BC$  in  $FG$ ,  $BD$  in  $FH$  und  $CD$  in  $GH$ . Mithin fallen alle Grenzen der beiden Vierecke in einander und sie sind gleich. Ist dagegen  $CB < CD$ , so sind mit den nemlichen Seiten  $BC$  und  $DC$  und dem nemlichen Winkel  $CDB$  zwei verschiedene Dreiecke möglich, nemlich  $CBD$  und  $CKD$ , wenn  $CB = CK$  ist (§. 63. III.), aber auch nur zwei, also auch zwei verschiedene Vierecke  $ABCD$  und  $PKDC$ , aber nur zwei mit den nemlichen gegebenen Stücken  $AB = PK$ ,  $AC = PC$ ,  $CD = CD$ ,  $CAB = CPK$  und  $CDB = CDK$ .

VI. *Zwei Vierecke sind eiander gleich, wenn zwei zusammenstossende Seiten und alle vier Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern.*

**Beweis.** In dem Dreieck  $ABC$  (Fig. 47.) sind die beiden Seiten  $AB$  und  $AC$  und der eingeschlossene Winkel  $CAB$  so groß, als in dem Dreieck  $EFG$  die beiden Seiten  $EF$  und  $EG$  und der eingeschlossene Winkel  $GEF$ ; also sind diese Dreiecke gleich (§. 40.), und folglich ist  $BC = FG$ . Desgleichen sind die Winkel  $ABC$ ,  $EFG$  und  $ACB$ ,  $EGF$ , folglich auch die Winkel  $CBD$ ,  $GFH$  und  $BCD$ ,  $FGH$  gleich. Also sind in dem Dreieck  $BCD$  die Seite  $BC$  und die beiden daran liegenden Winkel  $CBD$  und  $BCD$  so groß, als in dem Dreieck  $FGH$  die Seite  $FG$  und die beiden daran liegenden Winkel  $GFH$  und  $FGH$ ; folglich sind auch diese beiden Dreiecke gleich (§. 41.).

Legt man daher  $A$  in  $E$  und  $AB$  in  $EF$ , so fällt  $B$  in  $F$ ,  $AC$  in  $EG$ ,  $C$  in  $G$ ,  $BC$  in  $FG$ ,  $BD$  in  $FH$ ,  $CD$  in  $GH$  und  $D$  in  $H$ . Also fallen alle Grenzen der beiden Vierecke in einander und die Vierecke sind gleich.

**VII.** Zwei Vierecke sind gleich, wenn zwei gegenüber liegende Seiten und alle vier Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern, die beiden übrigen Seiten aber nicht parallel sind. Sind die nicht gegebenen Seiten parallel, so sind mit den nemlichen gegebenen Seiten und Winkeln unzählige verschiedene Vierecke möglich.

**Beweis.** Es sey in (Fig. 48. I. II. III.)  $AB$  nicht mit  $CD$  parallel, so wird erst, wie in (IV.), bewiesen, dass die rechtwinkligen Dreiecke  $ACP$ ,  $EGX$  und  $BDQ$ ,  $FHY$  einander gleich, desgleichen, dass, wenn  $AR$  mit  $PQ$  und  $EZ$  mit  $XY$  parallel ist,  $BR = FZ$  ist. Nun sind, wegen der Gleichheit der Dreiecke  $BDQ$  und  $FHY$ , die Winkel  $QBD$  und  $YFH$ , also weil  $B = F$  seyn soll, auch die Winkel  $ABR$  und  $EFZ$  gleich. Also sind in dem rechtwinkligen Dreieck  $ABR$  die Winkel und die eine Seite  $BR$  so groß, als in dem Dreieck  $EFZ$  die Winkel und die Seite  $FZ$ ; also sind die Dreiecke gleich (§. 41. 42.), und folglich ist  $AB = EF$ . Also sind nunmehr in dem Viereck  $ABCD$  die drei Seiten  $CA$ ,  $AB$ ,  $BD$  und die beiden eingeschlossenen Winkel so groß, als in dem Viereck  $EFGH$  die drei Seiten  $GE$ ,  $EF$ ,  $FH$  mit den eingeschlossenen Winkeln. Also sind nach (II.) die beiden Vierecke gleich.

Der Beweis findet nicht Statt, wenn  $AB$  mit  $CD$  parallel ist; denn alsdann ist  $AP = RQ$ , also  $BR = 0$ . Das rechtwinklige Dreieck  $ABR$  findet also alsdann nicht Statt, sondern ist eine bloße Linie  $AR$ , aus welcher sich von der Länge der Seiten  $AB$  und  $EF$  nicht urtheilen lässt. Die Länge der Seiten  $AB$  und  $CD$  ist also alsdann willkürlich, und es sind mit den nem-

lichen Seiten und Winkeln unzählige verschiedene Vierecke möglich.

## 77.

*Anmerkung.* Zusammengenommen also sind zwei Vierecke gleich, wenn folgende Stücke in dem einen so groß sind, als in dem andern:

- 1) alle vier Seiten und ein Winkel (§. 76. I.),
- 2) drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel (§. 76. II.),
- 3) drei Seiten, ein eingeschlossener und ein auf diesen folgender anliegender Winkel; bedingungsweise (§. 76. III.),
- 4) drei Seiten und die beiden anliegenden Winkel (§. 76. IV.),
- 5) drei Seiten, ein anliegender und der diesem gegenüberliegende, eingeschlossene Winkel (§. 76. V.),
- 6) zwei zusammenstossende Seiten und alle Winkel (§. 76. VI.),
- 7) zwei gegenüberliegende Seiten und alle Winkel; bedingungsweise (§. 76. VII.),

Mehr Fälle mit wenigstens zwei Seiten sind, wie leicht zu sehen, nicht möglich.

Wenn aber bloß eine Seite nebst allen Winkeln in einem Viereck so groß ist, als in einem andern, so sind die Vierecke nicht nothwendig gleich, sondern es sind unzählige Vierecke mit der nemlichen einen Seite und den nemlichen vier Winkeln möglich. Wenn z. B. *EF*, *GH* etc. (Fig. 49.) beliebige Parallelen mit *BD* sind, so haben alle die verschiedenen Vierecke *ABCD*, *AECE*, *AGCH* etc. die nemliche eine Seite *AC* und die nemlichen vier Winkel, und dergleichen Vierecke sind so viele als Parallelen mit *BD*, also unzählige möglich.

Es sind also überhaupt nicht mehr als die obigen sieben Fälle gleicher Vierecke möglich, und die gleichen Stücke sind die bestimmenden Stücke für das Viereck. Sie sind diejenigen Stücke, die nicht von einander abhängen, sondern willkührlich sind: wohl aber hängen von ihnen die übrigen Stücke ab.

Es ist zu bemerken, daß alle sieben Sätze auch gelten, wenn die Vierecke einspringende und überspringende Winkel haben: bloß in dem vierten Falle giebt es noch ein Viereck mit überspringenden Winkeln, welches, mit den nemlichen Bestimmungsstücken, einem Vierecke mit nicht überspringenden Win-

kein gleich seyn kann, und umgekehrt. Wir übergehen hier, um den Raum zu schonen, die Ausdehnung des Satzes auf andere als *convexe* Vierecke.

## 78.

**Erklärung.** Wenn zwei gegenüber liegende Seiten eines Vierecks parallel sind, so heisst das Viereck Trapez; sind auch die andern beiden gegenüberliegenden Seiten parallel, Parallelogramm oder Rhombus; sind die zusammenstossenden Seiten eines Parallelogramms gleich, Rhomboid oder Raute; sind die vier Winkel eines Parallelogramms gleich, also rechte, (weil die Summe der vier innern Winkel eines Vierecks gleich  $(4 - 2) \cdot 20 = 40$  ist (§. 37.)) Rechteck, und sind die zusammenstossenden Seiten eines Rechtecks gleich, Quadrat.

## 79.

**Lehrsatz.** In einem Trapez sind die Summen je zweier Winkel an nicht parallelen Seiten gleich der Summe zweier rechten.

**Beweis.** Diese Winkel  $BAC$  und  $ACD$  (Fig. 50. I. und II.) oder  $ABD$  und  $CDB$  sind die innern Gegenwinkel an den Parallelen  $AB$  und  $CD$ . Also ist ihre Summe gleich zwei rechten (§. 21.).

## 80.

**Lehrsatz. I.** Zwei Trapeze sind gleich, wenn alle vier Seiten in dem einen so gross sind, als in dem andern.

**Beweis.** Wenn  $AC$ ,  $BD$  und  $EG$ ,  $FH$  (Fig. 50. I. II.) die nicht parallelen Seiten zweier Trapeze  $ABCD$  und  $EFGH$  sind, welche die nemlichen vier Seiten haben, so fallen  $AP$  und  $EQ$ , wenn  $AP$  mit  $BD$  und  $EQ$  mit  $FH$  parallel sind, nicht in  $AC$  und  $EG$ , weil  $BD$  nicht mit  $AC$ , und  $FH$  nicht mit  $EG$  parallel seyn sollen. Die graden Linien  $AP$  und  $EQ$  schneiden aber die Seiten  $CD$  und  $GH$  nothwendig, weil die Summen der Winkel  $BAC$ ,  $DCA$  und  $FEG$ ,  $HGE$  gleich der Summe zweier rechten (§. 79.), also die Summen der Winkel  $CAP$ ,  $PCA$  und  $GEQ$ ,  $QGE$  kleiner als die Summe zweier rechten sind (§. 22.). Also sind  $ACP$  und  $EQO$  Dreiecke. Die drei Seiten dieser Dreiecke sind gleich; denn es ist nach der Voraussetzung  $AC = EG$ , ferner, weil Parallelen von einander gleich lange Stücke abschneiden (§. 43.),  $AP = BD$ ,  $EQ = FH$ , also, weil nach der Voraussetzung

$BD = FH$  ist,  $AP = EQ$ , desgleichen  $AB = PD$ ,  $EF = QH$ , also, weil nach der Voraussetzung  $AB = EF$  ist,  $PD = QH$ , folglich auch, weil nach der Voraussetzung  $CD = GH$  ist,  $CP = GQ$ . Dieserhalb sind die Dreiecke  $ACP$  und  $EGQ$  gleich (§. 52.). Legt man also  $C$  in  $G$ , und  $QD$  in  $GH$ , so fällt  $D$  in  $H$ , weil  $CD = GH$ , und  $E$  in  $Q$ , weil  $CP = GQ$ , desgleichen  $A$  in  $E$ , weil die Dreiecke  $ACP$  und  $EGQ$  gleich sind; also auch die Parallele  $AB$  in die Parallele  $EF$ , und  $B$  in  $F$ , weil  $AB = EF$  seyn soll. Also auch  $BD$  in  $FH$ . Folglich fallen alle Grenzen der beiden Trapeze in einander, und die Trapeze sind gleich.

II. Zwei Trapeze sind gleich, wenn die beiden parallelen und eine nicht parallele Seite, nebst einem der vier Winkel, in dem einen so groß sind, als in dem andern.

Beweis. Es sey in (Fig. 50. I. und II.)  $AB = EF$ ,  $CD = GH$  und  $AC = EG$ .

Ist nun der eine gleiche Winkel einer der eingeschlossenen, z. B.  $A = E$  oder  $C = G$ , so ist auch der andere eingeschlossene Winkel in dem einen Trapeze so groß, als in dem andern, weil die Summe der beiden eingeschlossenen Winkel gleich der Summe zweier rechten ist (§. 79.). Also sind die Vierecke nach (§. 76. II.) gleich.

Ist der eine gleiche Winkel einer der anliegenden, z. B.  $B = F$  oder  $D = H$ , so ist wiederum der andere anliegende Winkel in dem einen Trapez so groß als in dem andern, weil die Summe der beiden anliegenden Winkel gleich der Summe zweier rechten ist (§. 79.). Also sind die Vierecke, nach (§. 76. IV.), ebenfalls gleich.

III. Zwei Trapeze sind gleich, wenn die beiden nichtparallelen und eine parallele Seite, nebst einem der vier Winkel, in dem einen so groß sind, als in dem andern; und zugleich, die Diagonal an zwei gegebenen Seiten größer ist, als die dritte gegebene Seite. Ist die Diagonal kleiner, so können zwei verschiedene Trapeze die nämlichen Seiten und Winkel haben, aber nur zwei.

Beweis. Es sey in (Fig. 60. I und II.)  $AB = EF$ ,  $AC = EG$  und  $BD = FH$ . Es ist gleich, welcher von den vier Winkeln in der einen Figur so groß ist, als in der andern, weil mit jedem zugleich der Winkel an der andern Parallele ebenfalls gleich ist, indem je zwei an den Parallelen liegende Winkel zusammen zwei rechte sind (§. 79.). Gesetzt, es sey  $A = E$ , so ist zugleich  $C = G$ , und umgekehrt. Ist  $B = F$ , so ist zugleich  $D = H$  und umgekehrt. Immer sind, nächst den drei Sei-



ten, ein eingeschlossener und ein anliegender Winkel in dem einen Trapez so groß, als in dem andern. Also folgt der Satz aus (§. 76. III.).

IV. Zwei Trapeze sind gleich, wenn zwei Seiten, die nicht-parallel sind, und zwei Winkel, deren Summe nicht zwei rechte ist, in dem einen so groß sind, als in dem andern.

*Beweis.* Wenn nämlich zwei Winkel, deren Summe nicht zwei rechte ist, in dem einen Trapez so groß sind, als in dem andern, so sind es auch die beiden übrigen Winkel; denn sie sind die Supplemente der ersten (§. 79.). Z. B. wenn in (Fig. 50. I u. II.)  $A = E$ ,  $D = H$  ist, so ist auch  $B = F$ ,  $C = G$ , weil  $A + C = E + G = 2\text{r}$  und  $B + D = F + H = 2\text{r}$  ist (§. 79.). Also sind immer, nächst den beiden Seiten, alle vier Winkel in dem einen Trapez so groß, als in dem andern, folglich sind die Vierecke, nach (§. 76. V und VI.) gleich.

## 81.

*Anmerkung.* Zusammengenommen also sind zwei Trapeze einander gleich, wenn folgende Stücke in dem einen so groß sind, als in dem andern:

- 1) Alle vier Seiten (§. 80. I.).
- 2) Zwei parallele und eine nicht-parallele Seite, nebst einem Winkel (§. 80. II.).
- 3) Zwei nicht-parallele und eine parallele Seite, nebst einem Winkel; bedingungsweise (§. 80. III.).
- 4) Zwei Seiten, die nicht-parallel sind, und zwei Winkel, deren Summe nicht zwei rechten gleich ist (§. 80. IV.).

Mehr Fälle mit wenigstens zwei Seiten sind, wie leicht zu sehen, nicht möglich. Wenn bloß eine Seite, nebst allen Winkeln, in einem Trapez so groß ist, als in einem andern, so sind die Trapeze nicht notwendig gleich, eben so wenig, wie andere Vierecke; aus dem Grunde (§. 77.).

Es sind also überhaupt nicht mehr, als die obigen vier Fälle der Gleichheit von Trapezen möglich, und die gleichen Stücke sind die Bestimmungsstücke von Trapezen. Man kann also die obigen Sätze auch wie folgt ausdrücken.

- 1) Mit den nämlichen vier Seiten ist nur ein Trapez möglich.
- 2) Mit den nämlichen zwei parallelen und einer nicht-parallelen Seite, nebst einem Winkel, ist nur ein Trapez möglich.



3) Mit den nemlichen zwei nicht-parallel en und einer parallelen Seite ist nur ein Trapez möglich, wenn die Diagonal an zwei gegebenen Seiten grösser ist, als die dritte gegebene Seite. Ist die Diagonal kleiner, so sind nur zwei Trapeze möglich.

4) Mit den nemlichen zwei Seiten, die nicht-parallel en ausgenommen, und zwei Winkeln, deren Summe nicht zwei rechten gleich ist, ist nur ein Trapez möglich.

## 82.

**Lehrsatz. I.** In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten gleich, und Vierecke, deren gegenüberliegende Seiten gleich sind, sind Parallelogramme.

**Beweis.** Die gegenüberliegenden Seiten von Parallelogrammen sind parallel (§. 78.), und Parallelen schneiden von einander gleich lange Stücke ab (§. 42.), die abgeschnittenen Stücke aber sind die Seiten des Parallelogramms; also sind die gegenüberliegenden Seiten von Parallelogrammen gleich lang; welches das Erste war.

Sodann sind, wenn (Fig. 51.), umgekehrt,  $AB = CD$  und  $AC = BD$  vorausgesetzt wird, in dem Dreiecke  $ABC$  alle drei Seiten so groß, als in dem Dreiecke  $DBC$ , und folglich sind die Dreiecke gleich (§. 52.); mithin sind auch die Winkel  $A$  und  $D$  des Vierecks gleich. Eben so sind die Dreiecke  $ABD$  und  $ACD$ , und folglich die Winkel des Vierecks  $B$  und  $C$  gleich; also ist  $A + B = C + D$  und  $A + C = B + D$ , folglich, weil  $A + B + C + D = 4\varrho$  ist,  $A + B = C + D = 2\varrho$  und  $A + C = B + D = 2\varrho$ . Folglich sind  $AB$ ,  $CD$  und  $AC$ ,  $BD$  parallel und das Viereck ist ein Parallelogramm; welches das Zweite war.

**II.** In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel gleich, und ein Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Winkel gleich sind, ist ein Parallelogramm.

**Beweis.** Z. B. die Summe der innern Gegenwinkel  $ACD$  und  $BDC$  zwischen den Parallelen  $AC$  und  $BD$  (Fig. 51.) und der Grundlinie  $CD$  ist der Summe von zwei rechten gleich (Fig. 21. I.). Eben so die Summe der innern Gegenwinkel  $DCA$  und  $CAB$ ; also ist  $ACD + BDC = ACD + CAB$ , folglich  $BDC = CAB$ . Aus gleichem Grunde sind die gegenüberliegenden Winkel  $ACD$  und  $ABD$  gleich; welches das Erste war.

Wenn umgekehrt  $A = D$  und  $B = C$  vorausgesetzt wird, so ist  $A + B = C + D$  und  $A + C = B + D$ , woraus wie in (I.) folgt, daß  $AB$  mit  $CD$  und  $AC$  mit  $BD$  parallel, also das Viereck ein Parallelogramm ist; welches das Zweite war.

III. In einem Parallelogramme halbiren einander die Diagonalen, und Vierecke, deren Diagonalen sich halbiren, sind Parallelogramme.

Beweis. Da in einem Parallelogramm die gegenüber liegenden Seiten gleich sind (I.), so sind in den Dreiecken  $AEB$  und  $CED$ , die Seiten  $AB$  und  $CD$ , desgleichen die anliegenden Winkel, nemlich an den Parallelen  $AB$  und  $CD$  die Wechselwinkel  $BAE$ ,  $EDC$  und  $ABE$ ,  $ECD$  gleich. Also sind die Dreiecke  $AEB$  und  $CED$  gleich (§. 41.). Also ist  $AE = ED$  und  $CE = EB$ . Folglich halbiren sich die Diagonalen; welches das Erste war.

Wird  $AE = ED$  und  $CE = EB$  vorausgesetzt, so sind z. B. in dem Dreiecke  $AEB$  die beiden Seiten  $AE$  und  $EB$ , nebst dem Winkel  $AEB$ , so groß, als in dem Dreiecke  $CED$  die beiden Seiten  $ED$  und  $CE$ , nebst dem Scheitelwinkel  $CED$ ; also sind die Dreiecke gleich (§. 40.), und es ist  $AB = CD$ . Eben so wird aus den Dreiecken  $AEC$  und  $BED$  bewiesen, daß  $AC = BD$  ist; also ist das Viereck  $ABCD$  ein Parallelogramm (I.); welches das Zweite war.

IV. Hat ein Parallelogramm vier gleiche Seiten, und ist folglich ein Rhomboid, so halbiren sich nicht allein die Diagonalen, sondern schneiden sich unter rechten Winkeln; und umgekehrt: Vierecke, deren Diagonalen sich halbiren, und zugleich unter rechten Winkeln schneiden, sind Rhomboiden.

Beweis. Denn wenn noch  $CD = DB$  ist (Fig. 51.), so sind in dem Dreieck  $CED$  alle drei Seiten so groß, als in dem Dreieck  $BED$ , weil zu Folge (III.) für jedes Parallelogramm  $CE = EB$ ,  $ED$  aber sich selbst gleich ist. Also sind die Dreiecke  $CED$  und  $BED$  gleich (§. 52.) und folglich sind die Neben-Winkel  $CED$  und  $BED$  rechte: eben so die Winkel  $CEA$  und  $BEA$ ; welches das Erste war.

Wenn  $CE = EB$ ,  $AE = DE$ , und daß um  $E$  rechte Winkel liegen sollen, vorausgesetzt wird, so sind in dem Dreieck  $CED$  die beiden Seiten  $CE$  und  $DE$ , nebst dem eingeschlossenen Winkel  $CED$ , so groß, als in dem Dreiecke  $BED$  die beiden Seiten  $BE$  und  $ED$ , nebst dem

eingeschlossenen Winkel  $BED$ ; folglich sind die Dreiecke gleich (§. 40.) und folglich ist  $CD = BD$ . Eben so wird an den Dreiecken  $CED$  und  $AEC$  bewiesen, daß  $DC = AC$  und an den Dreiecken  $CEA$  und  $BEA$ , daß  $AC = BA$  ist. Also ist  $AB = BD = DC = CA$ , und das Viereck hat vier gleiche Seiten und ist folglich ein Parallelogramm mit gleichen Seiten, oder ein Rhomboid; welches das Zweite war.

83.

**Lehrsatz.** Parallelogramme sind gleich, wenn zwei zusammenstossende Seiten und irgend ein Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern.

**Beweis.** Die gegenüber liegenden Seiten eines Parallelogramms sind einander gleich (§. 82, I.), folglich sind alle vier Seiten in dem einem Parallelogramme so groß, als in dem andern, nebst einem Winkel. Also sind die Parallelogramme gleich (§. 76, I.).

84.

**Zusätze.** I. Rechtecke sind gleich, wenn zwei zusammenstossende Seiten in dem einen so groß sind, als in dem andern.

Denn Rechtecke sind Parallelogramme und von den Winkeln wird vorausgesetzt, daß sie rechte sind.

II. Quadrate sind gleich, wenn eine Seite in dem einen so groß ist, als in dem andern.

Denn Quadrate sind Rechtecke, von deren Seiten vorausgesetzt wird, daß sie gleich, und von den Winkeln, daß sie rechte sind.

85.

**Anmerkung.** Alles, was von Parallelogrammen gilt, gilt auch von Rhomboïden, Rechtecken und Quadraten, und was von Rhomboïden gilt, gilt auch von Quadraten, aber nicht umgekehrt; denn alle Rhomboïden, Rechtecke und Quadrate, sind Parallelogramme, und alle Quadrate Rhomboïden, aber nicht umgekehrt.

Von der Centricität der Vierecke.

86.

**Lehrsatz.** I. In Vierecken, deren Ecken centrisch sind, ist die Summe gegenüberliegender Winkel, gleich der Summe von zwei rechten.

Z.

Z. B. wenn in dem Viereck  $ABCD$  (Fig. 52.)  $AM = BM = CM = DM$  ist, so ist  $A + C = 2\varrho$  und  $B + D = 2\varrho$ .

*Erster Beweis.* Die vier Dreiecke  $AMB$ ,  $BMC$ ,  $CMD$  und  $DMA$  sind um  $M$  gleichschenkelig, folglich sind die den gleichen Schenkeln gegenüber liegenden Winkel gleich (§. 44. I.). Also ist

$$\alpha = b, a = \delta, \gamma = d, c = \beta$$

und folglich auch

$$\alpha + a + \gamma + c = \beta + b + \delta + d$$

und weil  $\alpha + a = A$ ,  $\beta + b = B$ ,  $\gamma + c = C$ ,  $\delta + d = D$  ist,

$$A + C = B + D.$$

Nun ist  $A + C + B + D = 4\varrho$ , also ist  $A + C + A + C = 4\varrho$ , oder  $2(A + C) = 4\varrho$ , oder  $A + C = 2\varrho$ . Eben so  $B + D = 2\varrho$ .

*Zweiter Beweis.* Da die Ecken  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  einen und denselben Mittel-Punct  $M$  haben sollen, so ist  $M$  auch der Mittel-Punct je dreier Ecken, also der gemeinschaftliche Mittel-Punct der Ecken der vier Dreiecke  $ABC$ ,  $ADC$ ,  $DAB$ ,  $DCB$ . Nun ist aber der Winkel eines Dreiecks, einer beliebigen Seite gegenüber, halb so groß, als der Winkel, der nemlichen Seite gegenüber, am Eck-Mittel-Puncte (§. 68. I.); also ist der der Seite  $AC$  des Dreiecks  $ADC$  gegenüber liegende Winkel  $ADC$  halb so groß, als der Winkel  $AMC$  nach  $D$  zu, desgleichen der Winkel  $ABC$ , im Dreiecke  $ABC$ , halb so groß, als der Winkel  $AMC$  nach  $B$  zu. Die in dem Viereck gegenüber liegenden Winkel  $ADC$  und  $ABC$  sind also zusammen halb so groß, als die Winkel um  $M$ , folglich halb so groß als vier rechte, also gleich zwei rechten. Eben so wird bewiesen, dass die Winkel  $DAB$  und  $BCD$  zusammen gleich zwei rechten sind; wie oben.

II. Wenn die Summe zweier gegenüber liegender Winkel eines Vierecks gleich der Summe von zwei rechten ist, so ist das Viereck centrisch nach den Ecken.

Z. B. wenn in (Fig. 52.)  $A + C = 2\varrho$ , oder  $B + D = 2\varrho$ , so ist  $AM = BM = CM = DM$ .

*Erster Beweis.* Es sey  $M$  der Mittel-Punct der Ecken des Dreiecks  $ADC$ , so ist  $AM = DM = CM$ , folglich ist in den gleichschenkligen Dreiecken  $AMD$  und  $CMD$ ,

$$a = \delta \text{ und } d = \gamma \text{ (§. 44. I.).}$$

Nun wird vorausgesetzt  $A + C = 2\varrho$ , oder weil  $A + C + B + D = 4\varrho$  ist,  $A + C = B + D$ , das heisst,

$$a + \alpha + c + \gamma = b + \beta + d + \delta,$$

also muß, weil  $a = \delta$ ,  $d' = \gamma$  war,

$$\delta + a + c + d' = b + \beta + d + \delta, \text{ oder} \\ a + c = b + \beta$$

seyn. Gesetzt nun  $BM$  wäre kleiner als  $AM$ , also auch kleiner als  $CM$ , weil  $CM = AM$  ist, so wäre  $b > a$  und  $\beta > c$  (§. 46. I.), also wäre nicht  $b + \beta = a + c$ , sondern  $b + \beta > a + c$ . Es kann also  $BM$  nicht kleiner als  $AM$  oder  $CM$  seyn. Gesetzt,  $BM$  wäre größer als  $AM$ , so wäre  $b < a$  und  $\beta < c$  (§. 46. I.), also wäre ebenfalls nicht  $b + \beta = a + c$ , sondern  $b + \beta < a + c$ . Es kann also  $BM$  auch nicht größer als  $AM$  oder  $CM$  seyn; folglich ist  $BM$  nothwendig gleich  $AM$  und  $CM$ , und folglich ist  $AM = BM = CM = DM$ .

**Zweiter Beweis.** Der Mittel-Punct des Dreiecks  $ADC$  sey wie vorhin  $M$ , so ist der der Seite  $AC$  gegenüber liegende Winkel  $ADC$  halb so groß, als der Winkel  $AMC$  am Mittel-Puncte, nach  $D$  zu, der nemlichen Seite gegenüber (§. 68. I.), oder  $AMC = 2D$ . Nun ist der Winkel  $AMC$  nach  $B$  zu gleich dem, was den vorigen zu vier rechten ergänzt, also ist  $AMC$ , nach  $B$  zu, gleich  $4\rho - 2D$ . Aber nach der Voraussetzung ist  $B + D = 2\rho$ , also  $B = 2\rho - D$ , folglich ist  $B$  halb so groß, als der Winkel  $AMC$  zwischen den gleichen Schenkeln  $AM$  und  $CM$ , der nemlichen Seite  $AC$  gegenüber, welcher  $B$  gegenüber liegt. Also ist  $B$  auch der Mittel-Punct des Dreiecks  $ABC$  (§. 68. II.); und folglich ist  $AM = BM = CM = DM$ .

## 87.

**Lehrsatz.** In jedem nach den Ecken centrischen Vierecke sind die Winkel zwischen der einen Diagonal und den anliegenden Seiten den Winkeln zwischen der andern Diagonal und den den vorigen gegenüber liegenden Seiten gleich.

Z. B. wenn das Viereck  $ABCD$  (Fig. 55.) nach den Ecken centrisch ist, so ist

$$\alpha = a, \beta = b, \gamma = c, \delta = d.$$

**Beweis.** Die Dreiecke  $ABC$  und  $ABD$  z. B. haben einenlei Mittel-Punct, weil alle vier Puncte  $A, B, C, D$  einerlei Mittel-Punct haben sollen. Also ist in dem Dreieck  $ABC$  der Winkel  $C$ , oder  $\alpha$  dem Winkel  $D$ , oder  $a$  über der nemlichen Seite  $AB$  gleich (§. 70. II.). Eben so wird die Gleichheit der übrigen Winkel bewiesen.

## 88.

**Lehrsatz. I.** Wenn die Seiten eines Vierecks gleich weit von einem und demselben Puncte entfernt sind, also das Viereck centrisch nach den Seiten ist, so

sind die Summen gegenüber liegender Seiten einander gleich.

Z. B. wenn in (Fig. 54.) die Perpendikel  $ME$ ,  $MF$ ,  $MG$ ,  $MH$  auf die Seiten des Vierecks  $ABCD$  einander gleich sind, so ist  $AB + CD = BC + DA$ .

*Beweis.* Da bei  $E$ ,  $F$ ,  $G$  und  $H$  rechte Winkel sind, so sind z. B. die rechtwinkligen Dreiecke  $BME$  und  $BMF$ , mit den zwei gleichen Seiten  $BM = BM$ ,  $EM = FM$  gleich (§. 54. II.), folglich ist  $BE = BF$ . Eben so ist  $CF = CG$ ,  $DG = DH$  und  $AH = AE$ .

Also ist zusammen genommen

$BE + AE + CG + DG = BF + CF + AH + DH$ ,  
oder, weil  $BE + AE = AB$ ,  $CG + DG = DC$ ,  $BF + CF = BC$  und  $AH + DH = DA$  ist,  
 $AB + DC = BC + DA$ .

II. Wenn die Summen der gegenüber liegenden Seiten eines Vierecks einander gleich sind, so ist das Viereck centrisch nach den Seiten.

Z. B. wenn in (Fig. 54.)  $AB + DC = BC + DA$  ist, so sind die Perpendikel  $ME$ ,  $MF$ ,  $MG$ ,  $MH$  auf die Seiten des Vierecks, einander gleich.

*Beweis.* Die grade Linie  $BM$  halbire den Winkel  $B$  und die grade Linie  $CM$  den Winkel  $C$ , so schneiden sich  $BM$  und  $CM$  nothwendig, an derjenigen Seite von  $BC$ , an welcher  $AB$  und  $DC$  liegen, z. B. in  $M$ , weil  $ABC + DCB$  kleiner, als vier rechte ist, und folglich die Hälften  $MBC$  und  $MCB$  kleiner sind, als zwei rechte; (§. 22. I.). Wenn nun  $ME$ ,  $MF$  und  $MG$  Perpendikel aus  $M$  auf  $AB$ ,  $BC$  und  $CD$  sind, so ist  $ME = MF = MG$ , weil jeder Punkt einer graden Linie, die einen Winkel halbirt, von den Schenkeln des Winkels gleich weit entfernt ist (§. 73.); desgleichen ist  $BE = BF$  und  $CF = CG$ , weil die rechtwinkligen Dreiecke  $EMB$ ,  $FMB$  und  $FMC$ ,  $GMC$ , mit zwei gleichen Seiten, gleich sind, (§. 54. II.). Also ist  $BF + CF$  oder  $BC = EB + GC$ .

Es sey ferner  $MH$  auf die vierte Seite  $AD$  senkrecht, und, wenn es möglich,  $MH$  nicht gleich  $ME = MF = MG$ , sondern größer oder kleiner. Wäre  $MH$  größer, als  $ME$ , so wäre in dem rechtwinkligen Dreieck  $AMH$  die Hypothenuse eben so groß, als in dem rechtwinkligen Dreieck  $AME$ , die eine Cathete  $MH$  aber wäre größer, als die Cathete  $ME$ : dann aber wäre die andere Cathete  $HA$  nothwendig kleiner als  $AE$  (§. 48. I.). Aus demselben Grunde wäre in den beiden rechtwinkligen

Dreiecken  $DMH$  und  $DMG$ ,  $HD$  kleiner als  $DG$ ; also wäre  $HA + HD$  oder  $AD$  kleiner als  $AE + DG$ , und folglich, weil vorhin  $BC = EB + GC$  war,  $AD + BC$  kleiner als  $AE + DG + EB + GC$ , oder kleiner als  $AB + DC$ , welches der Voraussetzung entgegen ist. Also kann nicht  $MH$  größer seyn als  $ME = MF = MG$ . Ebenso wird bewiesen, daß  $MH$  nicht kleiner seyn kann, weil sonst  $AD + BC$ , der Voraussetzung entgegen, größer als  $AB + DC$  seyn müßte. Also kann nur  $MH = ME = MF = MG$  seyn.

## 89.

**Lehrsatz.** Die vier Punkte innerhalb und die vier Punkte außerhalb eines beliebigen Vierecks, welche von je drei Seiten desselben, verlängert wenn es nöthig ist, gleich weit entfernt sind, liegen, jede vier, von einem und demselben Punkte gleich weit entfernt, oder sind contrisch. Wenn man also dieselben als Ecken zweier neuen Vierecke betrachtet, so sind diese neuen Vierecke contrisch nach den Ecken. Ihre Seiten stehen auf einander senkrecht.

**Beweis.** Es halbiere die grade Linie  $EA$  (Fig. 55.) den Winkel  $A$ , und  $EB$  den Winkel  $B$ , desgleichen  $E_1A$  das Supplement  $A_1AB$  des Winkels  $A$ , und  $E_1B$  das Supplement  $B_2BA$  des Winkels  $B$ , so schneiden sich diese Linien  $EA$ ,  $EB$  und  $E_1A$ ,  $E_1B$  nothwendig, und die Durchschnits-Punkte  $E$  und  $E_1$  sind gleich weit von den drei Seiten  $AB$ ,  $B_2BC$  und  $A_1AD$  entfernt (§. 74.). Eben so sind, wenn die graden Linien  $GD$  und  $GC$  die Winkel  $D$  und  $C$  und  $G_1D$ ,  $G_1C$  ihre Supplemente halbiren, die Durchschnits-Punkte  $G$  und  $G_1$  gleich weit von den drei Seiten  $DC$ ,  $AD$  und  $BC$  entfernt. Desgleichen sind die Durchschnits-Punkte  $H$  und  $H_1$  der Linien  $EA$ ,  $GD$  und  $H_1A$ ,  $H_1D$ , welche die Winkel  $A$  und  $D$  und ihre Supplemente halbiren, gleich weit von den drei Seiten  $AD$ ,  $AB$  und  $DC$ , und die Durchschnits-Punkte  $F$  und  $F_1$  der Linien  $EB$ ,  $GC$  und  $F_1B$ ,  $F_1C$ , welche die Winkel  $B$  und  $C$  und ihre Supplemente halbiren, gleich weit von den drei Seiten  $BC$ ,  $AB$  und  $DC$  entfernt.

Es sind also die Punkte

$E$  und  $E_1$  von den drei Seiten  $DA$ ,  $AB$  und  $BC$

$F$  und  $F_1$  von den drei Seiten  $AB$ ,  $BC$  und  $CD$

$G$  und  $G_1$  von den drei Seiten  $BC$ ,  $CD$  und  $DA$

$H$  und  $H_1$  von den drei Seiten  $CD$ ,  $DA$  und  $AB$

gleich weit entfernt.

Nun sind z. B. in dem Dreiecke  $AEB$  die Winkel  $EAB = \frac{1}{2}A$ ,  $EBA = \frac{1}{2}B$ , weil  $EA$  und  $EB$  die Winkel  $A$  und  $B$  halbiren; also ist  $AEB$ , oder  $HEF$ ,  $= 2\varrho - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$ . Eben so ist  $HGF = 2\varrho - \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}C$ ,  $DHA$ , und sein Scheitelwinkel  $GHE$ ,  $= 2\varrho - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}D$  und  $BFC$ , oder sein Scheitelwinkel  $GFE$ ,  $= 2\varrho - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C$ . Also sind die Winkel

$$HEF = 2\varrho - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$$

$$HGF = 2\varrho - \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}C$$

$$GHE = 2\varrho - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}D$$

$$GFE = 2\varrho - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C$$



folglich ist

$$HEF + HGF = 4\rho - \frac{1}{2}(A + B + C + D) \text{ und}$$

$$GHE + GFE = 4\rho - \frac{1}{2}(A + B + C + D),$$

oder, weil  $A + B + C + D = 4\rho$  ist,

$$HEF + HGF = GHE + GFE = 2\rho,$$

das heißt: die Summen gegenüber liegender Winkel des Vierecks EFGH sind gleich zwei rechten, und folglich ist dieses Viereck, in dessen Ecken die Punkte E, F, G, H liegen, die gleich weit von je drei Seiten des Vierecks ABCD entfernt sind, zu Folge (§. 86. II.) centrisch nach den Ecken.

In dem Dreieck  $E_1AB$  ist der Winkel  $E_1AB = \frac{1}{2}A$ ,  $AB = \frac{1}{2}(2\rho - A) = \rho - \frac{1}{2}A$  und der Winkel  $E_1BA = \frac{1}{2}B$ ,  $BA = \frac{1}{2}(2\rho - B) = \rho - \frac{1}{2}B$ . Also ist der dritte Winkel  $AE_1B = 2\rho - (\rho - \frac{1}{2}A) - (\rho - \frac{1}{2}B)$ , oder

$$AE_1B = \frac{1}{2}(A + B).$$

Eben so ist

$$DG_1C = \frac{1}{2}(D + C)$$

$$DH_1A = \frac{1}{2}(A + D) \text{ und}$$

$$BF_1C = \frac{1}{2}(B + C).$$

Nun sind  $H_1AE_1$ ,  $E_1BF_1$ ,  $F_1CG_1$  und  $G_1DH_1$  grade Linien, weil z. B. die Winkel  $A_1AB$  und  $A_2AD$ , welche von  $AE_1$  und  $AH_1$  halbiert werden, als Scheitel-Winkel, einander gleich sind; und so an den andern Ecken. Also ist  $E_1F_1G_1H_1$  ein Viereck. In diesem Viereck sind  $AE_1B$ ,  $DG_1C$  und  $DH_1A$  und  $BF_1C$  die gegenüber liegenden Winkel. Die Summen dieser gegenüber liegenden Winkel sind also, dem Obigen zu Folge,

$$AE_1B + DG_1C = \frac{1}{2}(A + B + C + D) = \frac{1}{2} \cdot 4\rho = 2\rho \text{ und}$$

$$DH_1A + BF_1C = \frac{1}{2}(A + B + C + D) = \frac{1}{2} \cdot 4\rho = 2\rho.$$

Also ist auch das Viereck  $E_1F_1G_1H_1$  centrisch nach den Ecken.

Die Seiten des Vierecks  $E_1F_1G_1H_1$  stehen auf den Seiten des Vierecks EFGH senkrecht, denn es ist z. B.:  $EAB = \frac{1}{2}A$  und  $E_1AB = \frac{1}{2}(2\rho - A) = \rho - \frac{1}{2}A$ ; also  $EAB + E_1AB$  und  $E_1AE = \frac{1}{2}A + \rho - \frac{1}{2}A = \rho$ . Eben so  $F_1BF = \rho$ ,  $G_1CG = \rho$  und  $H_1DH = \rho$ .

## 90.

**Lehrsatz.** Wenn ein nach den Ecken, und ein nach den Seiten centrisches Viereck einen und denselben Mittelpunct haben, oder centrisch sind, und die Ecken des ersten Vierecks liegen in den Seiten des andern, so sind die Winkel zwischen den Seiten der beiden Vierecke den den Seiten des erstern gegenüber liegenden Winkeln an den Diagonalen gleich.

Z. B. wenn die beiden Vierecke ABCD und EFGH (Fig. 56.) von der beschriebenen Art sind, so sind folgende Winkel gleich

$$a = \alpha, b = \beta, c = \gamma, d = \delta.$$

**Beweis.** Der gemeinschaftliche Mittel-Punct der beiden Vierecke sey M. Der Punct M ist auch der Mittel-Punct der Ecken, z. B. des Dreiecks ADB; also ist der Winkel am Mittel-Punct AMB gleich  $2\alpha$ , folglich ist in dem gleichschenkligen Dreiecke AMB die Summe der beiden Winkel MAB und MBA gleich  $2\rho - 2\alpha$ , also jeder derselben, da sie gleich sind (§. 44. I.), gleich  $\rho - \alpha$ . Aber MAE und MBE sind rechte Winkel. Also sind die Winkel BAE und ABE, oder  $a$ , gleich  $\rho - (\rho - \alpha) = \alpha$ .

Eben so wird bewiesen, daß  $b = \beta$ ,  $c = \gamma$ ,  $d = \delta$  ist.



## Noch von der Gleichheit der Vierecke.

91.

*Anmerkung.* Es wurden oben nur die Seiten und Winkel eines Vierecks zu bestimmenden Stücken genommen. Aber auch die Diagonalen und die Winkel, welche sie mit den Seiten, und mit einander machen, können es seyn. Dieses giebt eine Menge von Fällen, welche alle durchzugehen der Raum nicht gestattet. Wir wollen von den vielen Fällen nur folgender zwei erwähnen, die öfter vorkommen.

92.

*Lehrsatz.* Zwei Vierecke sind gleich, wenn alle Seiten und eine Diagonal in dem einem so groß sind, als in dem andern.

*Beweis.* Wenn z. B. in (Fig. 57.)  $AB = EF$ ,  $AD = EH$  und  $BD = FH$ , so ist das Dreieck  $ABC$  dem Dreieck  $EFH$  gleich (§. 52.). Eben so ist das Dreieck  $BDC$  dem Dreieck  $FHG$  gleich, weil  $BC = FG$ ,  $DC = HG$  und  $BD = FH$ . Legt man nun das Dreieck  $ABD$  in das Dreieck  $EFH$ , so fällt auch nothwendig  $BD$  in  $FG$ ,  $DC$  in  $HG$ ,  $BC$  in  $FG$  und  $C$  in  $G$ . Also fallen alle Grenzen der beiden Vierecke  $ABCD$  und  $EFGH$  in einander, und die Vierecke sind gleich.

93.

*Lehrsatz.* Zwei Vierecke sind gleich, wenn zwei Seiten, nebst der daran liegenden Diagonal, und die beiden Winkel an der andern Diagonal, jenen Seiten gegenüber, in dem einen Viereck so groß sind als in dem andern, jedoch nur nothwendig dann, wenn die Vierecke nicht centrisch nach den Ecken sind.

Z. B. wenn (Fig. 58.)  $AB = EF$ ,  $AD = EH$ ,  $BD = FH$  ist, und die Winkel  $ACD$ ,  $EGH$  und  $ACB$ ,  $EGF$  gleich sind, so sind die Vierecke  $ABCD$  und  $EFGH$ , in so fern sie nicht centrisch nach den Ecken sind, gleich.

*Beweis.* Da die drei Seiten des Dreiecks  $ABD$  den drei Seiten des Dreiecks  $EFH$  gleich seyn sollen, so sind die Dreiecke gleich (§. 52.). Nun hat jedes Dreieck nur einen Mittel-Punct und nur einen Halbmesser der Ecken (§. 66.), desgleichen haben alle Dreiecke, in welchen eine Seite und der gegenüber liegende Winkel gleich groß sind, die nemlichen Mittel-Puncte und gleiche Halbmesser der Ecken (§. 70. I.). In den Drei-

ecken  $ACB$ ,  $EGF$  und  $ACD$ ,  $EGH$  sind aber eine Seite, und der gegenüber liegende Winkel, nach der Voraussetzung, gleich groß, nemlich  $AB=EF$  und  $ACB=EGF$ ,  $AD=EH$  und  $ACD=EGH$ . Also haben die Dreiecke  $ACB$ ,  $EGF$  und  $ACD$ ,  $EGH$  einerlei Mittel-Puncte und gleiche Halbmesser der Ecken, wo auch ihre Scheitel liegen mögen. Sind also  $M$  und  $P$  die Eck-Mittel-Puncte der Dreiecke  $ACB$  und  $EGF$ , und  $N$  und  $Q$  die Eck-Mittel-Puncte der Dreiecke  $ACD$  und  $EGH$ , so fällt nothwendig  $M$  in  $P$  und  $N$  in  $Q$ , wenn man  $AB$  in  $EF$  und  $AD$  in  $EH$  legt; desgleichen ist  $AM=BM=CM=EP=FP=GP$  und  $AN=DN=CN=EQ=GQ=HQ$ , wo auch die Scheitel der Dreiecke  $EGF$  und  $EGH$  liegen mögen. Nun wird vorausgesetzt, daß die beiden Dreiecke  $EGF$  und  $EGH$  einen gemeinschaftlichen Scheitel  $G$  haben: denn die Figur  $EFGH$  soll ein Viereck seyn, und sie würde, wenn die Scheitel der Dreiecke  $EGF$  und  $EGH$  nicht zusammenfielen, ein Sechseck, wie z. B.  $EFG$ ,  $EG$ ,  $HE$  seyn. Also sind in dem Dreieck  $MNC$  die Seiten alle drei eben so groß als in dem Dreieck  $PQG$ , denn es ist  $MN=PQ$ , weil  $M$  in  $P$  und  $N$  in  $Q$  fällt, und die Halbmesser  $MC$  und  $PG$ , so wie  $NC$  und  $QG$  ebenfalls gleich sind. Folglich sind die Dreiecke  $MNC$  und  $PQG$  gleich (§. 52.), und weil  $M$  in  $P$ ,  $N$  in  $Q$  fällt, fällt nothwendig  $C$  in  $G$ , also  $BC$  in  $FG$ ,  $DC$  in  $HG$ . Mithin fallen alle Grenzen der beiden Vierecke zusammen, und die Vierecke sind gleich.

Ist jedoch das Viereck  $ABCD$  centrisch nach den Ecken, so fallen die Eck-Mittel-Puncte  $M$  und  $N$  der Dreiecke  $ABC$  und  $ADC$ , folglich auch  $P$  und  $Q$  in einander, und zwischen  $M$ ,  $N$  und  $C$ , so wie zwischen  $P$ ,  $Q$  und  $G$  liegt nicht mehr ein Dreieck, sondern nur eine grade Linie, welche die Lage von  $G$  nicht weiter bestimmt, so daß also alsdann auch  $C$  außerhalb  $G$  fallen kann. Folglich findet die Gleichheit der Vierecke nur dann Statt, wenn die Vierecke nicht centrisch sind.

## 94.

*Anmerkung.* Die Untersuchung der übrigen Fälle der Gleichheit von Vierecken, wenn die Diagonalen und die Winkel zwischen denselben und den Seiten zu bestimmenden Stücken genommen werden, gestattet der Raum nicht. Zu bemerken ist, daß in Allem immer fünf

Stücke, mindestens aber zwei Linien, zu Bestimmungs-Stücken genommen werden müssen, und daß die Gleichheit der Vierecke entweder unbedingt oder bedingt, und zwar so Statt findet, daß entweder nur ein oder höchstens nur zwei Vierecke mit den nämlichen bestimmenden Stücken möglich sind.

### β) Von den Vielecken.

#### Gleichheit der Vielecke.

95.

**Lehrsatz. I.** Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf eine, und alle Winkel, bis auf die zwei, die an jener einen Seite liegen, in dem einen so groß sind, als in dem andern.

Z. B. wenn mit Ausnahme der Seite  $AI$  (Fig. 59.) und der beiden Winkel  $A$  und  $I$  alle übrigen mit ähnlichen Buchstaben bezeichneten Seiten und Winkel in dem einen Vieleck so groß vorausgesetzt werden, als in dem andern, so sind die Vielecke gleich.

**Beweis.** Die Dreiecke  $ABC$  und  $abc$  sind nach (§. 40.) gleich, denn es ist  $AB = ab$ ,  $BC = bc$  und  $B = b$ . Also sind  $AC$  und  $ac$  und die Winkel  $BCA$  und  $bca$ , und weil  $C = c$  ist, auch die Winkel  $ACD$  und  $acd$  gleich. Daher sind nun ferner die Dreiecke  $ACD$  und  $acd$  gleich, und auf dieselbe Weise, weil  $D = d$ , die Dreiecke  $ADE$  und  $ade$ , und weil  $E = e$ , die Dreiecke  $AEF$  und  $ae f$ , und weil  $F = f$ , die Dreiecke  $AFG$  und  $afg$ , und weil  $G = g$ , die Dreiecke  $AGH$  und  $agh$ , und weil  $H = h$ , die Dreiecke  $AHI$  und  $ahi$ . Also sind auch die Seiten  $AI$  und  $ai$  und die Winkel  $I$  und  $i$ ,  $A$  und  $a$  gleich; folglich sind die beiden Vielecke vollständig einander gleich.

**II.** Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten und Winkel, bis auf drei Winkel, die an einander liegen, in dem einen so groß sind, als in dem andern.

Z. B. wenn bis auf die drei Winkel  $A$ ,  $I$ ,  $H$  und  $a$ ,  $i$ ,  $h$  (Fig. 59.) alles Uebrige in dem einen Vieleck so groß vorausgesetzt wird, als in dem andern, so sind die Vielecke gleich.

**Beweis.** Die beiden Vielecke  $ABCDEFGHA$  und  $abcdefgha$  sind in dem Falle (I.), denn es sind in denselben alle Winkel, bis auf die beiden  $BAH$  und  $AHG$ , und bis auf die dazwischen liegende Seite  $AH$  in dem einen so groß, als in dem andern. Also

sind diese beiden Vielecke gleich, und folglich ist auch  $AH = ah$ . Mithin sind in dem Dreiecke  $AHI$  alle drei Seiten so groß als in dem Dreiecke  $ahi$ , weil außerdem  $AI = ai$  und  $IH = ih$  vorausgesetzt wird. Folglich sind auch die Dreiecke  $AHI$  und  $ahi$  und ihre Winkel gleich. Also sind alle Seiten und Winkel der beiden Vielecke, und folglich die Vielecke selbst gleich.

III. Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten und alle Winkel, bis auf drei Winkel, von welchen zwei an einander liegen, der dritte von den beiden getrennt ist, in dem einen so groß sind, als in dem andern.

Z. B. wenn bis auf die drei Winkel  $A, I, E$  und  $a, i, e$  (Fig. 59.) alles übrige in dem einen Vieleck so groß vorausgesetzt wird als in dem andern, so sind die Vielecke gleich.

*Beweis.* Die Vielecke  $ABCDE$ ,  $abcde$  und  $EFGHI$ ,  $efghi$  sind in dem Falle (I.), denn es sind in denselben alle Seiten bis auf eine, und alle Winkel, bis auf die beiden, die an dieser Seite liegen, in dem einen so groß, als in dem andern, nämlich:  $AB = ab$ ,  $BC = bc$ ,  $CD = cd$ ,  $DE = de$  und  $B = b$ ,  $C = c$ ,  $D = d$ , und  $EF = ef$ ,  $FG = fg$ ,  $GH = gh$ ,  $HI = hi$  und  $F = f$ ,  $G = g$ ,  $H = h$ . Also sind die Vielecke gleich. Folglich ist auch  $AE = ae$  und  $EI = ei$ , desgleichen sind die Winkel  $BAE$  und  $bae$ ,  $DEA$  und  $dea$ ,  $HIE$  und  $hie$ ,  $FBI$  und  $fei$  gleich. Da nun auf diese Weise in dem Dreieck  $AEI$  alle drei Seiten so groß sind, als in dem Dreieck  $aei$ , so sind die Dreiecke gleich (§. 52.), und folglich sind auch die Winkel  $EAI$  und  $eai$ ,  $AEI$  und  $aei$  und  $EIA$  und  $eia$ , mithin auch die Winkel des Vielecks  $A, E$  und  $I$  gleich. Folglich sind alle Seiten und alle Winkel des Vielecks gleich, und folglich sind die beiden Vielecke selbst gleich.

IV. Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten und Winkel, bis auf drei Winkel die von einander getrennt liegen, in dem einen so groß sind, als in dem andern.

Z. B. wenn bis auf die drei Winkel  $C, E, I$  und  $c, e, i$  (Fig. 59.) alles übrige in dem einem Vieleck so groß vorausgesetzt wird als in dem andern, so sind die beiden Vielecke gleich.

*Beweis.* Die Vielecke  $ABCI$  und  $abci$ ,  $CDE$  und  $cde$ ,  $EFGHI$  und  $efghi$  sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.). Denn ihre Seiten, bis auf eine, und ihre Winkel, bis auf zwei, an dieser einen Seite, sind in dem einen so groß, als in dem andern. Also sind die Vielecke

gleich, und folglich ist  $CE = ce$ ,  $EI = ei$  und  $IC = ic$ ; desgleichen sind die Winkel an  $C$ ,  $E$  und  $I$  gleich. Mithin sind auch die Dreiecke  $CEI$  und  $cei$  mit ihren Winkeln, folglich auch die Winkel der Vielecke  $C$ ,  $E$ ,  $I$  und  $c$ ,  $e$ ,  $i$ , mithin alle Seiten und Winkel der beiden Vielecke, und folglich die Vielecke selbst gleich.

V. Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf eine, und alle Winkel, bis auf zwei aneinander liegende, von welchen einer an der ausgenommenen Seite liegt, in dem einen so groß sind, als in dem andern, zugleich aber die Diagonal durch den zweiten ausgenommenen Winkel kleiner ist als die anliegende gegebene Seite. Ist die Diagonal größer, so ist mit den nemlichen Seiten und Winkeln noch ein zweites verschiedenes Vieleck möglich, aber nur noch eins.

Z. B. wenn bis auf die eine Seite  $DE$  und  $de$  (Fig. 59.) und die beiden Winkel  $C$ ,  $D$  und  $c$ ,  $d$  alles Uebrige in dem einen Vieleck so groß vorausgesetzt wird, als in dem andern, so sind die beiden Vielecke gleich, in so fern die Diagonal  $CE$  kleiner ist als  $CD$ . Ist  $CE$  größer als  $CD$ , so giebt es ein zweites Vieleck mit den nemlichen Seiten und Winkeln, aber nur noch eins.

Beweis. Die Vielecke  $ABCEFGHIA$  und  $abcefgghia$  sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.), denn alle ihre Seiten, bis auf die eine  $CE$ , und alle von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel sind in dem einen so groß, als in dem andern. Also sind diese Vielecke gleich. Folglich ist  $CE = ce$ , und auch der Winkel  $CEF$  ist gleich dem Winkel  $cef$ , mithin auch, weil die Vieleckswinkel  $E$  und  $e$  gleich sind, der Winkel  $DEC$  gleich dem Winkel  $dec$ . Folglich sind in dem Dreieck  $CDE$  zwei Seiten,  $CE$  und  $CD$ , nebst dem Winkel  $DEC$ , so groß, als in dem Dreieck  $cde$  die beiden Seiten  $ce$  und  $cd$ , nebst dem Winkel  $dec$ . Ist nun die dem Winkel  $DEC$  gegenüber liegende Seite  $CD$  von  $CD$  und  $CE$  die größere, also die Diagonal  $CE$  kleiner als die Seite  $CD$ , so sind die beiden Dreiecke  $CDE$  und  $cde$  gleich (§. 53.), und folglich sind die gesammten Vielecke gleich. Ist dagegen die Diagonal  $CE$  größer als  $CD$ , so ist mit den nemlichen Seiten und Winkeln ein zweites Dreieck  $cd_1e$ , wenn  $cd_1 = cd$ , aber nur noch eins (§. 63. III.), also auch ein zweites Vieleck  $abcd_1efghia$ , aber nur noch eins möglich, welches die nemlichen Seiten und Winkel hat, wie das Vieleck  $ABCEFGHIA$ .

**VI.** Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf eine, und alle Winkel, bis auf zwei, die an einander, aber von der ausgenommenen Seite getrennt liegen, in dem einen so groß sind, als in dem andern.

Z. B. wenn bis auf die eine Seite  $EF$  (Fig. 59.), und die beiden Winkel  $A$  und  $B$  alles übrige in dem einen Vielecke so groß vorausgesetzt wird, als in dem andern, so sind die beiden Vielecke gleich.

**Beweis.** Die Vielecke  $BCDE$ ,  $bcde$  und  $FGHIA$ ,  $fghia$  sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.), denn alle ihre Seiten, bis auf die eine,  $BE$  beim ersten und  $AF$  beim zweiten, nebst den von denselben eingeschlossenen Winkeln, sind in dem einen so groß, als in dem andern. Folglich sind die Vielecke gleich, und folglich ist  $BE = be$  und  $AF = af$ , desgleichen sind die Winkel  $DEB$ ,  $deb$  und  $GFA$ ,  $gfa$ , und folglich auch, weil die Vielecks-Winkel  $E$  und  $F$  den Winkeln  $e$  und  $f$  gleich seyn sollen, die Winkel  $BEF$ ,  $bef$  und  $EFA$ ,  $efa$  gleich. Also sind in dem Viereck  $ABEF$  die drei Seiten  $FA$ ,  $AB$  und  $BE$ , nebst den beiden Winkeln  $BEF$  und  $EFA$  so groß, als in dem Viereck  $abef$ , die drei Seiten  $fa$ ,  $ab$  und  $be$ , nebst den beiden Winkeln  $bef$  und  $efa$ . Folglich sind die Vierecke gleich (§. 76. IV.) und folglich ist auch  $EF = ef$ , desgleichen  $B = b$ ,  $A = a$  mithin sind die beiden Vielecke  $ABC...I$  und  $abc....i$  vollständig gleich.

**VII.** Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf eine, und alle Winkel, bis auf zwei, die von einander getrennt sind, und von welchen der eine an der ausgenommenen Seite liegt, in dem einen so groß sind, als in dem andern, zugleich aber von den beiden Diagonalen, an der ausgenommenen Seite und durch den getrennten, ausgenommenen Winkel, diejenige durch die beiden ausgenommenen Winkel die größere ist. Ist diese Diagonal die kleinere, so ist mit den nemlichen Seiten und Winkeln noch ein zweites verschiedenes Vieleck möglich, aber nur noch eins.

Z. B. wenn bis auf die eine Seite  $AB$  (Fig. 59), und die beiden Winkel  $B$  und  $E$  alles übrige in dem einem Vieleck so groß vorausgesetzt wird, als in dem andern, zugleich aber die Diagonal  $BE$  größer ist, als die Diagonal  $AE$ , so sind die beiden Vielecke gleich. Ist  $BE$  kleiner als  $AE$ , so giebt es noch ein zweites Vieleck mit den nemlichen Seiten und Winkeln, aber nur noch eins.

**Beweis.** Die Vielecke  $BCDE$ ,  $bcde$  und  $EFGHIA$ ,  $efghia$  sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.), denn

alle ihre Seiten, bis auf die eine  $BE$  im ersten und  $AE$  im zweiten, sind in dem einem so groß, als in dem andern. Also sind die Vielecke gleich. Folglich sind auch die Seiten  $BE$ ,  $be$  und  $AE$ ,  $ae$ , desgleichen die Winkel  $EAI$  und  $eai$ , und folglich auch, weil  $A=a$ , die Winkel  $BAE$  und  $bae$  gleich. Mithin sind in dem Dreiecke  $ABE$  zwei Seiten  $BE$  und  $AE$ , nebst dem Winkel  $BAE$ , so groß, als in dem Dreieck  $bae$  die beiden Seiten  $be$  und  $ae$ , nebst dem Winkel  $bae$ . Folglich sind die Dreiecke  $BAE$  und  $bae$  gleich, in so fern  $BE$  größer ist, als  $AE$  (§. 53.), und folglich sind alsdann die gesammten Vielecke gleich. Ist dagegen die Diagonal  $BE$  kleiner, als die  $AE$ , so ist mit den nemlichen Seiten und Winkeln ein zweites Dreieck  $b''ae$ , wenn  $b''e = be$ , aber nur noch eins (§. 63. III.), also auch ein zweites Vieleck  $ab''c d''efghia$ , aber nur noch eins möglich, welches die nemlichen Seiten und Winkel hat, wie das Vieleck  $ABCDEFGHIA$ .

VIII. Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf eine, und alle Winkel, bis auf zwei, die von einander und von der Seite getrennt liegen, in dem einen so groß sind, als in dem andern.

Z. B. wenn bis auf die eine Seite  $AI$  (Fig. 59.) und die beiden Winkel  $D$  und  $G$  alles übrige in dem einem Vieleck so groß vorausgesetzt wird, als in dem andern, so sind die beiden Vielecke gleich.

*Beweis.* Die Vielecke  $ABCD$  und  $abcd$ ,  $DEFG$  und  $defg$ ,  $GHI$  und  $ghi$  sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.), denn alle ihre Seiten, bis auf die eine  $AD$  in dem ersten,  $DG$  in dem zweiten und  $GI$  in dem dritten, nebst den von ihnen eingeschlossenen Winkeln, sind in dem einen so groß, als in dem andern. Also sind die Vielecke gleich. Daher ist auch  $AD = ad$ ,  $DG = dg$  und  $IG = ig$ , desgleichen sind die Winkel  $BAD$  und  $bad$ ,  $HIG$  und  $hig$ , folglich auch, weil  $A=a$  und  $I=i$  seyn soll, die Winkel  $DAI$  und  $dai$ ,  $GIA$  und  $gia$  gleich. Folglich sind in dem Viereck  $ADGI$  die drei Seiten  $AD$ ,  $DG$ ,  $GI$ , nebst den beiden anliegenden Winkeln  $DAI$  und  $GIA$ , so groß als in dem Viereck  $adgi$  die drei Seiten  $ad$ ,  $dg$ ,  $gi$  und die beiden anliegenden Winkel  $dai$  und  $gia$ . Folglich sind die Vierecke  $ADGI$  und  $adgi$  gleich (§. 76. IV.), und mithin auch die gesammten Vielecke  $ABC....I$  und  $abc....i$ .



**IX.** Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf zwei, die an einander liegen, und alle Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern.

Z. B. wenn bis auf die beiden Seiten  $AI$  und  $IH$  (Fig. 59.) alles übrige in dem einen Vieleck so groß vorausgesetzt wird, als in dem andern, so sind die beiden Vielecke gleich.

*Beweis.* Die Vielecke  $ABCDEFGH$  und  $abcdefgh$  sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.), denn alle Seiten, bis auf die eine  $AH$  und  $ah$ , nebst den eingeschlossenen Winkeln, sind in dem einen so groß, als in dem andern. Also sind diese Vielecke gleich. Folglich ist  $AH = ah$ , desgleichen sind die Winkel  $BAH$  und  $bah$ ,  $GHA$  und  $gha$ , und also, weil die Vielecks-Winkel  $A = a$  und  $H = h$  seyn sollen, auch die Winkel  $IAH$  und  $iah$ ,  $IHA$  und  $iha$  gleich. Folglich sind in dem Dreiecke  $AHI$  die eine Seite  $AH$ , nebst den drei Winkeln, so groß als in dem Dreieck  $ahi$  die eine Seite  $ah$ , nebst den drei Winkeln, und folglich sind diese Dreiecke gleich (§. 41.), mithin auch die gesammten Vielecke  $ABC \dots I$  und  $abc \dots i$ .

**X.** Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf zwei, die von einander getrennt, aber nicht parallel sind, und alle Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern. Sind die beiden ausgenommenen Seiten parallel, so sind mit den nemlichen übrigen Seiten und den nemlichen Winkeln unzählige verschiedene Vielecke möglich.

Z. B. wenn bis auf die beiden Seiten  $AI$  und  $DE$  (Fig. 69.) alles übrige in dem einen Vieleck so groß vorausgesetzt wird, als in dem andern, so sind die beiden Vielecke gleich.

*Beweis.* Die Vielecke  $ABCD$  und  $abede$ ,  $EEGHI$  und  $efghi$  sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.), denn alle Seiten, bis auf die eine,  $AD$  in dem ersten und  $EI$  in dem zweiten, nebst den davon eingeschlossenen Winkeln, sind in dem einen so groß, als in dem andern. Folglich sind diese Vielecke gleich, und folglich ist  $AD = ad$  und  $EI = ei$ . Aber auch die Winkel  $BAD$  und  $bad$ ,  $CDA$  und  $cda$ ,  $HIE$  und  $hie$ ,  $FEI$  und  $fei$  sind gleich, folglich sind auch, weil die Vielecks-Winkel  $A$  und  $a$ ,  $I$  und  $i$ ,  $D$  und  $d$ ,  $E$  und  $e$  gleich seyn sollen, die Winkel  $DAI$  und  $dai$ ,  $AIE$  und  $aie$ ,  $ADE$  und  $ade$ ,  $DEI$  und  $dei$  gleich. Folglich sind in dem Viereck  $ADEI$  die beiden Seiten  $AD$  und  $EI$ , nebst allen vier Winkeln, so groß, als in dem Viereck  $adei$  die



beiden Seiten *ad* und *ei* und alle vier Winkel. Also sind diese Vierecke gleich, in so fern die Seiten *AI* und *DE* nicht parallel sind (§. 76. VI.). Mithin auch vollständig die Vielecke *ABC....I* und *abc.....i*. Sind die Seiten *AI* und *DE* parallel, so sind unzählige verschiedene Vierecke *ADEI* (§. 76. VI.), und folglich mit den nemlichen Seiten und den nemlichen Winkeln, unzählige verschiedene Vielecke möglich.

## 96.

*Anmerkung.* I. Zusammengenommen also sind zwei beliebige Vielecke einander gleich, wenn bis auf

- 1) drei an einander liegende Winkel (§. 95. II.),
  - 2) zwei an einander liegende und einen abgesonderten Winkel (§. 95. III.),
  - 3) drei getrennte Winkel (§. 95. IV.),
  - 4) zwei an einander liegende Winkel und eine Seite dazwischen (§. 95. I.),
  - 5) zwei an einander liegende Winkel und eine Seite an dem einen Winkel (§. 95. V.) (bedingt),
  - 6) zwei an einander liegende Winkel und eine davon getrennte Seite (§. 95. VI.),
  - 7) zwei getrennte Winkel und eine Seite an dem einen Winkel (§. 95. VII.) (bedingt),
  - 8) zwei getrennte Winkel und eine davon getrennte Seite (§. 95. VIII.),
  - 9) zwei an einander liegende Seiten (§. 95. IX.),
  - 10) zwei getrennte Seiten (bedingt) (§. 95. X.),
- die Seiten und die Winkel in dem einen so groß sind als in dem andern.

Mehr als diese zehn Fälle sind nicht möglich, weil nicht mehr als drei Winkel und nicht mehr als zwei Seiten fehlen können. Fehlen mehr Seiten oder mehr Winkel, so sind mit den nemlichen übrigen Seiten und Winkeln unzählige verschiedene Vielecke möglich.

II. Die gleich groß vorausgesetzten Stücke sind wiederum die *bestimmenden Stücke* von Vielecken, welche nicht von einander abhängen, sondern willkürlich sind, von welchen aber die übrigen Stücke abhängen. Man kann also die obigen 10 Sätze auch wie folgt ausdrücken.

1. Mit den nemlichen *n* Seiten und *n* — 3 Winkeln, wenn die fehlenden 3 Winkel an einander liegen, ist nur ein *n* Eck möglich.

2. Mit den nemlichen  $n$  Seiten und  $n - 3$  Winkeln, wenn von den fehlenden Winkeln zwei an einander liegen, der dritte davon getrennt ist, ist nur ein  $n$  Eck möglich.

3. Mit den nemlichen  $n$  Seiten und  $n - 3$  Winkeln, wenn die fehlenden drei Winkel von einander getrennt sind, ist nur ein  $n$  Eck möglich.

4. Mit den nemlichen  $n - 1$  Seiten und den dazwischen liegenden  $n - 2$  Winkeln ist nur ein  $n$  Eck möglich.

5. Mit den nemlichen  $n - 1$  Seiten und  $n - 2$  Winkeln, wenn die fehlenden zwei Winkel an einander liegen und einer davon an der fehlenden Seite liegt, ist nur ein  $n$  Eck möglich, in so fern die Diagonal durch den zweiten fehlenden Winkel kleiner ist, als die anliegende gegebene Seite. Ist die Diagonal gröfser, so sind mit den nemlichen Seiten und Winkeln zwei verschiedene  $n$  Ecke möglich; aber nur zwei.

6. Mit den nemlichen  $n - 1$  Seiten und  $n - 2$  Winkeln, wenn die beiden fehlenden Winkel zwar an einander, aber von der fehlenden Seite getrennt liegen, ist nur ein  $n$  Eck möglich.

7. Mit den nemlichen  $n - 1$  Seiten und  $n - 2$  Winkeln, wenn die beiden fehlenden Winkel zwar von einander getrennt sind, der eine aber an der einen fehlenden Seite liegt, ist nur ein  $n$  Eck möglich, in so fern von den beiden Diagonalen, an der ausgenommenen Seite, und durch die getrennten ausgenommenen Winkel, diejenige durch die beiden ausgenommenen Winkel die gröfsere ist. Ist diese Diagonal die kleinere, so sind mit den nemlichen Seiten und Winkeln zwei verschiedene  $n$  Ecke möglich; aber nur zwei.

8. Mit den nemlichen  $n - 1$  Seiten und  $n - 2$  Winkeln, wenn die beiden fehlenden Winkel von einander und von der fehlenden Seite getrennt sind, ist nur ein  $n$  Eck möglich.

9. Mit den nemlichen  $n - 2$  Seiten und  $n$  Winkeln, wenn die beiden fehlenden Seiten an einander liegen, ist nur ein  $n$  Eck möglich.

10. Mit den nemlichen  $n - 2$  Seiten und  $n$  Winkeln, wenn die beiden fehlenden Seiten von einander getrennt und nicht parallel sind, ist nur ein  $n$  Eck möglich. Sind die beiden fehlenden Seiten parallel, so sind mit den nemlichen übrigen Seiten und den nemlichen Winkeln unzählige verschiedene Vielecke möglich.

Die Gleichheit der Vielecke ist, wie man sieht, nur in den drei Fällen (5, 7 und 10) noch einer Bedingung unterworfen: in allen andern Fällen findet sie unbedingt Statt.

III. Man kann auch die Sätze von der Gleichheit der Vielecke, wie folgt, zusammenfassen.

A. Mit den nemlichen  $n$  Seiten und  $n - 3$  Winkeln, wie auch die drei fehlenden Winkel liegen mögen, an einander, oder zum Theil, oder alle getrennt, ist nur ein  $n$  Eck möglich.

B. Mit den nemlichen  $n - 1$  Seiten und  $n - 2$  Winkeln, wie auch die fehlende eine Seite und die fehlenden zwei Winkel liegen mögen, an einander, oder zum Theil, oder alle getrennt, ist nur ein  $n$  Eck möglich, ausgenommen

$\alpha$ ) wenn die fehlenden zwei Winkel an einander und einer davon an der fehlenden Seite liegt. Ist in diesem Falle die Diagonal durch den zweiten fehlenden Winkel grösser, als die anliegende gegebene Seite, so sind mit den nemlichen Seiten und Winkeln zwei verschiedene  $n$  Ecke möglich; aber nur zwei.

$\beta$ ) Wenn die beiden fehlenden Winkel von einander getrennt sind, der eine davon aber an der fehlenden Seite liegt. Ist in diesem Falle von den beiden Diagonalen an der fehlenden Seite und durch die getrennten, ausgenommenen Winkel diejenige durch die beiden fehlenden Winkel die kleinere, so sind mit den nemlichen Seiten und Winkeln zwei verschiedene  $n$  Ecke möglich; aber nur zwei.

C. Mit den nemlichen  $n - 2$  Seiten und  $n$  Winkeln, wie auch die fehlenden zwei Seiten liegen mögen, an einander, oder getrennt, im letzten Falle jedoch nur dann, wenn die beiden fehlenden Seiten nicht parallel sind, ist nur ein  $n$  Eck möglich. Sind im zweiten Falle die beiden fehlenden Seiten parallel, so sind mit dem nemlichen übrigen Seiten und den nemlichen Winkeln unzählige verschiedene Vielecke möglich.

Fehlen mehr als zwei Seiten, oder mehr als drei Stücke: Seiten und Winkel, oder Winkel allein, so sind mit den nemlichen übrigen Seiten und Winkeln unzählige verschiedene  $n$  Ecke möglich.

Die Untersuchung der Gleichheit von Vielecken mit einspringenden und überspringenden Winkeln gestattet wieder der Raum nicht.

Anmerkung. So wie bei Vierecken, können auch bei Vielecken nicht blos die Seiten und die Winkel, welche sie mit einander einschliessen, sondern auch die Sei-

Seiten und Diagonalen, oder Diagonalen allein, nebst den Winkeln, die sie mit einander machen, bestimmende Stücke seyn, welches unzählige verschiedene Fälle giebt, die sich aber, wo sie vorkommen, mit Hülfe der obigen Lehrsätze behandeln lassen.

## 98.

**Erklärung.** Gleichliegende Seiten und Winkel in gleichen Figuren sollen diejenigen heißen, welche in der einen Figur so groß sind, als in der andern, und zwischen gleichen Seiten und gleichen Winkeln liegen.

Gleichliegende Diagonalen in gleichen Figuren sollen diejenigen heißen, welche mit den Seiten, oder mit andern Diagonalen der beiden gleichen Figuren, mit welchen sie zusammenstoßen, gleiche Figuren einschließen, z. B. in (Fig. 59.) würden IE und io gleichliegende Diagonalen seyn, wenn die Figuren gleich und IH und ih, HG und hg, GF und gf, FE und fe gleiche Seiten sind.

Gleichliegende Linien überhaupt in gleichen Figuren sollen diejenigen heißen, welche mit den Seiten, oder Diagonalen, oder andern gleichliegenden Linien, mit welchen sie zusammenstoßen, gleiche Figuren einschließen, z. B. in (Fig. 69.) sind PQ und pq gleichliegende Linien, wenn die Figuren ABCDQP und abcdqp gleich sind.

## 99.

**Lehrsatz.** In gleichen Vielecken sind nicht allein die gleichliegenden Seiten und Winkel, sondern auch alle gleichliegenden Diagonalen und sonst gleichliegende Linien, nebst den Winkeln, die sie mit einander und mit den Seiten der Figuren einschließen, gleich.

**Beweis.** Da alle diese Linien, nach der Voraussetzung, solche sind, die mit andern gleichliegenden Seiten, Diagonalen oder beliebigen, gleichliegenden Linien gleiche Figuren einschließen, so sind sie Seiten gleicher Figuren, und folglich, nebst den Winkeln, die sie mit beliebigen gleichliegenden Linien einschließen, gleich.

## Centricität der Vielecke.

## 100.

**Lehrsatz.** In jedem Vieleck mit einer graden Zahl von Seiten, welches einen Mittel-Punct der Ecken hat, ist die

Summe des ersten, dritten, fünften etc. Winkels gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten etc. Winkels.

**Beweis.** Wenn  $M$  der Mittel-Punct der Ecken der Figur  $ABCDEFGH$  (Fig. 60. I.) ist, so ist  $AM = BM = CM = DM = EM = FM = GM = HM$ . Also sind alle die Dreiecke  $AMB$ ,  $BMC$ ,  $CMD$  etc. gleichschenkelig über  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  etc., und folglich ist  $\alpha = b$ ,  $\beta = c$ ,  $\gamma = d$ ,  $\delta = e$ ,  $\varepsilon = f$ ,  $\varphi = g$ ,  $\chi = h$ ,  $\eta = a$ .

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & a + \alpha + c + \gamma + e + \varepsilon + g + \chi \\ & = b + \beta + d + \delta + f + \varphi + h + \eta. \end{aligned}$$

Die über einander stehenden Winkel in diesen beiden Reihen sind gleich, und der erste Winkel  $a$  in der obern Reihe ist dem letzten  $\eta$  in der untern Reihe gleich. Da nun  $a + \alpha = A$ ,  $b + \beta = B$ ,  $c + \gamma = C$  etc., so ist

$$A + C + E + G = B + D + F + H.$$

## 101.

**Zusatz.** Ist die Zahl der Seiten eines nach den Ecken centrischen Vielecks ungrade, so ist die Summe des zweiten, vierten, sechsten etc. und desjenigen Theils vom ersten Winkel an der graden Linie nach dem Mittelpunct, welcher nach dem letzten Winkel zu liegt, gleich der Summe des übrigen Theils vom ersten Winkel und des dritten, fünften, siebenten etc. Winkels.

I. Denn man stelle sich vor, das Vieleck habe eine Seite mehr, die aber Null ist, wodurch die Zahl der Seiten grade wird, so sind die Winkel an dieser Seite rechte. Z. B. wenn die letzte Seite  $AH$  (Fig. 60. I.) Null wäre, so wären  $\alpha$  und  $\eta$  rechte Winkel, also wäre in dem Beweise von (§. 100.)

$$\begin{aligned} & a + \alpha + c + \gamma + e + \varepsilon + g + \chi \\ & = b + \beta + d + \delta + f + \varphi + h + \eta, \end{aligned}$$

oder

$$a + C + E + G = B + D + F + h.$$

II. Will man sich, wenn die Zahl der Seiten eines nach den Ecken centrischen Vielecks ungrade ist, an einem Winkel, z. B.  $A$ , eine auf den Halbmesser  $AM$  senkrechte Linie  $PQ$  (Fig. 60. II.) vorstellen, so ist, wie aus (I.), leicht zu sehen,

$$QAB + C + E + G = B + D + F + GAP.$$

## 102.

**Lehrsatz.** In jedem Vieleck mit einer graden Zahl von Seiten; welches einen Mittel-Punct der Seiten hat, ist die Summe der ersten, dritten, fünften etc. Seite, gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten etc. Seite.

**Beweis.** Wenn das Vieleck  $ABCDEFGH$  (Fig. 61. I.) centrisch nach den Seiten und  $M$  sein Seiten-Mittel-Punct ist, so halbiren  $AM$ ,  $BM$ ,  $CM$  etc. die Winkel  $A$ ,  $B$ ,  $C$  etc. (§. 74.). Also ist  $MBA_1 = MBB_1$ ,  $MCB_1 = MCC_1$ , etc. Sind nun  $A_1M$ ,  $B_1M$ ,  $C_1M$ ,  $D_1M$  etc. Perpendikel aus  $M$  auf die Seiten, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $MBA_1$  und  $MBB_1$ ,  $MCB_1$  und  $MCC_1$  etc. gleich, weil sie eine gemeinschaftliche Seite haben und die Winkel in dem einem so groß sind, als in dem andern. Also ist  $BA_1 = BB_1$ ,  $CB_1 = CC_1$ ,  $DC_1 = DD_1$ ,  $ED_1 = EE_1$ ,  $FE_1 = FF_1$ ,  $GF_1 = GG_1$ ,  $HG_1 = HH_1$ ,  $AH_1 = AA_1$ .

Also ist auch

$$AA_1 + BA_1 + CC_1 + DC_1 + EE_1 + FE_1 + GG_1 + HG_1 \\ = BB_1 + CB_1 + DD_1 + ED_1 + FF_1 + GF_1 + HH_1 + AH_1.$$

Die über einander stehenden Linien in diesen beiden Reihen sind gleich, und die erste Linie  $AA_1$ , in der obern Reihe, ist der letzten  $AH_1$  in der untern gleich. Da nun  $AA_1 + BA_1 = AB$ ,  $CC_1 + DC_1 = CD$  etc., so ist

$$AB + CD + EF + GH = BC + DE + FG + HA.$$

## 103.

**Zusatz.** Ist die Zahl der Seiten eines nach den Seiten centrischen Vielecks ungrade, so ist die Summe des zweiten, vierten, sechsten etc., und des ersten Theils der ersten Seite, bis an den Perpendikel aus dem Mittelpunkt, gleich der Summe der dritten, fünften, siebenten etc. Seite und des zweiten Theils der ersten Seite.

Z. B. in (Fig. 61. II.) ist

$$A_1B + CC_1 + C_1D + EE_1 + E_1A \\ = BB_1 + B_1C + DD_1 + D_1E + AA_1, \text{ oder} \\ A_1B + CD + EA = BC + DE + AA_1.$$

## 104.

**Lehrsatz.** Nach den Ecken centrische Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten in dem einen so groß sind, als in dem andern.

**Beweis.** Zunächst, ist der Halbmesser der beiden Vielecke gleich. Denn wäre z. B. der Halbmesser  $AM = BM$  des Vielecks I. (Fig. 62.) größer als der Halbmesser  $\alpha\mu = \beta\mu$  des Vielecks II, während  $AB = \alpha\beta$  ist, so wäre nothwendig der Winkel  $AMB$  kleiner, als der Winkel  $\alpha\mu\beta$ . Denn, wenn  $PM$  und  $\pi\mu$  Perpendikel aus  $M$ , auf  $AB$  und aus  $\mu$  auf  $\alpha\beta$  sind, so ist  $AP = PB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\alpha\beta = \alpha\pi = \pi\beta$ , weil  $AM$ ,  $BM$  und  $\alpha\mu$ ,  $\beta\mu$  gleich lange schräge Linien sind, die sich von den Perpendikeln  $PM$  und  $\pi\mu$  gleich weit entfernen (§. 59. III.). Also wäre in den rechtwinkligen Dreiecken  $PBM$  und  $\pi\beta\mu$ , sobald  $BM$  größer wäre, als  $\beta\mu$ , der Winkel  $PMB < \pi\mu\beta$ , denn  $BM$  wäre eine längere schräge Linie, als  $\beta\mu$  aus denselben Punkten  $B$  und  $\beta$  des Perpendikels  $BP = \beta\pi$ , die also mit der Grundlinie  $PM$  einen kleineren Winkel  $PMB$  macht, als  $\pi\mu\beta$  ist (§. 62. II.), folglich wäre auch, weil  $AMB = 2PMB$  und  $\alpha\mu\beta = 2\pi\mu\beta$  ist (§. 59. III.),  $AMB < \alpha\mu\beta$ . So aber würde es sich auch mit allen übrigen gleichschenkligen Dreiecken  $BMC$ ,  $CMD$  etc.,  $\beta\mu\gamma$ ,  $\gamma\mu\delta$  etc. verhalten. Also würde die Summe der Winkel um  $M$  kleiner seyn, als die Summe der Winkel um  $\mu$ . Wäre  $AM < \alpha\mu$ , so würde auf dieselbe Weise die Summe der Winkel um  $M$  größer seyn, als die Summe der Winkel um  $\mu$ . Beides ist nicht möglich, weil vielmehr die Summe der Winkel um  $M$ , wie um  $\mu$ , gleich vier rechten, und also nothwendig gleich groß ist. Also sind die Halbmesser, der beiden Vielecke nothwendig gleich.

Deshalb sind aber weiter die Dreiecke  $AMB$ ,  $BMC$ ,  $CMD$  etc. sämtlich den Dreiecken  $\alpha\mu\beta$ ,  $\beta\mu\gamma$ ,  $\gamma\mu\delta$  etc. gleich; denn alle drei Seiten in jedem ersten, sind der Reihe nach, so groß, als die drei

Seiten in jedem andern. Also sind auch die Winkel  $ABM$  und  $\alpha\beta\mu$ ,  $MBC$  und  $\mu\beta\gamma$  etc. folglich die Winkel  $B$  und  $\beta$ ,  $C$  und  $\gamma$  etc. gleich. Mithin sind alle Seiten und alle Winkel in den beiden Vielecken gleich, und folglich sind die Vielecke selbst gleich.

## 105.

**Lehrsatz.** Nach den Ecken contrische Vielecke, in deren einer Seite der Mittelpunct liegt, sind einander gleich, wenn alle Seiten bis auf diese eine, in dem einen so groß vorausgesetzt werden, als in dem andern.

**Beweis.** Wie in (§. 104.) wird gezeigt, daß, wenn die Halbmesser der beiden Vielecke I. und II. (Fig. 63.) ungleich wären, die Winkel  $AMB$  und  $\alpha\mu\beta$ ,  $BMC$  und  $\beta\mu\gamma$  etc. und folglich ihre Summen nicht gleich seyn könnten. Gleichwohl sind diese Summen in beiden Vielecken gleich zwei rechten. Also können die Halbmesser nicht ungleich seyn. Deshalb ist  $AM = ME = \alpha\mu = \mu\epsilon$ , und folglich  $AE = \alpha\epsilon$ . Also sind in den beiden contrischen Vielecken I. und II. alle Seiten ohne Ausnahme gleich, und folglich sind die Vielecke selbst einander gleich.

## 106.

**Lehrsatz. I.** Wenn der Mittel-Punct eines nach den Ecken contrischen Vielecks in einer Seite der Figur liegt, so schliessen die graden Linien aus jeder Ecke der Figur nach den Enden der Seite, in welcher der Mittel-Punct liegt, rechte Winkel ein.

Z. B. wenn in (Fig. 64.)  $AM = BM = CM = DM = EM = FM$  ist, so sind  $ACB$ ,  $ADB$ ,  $AEB$ ,  $AFB$  rechte Winkel.

**Beweis.** Da nach der Voraussetzung  $MA = MB = MC = MD = ME = MF$  ist, so ist der Mittel-Punct der Ecken  $M$  des Vielecks  $ABCDEF$  auch zugleich der Mittel-Punct der Ecken aller der Dreiecke  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ABE$ ,  $ABF$ . Und da der Mittel-Punct in einer Seite dieser Dreiecke liegt, so sind die Winkel  $ACB$ ,  $ADB$ ,  $AEB$ ,  $AFB$ , der nemlichen Seite gegenüber, rechte (§. 69. I.).

II. Wenn die graden Linien aus zwei auf einander folgenden Ecken eines Vielecks nach jeder andern Ecke rechte Winkel machen, so ist das Vieleck contrisch nach den Ecken und sein Mittel-Punct liegt in der Mitte der gemeinschaftlichen Grundlinie der an den Ecken rechtwinkligen Dreiecke.

**Beweis.** Wenn  $AB$  (Fig. 64.) die Grundlinie ist, also die Dreiecke  $ACB$ ,  $ADB$ ,  $AEB$ ,  $AFB$  in  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  rechte Winkel haben, so haben sie sämtlich einen gemeinschaftlichen Mittel-Punct der Ecken; denn der Mittel-Punct von jedem, liegt in der Mitte der gemeinschaftlichen Grundlinie (§. 69. I.). Die Mitte der Grundlinie ist also der Mittel-Punct der Ecken des Vielecks.

## Von regelmäßigen Vielecken.

## 107.

**Erklärung.** Wenn alle Seiten und alle Winkel eines Vielecks einander gleich sind, so heisst das Vieleck regelmäßig.



## 108.

**Lehrsatz. I.** *Regelmässige Vielecke sind centrisch nach den Ecken und centrisch nach den Seiten, und zwar fällt der Mittel-Punct der Ecken in den Mittel-Punct der Seiten.*

**Beweis.** Es sey  $M$  (Fig. 65.) der Mittel-Punct der Ecken des Dreiecks  $ABC$ , so ist  $AM = BM = CM$ . Wenn nun  $ABC \dots L$  ein regelmässiges Vieleck ist, so ist  $AB = BC$ ; also sind die drei Seiten des Dreiecks  $AMB$  so gross, als die drei Seiten des Dreiecks  $BMC$ , folglich sind die Dreiecke gleich. Mithin ist der Winkel  $MBC$  gleich dem Winkel  $MAB$ . Nun sind aber die Dreiecke  $AMB$  und  $BMC$  gleichschenkelig über  $AB$  und  $BC$ , also sind die Winkel  $MAB$  und  $MBA$  gleich; da aber  $MBC = MAB$  war, so sind auch die Winkel  $MBA$  und  $MBC$  gleich. Also halbirt die Linie  $MB$  den Winkel  $ABC$ . Nun werden die Winkel  $BCD$  und  $ABC$  gleich vorausgesetzt, und die Winkel  $MCB$  und  $MBC$  sind gleich. Also halbirt auch  $MC$  den Winkel  $BCD$ . Daher ist  $MCD = MBC = MAB$ , und folglich, weil  $MC = MB = MA$  war, und  $CD = BC = AB$  vorausgesetzt wird, auch das Dreieck  $CMD$  den Dreiecken  $AMB$  und  $BMC$  gleich. Also ist auch  $DM = CM = BM = AM$ . Eben so wird bewiesen, dass das Dreieck  $DME$  dem Dreiecke  $AMB$  gleich, und  $EM = AM$  ist; u. s. w. Also ist überhaupt  $AM = BM = CM = DM \dots = LM$ , das heisst: der Punct  $M$ , ist der Mittel-Punct der Ecken der Figur.

Da ferner, wie bewiesen, z. B. die graden-Linien  $BM$  und  $CM$ , die Vielecks-Winkel  $B$  und  $C$  halbiren, so ist  $M$  der Mittel-Punct der drei Linien  $AB$ ,  $BC$  und  $CD$  (§. 74.), und eben so der drei Linien  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  etc. Folglich ist der Eck-Mittel-Punct  $M$  auch zugleich der Mittel-Punct der Seiten des regelmässigen Vielecks.

**II.** *Vielecke sind regelmässig, wenn sie centrisch nach den Ecken und gleichseitig sind.*

**Beweis.** Denn, wenn in (Fig. 65.)  $AB = BC = CD$  etc., und  $AM = BM = CM$  etc. ist, so sind die drei Seiten der Dreiecke  $AMB$ ,  $BMC$ ,  $CMD$  etc. in dem einem so gross, als in dem andern. Also sind diese Dreiecke gleich. Desgleichen sind sie gleichschenkelig über  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  etc. Also sind die Winkel  $A$ ,  $B$ ,  $C \dots$  doppelt so gross, als die unter einander gleichen



Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  etc. Folglich sind die Winkel des Vielecks  $A, B, C \dots$  einander gleich und folglich ist das Vieleck regelmässig.

III. Vielecke sind regelmässig, wenn sie centrisch nach den Seiten und gleichwinklig sind.

*Beweis.* Denn, wenn das Vieleck (Fig. 65.) centrisch nach den Seiten ist, und  $M$  ist der Seiten-Mittelpunkt, so halbiren die graden Linien  $AM, BM, CM$  etc. die Winkel  $A, B, C$  etc. Da nun diese Winkel gleich vorausgesetzt werden, so sind auch ihre Hälften gleich. Also sind die Dreiecke  $AMB, BMC, CMD$  etc. gleichschenkelig über  $AB, BC, CD$  etc. Folglich sind die Linien  $AM, BM, CM$  etc. gleich, und folglich auch die Dreiecke  $AMB, BMC, CMD$  etc., indem zwei Seiten und die Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern. Also ist  $AB = BC = CD$  etc., das heisst: die Seiten des Vielecks sind gleich, und folglich ist das Vieleck regelmässig.

IV. Vielecke sind regelmässig, wenn sie centrisch nach den Seiten und gleichseitig sind.

*Beweis.* Denn, wie in (III.), halbiren die Linien  $AM, BM, CM$  etc. die Winkel  $A, B, C$  etc. Also ist z. B.  $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$ . Es wird aber  $AB = BC$  vorausgesetzt und  $BM$  ist sich selbst gleich. Also sind die beiden Dreiecke  $AMB$  und  $BMC$  gleich. Eben so sind die Dreiecke  $BMC$  und  $CMD, DME$  und  $EMF$  etc. gleich. Also ist  $AM = BM = CM$  etc., und folglich ist das Vieleck auch centrisch nach den Ecken. Da es nun gleichseitig vorausgesetzt wird, so ist es zu Folge (II.) regelmässig.

109.

**Lehrsatz.** Die Winkel am Mittelpunkte eines regelmässigen Vielecks, den Seiten gegenüber, sind sämmtlich einander gleich, und zwar, wenn das Vieleck  $n$  Seiten hat, ist jeder gleich  $\frac{4\pi}{n}$ .

*Beweis.* Denn in allen den Dreiecken  $AMB, BMC, CMD$  etc. (Fig. 65.), wenn  $M$  der Mittel-Punkt der Ecken und Seiten des Vielecks ist, sind die drei Seiten in dem einen so groß, als in dem andern; also sind die Dreiecke, und folglich die Winkel am Mittel-Punkte  $AMB, BMC, CMD$  etc. einander gleich. Und da so viele solcher Winkel als Seiten, also  $n$  gleiche Winkel vorhanden

sind die zusammen vier rechte ausmachen, so beträgt jeder  $\frac{4\rho}{n}$ .

## 110.

**Lehrsatz.** Die Seiten des regelmäßigen Sechsecks sind dem Halbmesser der Ecken gleich.

**Beweis.** Wenn  $ABCDEF$  (Fig. 66.) ein regelmäßiges Sechseck ist, so ist z. B.  $AM = BM$ , und also sind die Winkel  $ABM$  und  $BAM$  einander gleich. Nun ist der Winkel  $AMB = \frac{4\rho}{6} = \frac{2\rho}{3}$  (§. 109.); also ist die Summe der beiden Winkel  $ABM$  und  $BAM$  der Rest von  $2\rho$ , nemlich  $2\rho - \frac{2\rho}{3} = \frac{4\rho}{3}$ , folglich beträgt jeder der beiden Winkel, weil sie einander gleich sind,  $\frac{2\rho}{3}$ , und folglich sind in dem Dreiecke  $AMB$  alle drei Winkel gleich, nemlich gleich  $\frac{2\rho}{3}$ ; mithin auch die drei Seiten, und folglich ist  $AB = AM = BM$ , das heisst: die Seiten des regelmäßigen Sechsecks sind dem Halbmesser der Ecken gleich.

---

## Zweiter Abschnitt.

Von der Gröfse oder dem Inhalte der Figuren in der Ebene und dem, was davon abhängt.

---

## A. Vergleichung der Gröfse der Figuren ohne Hülfe der Zahl, oder geometrisch.

## 111.

**Erklärung.** I. Das Perpendikel aus einer beliebigen Winkelspitze eines Dreiecks auf die gegenüber liegende Seite heisst des Dreiecks Höhe, und die Seite, auf welcher die Höhe senkrecht steht, des Dreiecks Grundlinie. Jede Seite eines Dreiecks kann zur Grundlinie genommen werden; die zugehörige Höhe ist immer das Per-

Da nun  $IK$  mit  $GH$  parallel seyn soll, so fällt  $IK$  in  $EAF$  und  $EAFB$  ist eine grade Linie.

Nun wird  $IK$  gleich  $GH$  vorausgesetzt. Also ist, wenn  $I$  in  $B$  fällt,  $EF = CD$ . Es wird aber auch  $AB = CD$  vorausgesetzt. Also ist  $EF = AB$ . Folglich ist, wenn man beiderseits  $AF$  abzieht,  $EA = FB$ . Ferner ist in den Parallelogrammen  $ABCD$  und  $EFCD$ ,  $AC = BD$  und  $EC = FD$  (§. 43.). Also sind in dem Dreiecke  $EAC$  alle drei Seiten so groß, als in dem Dreieck  $FBD$ , folglich sind diese Dreiecke gleich und folglich auch gleich groß. Zieht man nun von dem Trapeze  $EBCD$  das Dreieck  $EAC$  ab, so bleibt das Parallelogramm  $ABCD$ , und zieht man von dem nemlichen Trapeze  $EBCD$  das gleich große Dreieck  $FBD$  ab, so bleibt das Parallelogramm  $EFCD$  übrig. Also sind die Parallelogramme  $ABCD$  und  $EFCD$  oder  $IKGH$  gleich groß; das heist: Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich groß.

115.

**Zusatz.** I. Jedes Parallelogramm ist so groß, als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 114.), denn das Rechteck ist ebenfalls ein Parallelogramm.

II. Parallelogramme von gleichen Grundlinien, zwischen einerlei Parallelen, sind gleich groß (§. 114. und 43.).

116.

**Lehrsatz.** Ein Dreieck ist halb so groß, als ein beliebiges Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe.

**Beweis.** Es sey  $GF$  (Fig. 71.) eine grade Linie durch  $A$ , mit der Grundlinie  $BC$  des Dreiecks  $ABC$  parallel, und  $CF$  sey mit  $AB$  parallel, so sind in dem Dreieck  $ABC$  die Seite  $AC$  nebst den beiden anliegenden Winkeln  $BAC$  und  $BCA$  so groß, als in dem Dreieck  $ACF$  die Seite  $AC$  mit den beiden anliegenden Winkeln  $ACF$  und  $CAF$ , denn die Wechselwinkel zwischen den Parallelen bey  $A$  und  $C$  sind gleich. Also sind die beiden Dreiecke gleich, und folglich auch gleich groß. Mithin ist das eine Dreieck  $ABC$  allein, halb so groß, als das Parallelogramm  $AFBC$ . Aber dieses Parallelogramm ist eben so groß, als ein beliebiges anderes Parallelogramm  $DEBC$  von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 114.), oder mit gleicher Grundlinie und zwischen gleichen Parallelen (§. 115. II.). Also ist das Dreieck

*ABC* halb so groß, als ein beliebiges Parallelogramm *DEBC* von gleicher Grundlinie und Höhe.

117.

*Zusätze.* I. Ein Dreieck ist halb so groß als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe. Denn zu beliebigen Parallelogrammen, von gleichen Grundlinien und Höhen, gehört auch das Rechteck.

II. Ein Dreieck, welches mit einem Parallelogramme oder Rechtecke gleiche Grundlinie hat, und dessen Spitze in der andern Parallele liegt, ist halb so groß, als das Parallelogramm.

III. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich groß. Denn sie sind halb so groß, als gleiche Parallelogramme.

IV. Dreiecke mit gleichen Grundlinien, deren Spitzen in einer Parallele mit der Grundlinie liegen, oder Dreiecke zwischen Parallelen, sind gleich groß. Denn sie haben gleiche Grundlinien und Höhen.

V. Zwei Dreiecke sind gleich groß, wenn die Grundlinie des einen der Höhe des andern, und die Höhe des ersten der Grundlinie des zweiten gleich ist. Z. B. die beiden Dreiecke *ABC* und *ADE* (Fig. 72.) sind gleich, wenn *AE* dem Perpendikel *BP* und *AC* dem Perpendikel *DQ* gleich ist. Denn die Dreiecke sind die Hälften gleicher Rechtecke *HIAC* und *FGAE*.

VI. Also auch Parallelogramme von beliebigen Winkeln, wie z. B. *ADKE* und *ABLC* (Fig. 72.) sind gleich groß, wenn die Grundlinie *AE* des einen, der Höhe *BP* des andern, und die Höhe *DQ* des ersten der Grundlinie *AC* des zweiten gleich ist; denn die Parallelogramme sind doppelt so groß, als die Dreiecke *ABC* und *ADE*; auch sind sie von der nemlichen Grösse wie die Rechtecke *AG* und *AI*, welche einander gleich sind, weil  $AE = AH$  und  $AC = AF$  seyn soll.

118.

*Lehrsatz.* I. Gleichwinklige Parallelogramme von gleicher Höhe, sind zusammen so groß, als ein Parallelogramm mit eben dem Winkel und eben der Höhe, dessen Grundlinie so lang ist, als die Grundlinien der einzelnen Parallelogramme zusammen.

*Beweis.* Wenn z. B. die beiden Parallelogramme *AD* und *EH* (Fig. 73.) gleiche Winkel  $C = G$  und gleiche Höhen  $BP = EQ$  haben, so sind die rechtwinkligen Dreiecke *BDP* und *EQO* gleich; denn die beiden Winkel bei *D* und *P*, nebst der Seite *BP*, in dem

Dreiecke  $BDP$ , sind so groß, als die beiden Winkel bei  $G$  und  $Q$ , und die Seite  $EQ$  in dem Dreieck  $EQO$ , und folglich ist  $EG = BD$ . Legt man also  $EG$  in  $BD$ , so fallen  $EF$  und  $GH$  in grade Linien mit  $AB$  und  $CD$ ; denn die Winkel bei  $E$  und  $G$  sind den Winkeln bei  $B$  und  $D$  nach der Voraussetzung gleich. Fällt nun  $FH$  in  $IK$ , so ist auch  $IK$  mit  $BD$  oder  $AC$  parallel, und folglich ist die Figur  $AICK$ , welche die beiden Parallelogramme  $AD$  und  $EH$  enthält, ein Parallelogramm, dessen Grundlinie  $CK$  so lang ist, als die Grundlinien der einzelnen Parallelogramme zusammen.

Eben so verhält es sich, wenn drei und mehrere gleichwinklige Parallelogramme von gleichen Höhen zusammengesetzt werden.

Wenn man also die Grundlinien beliebiger gleichwinkliger Parallelogramme von gleichen Höhen, der Kürze wegen, durch  $a, b, c, d, \dots$  und ihre gemeinschaftliche Höhe durch  $h$  bezeichnet, so ist

$$(a.h) + (b.h) + (c.h) + (d.h) \dots = (a + b + c + d \dots)h.$$

II. Gleichwinklige Parallelogramme von gleichen Grundlinien sind zusammen so groß, als ein Parallelogramm von eben den Winkeln und eben der Grundlinie, dessen Höhe so groß ist, als die Höhen der einzelnen Parallelogramme zusammen.

*Beweis.* Es sey die Grundlinie  $GH$  des Parallelogramms  $EH$  (Fig 74.) der Grundlinie  $CD$  des Parallelogramms  $AD$  gleich und  $G = C$ , so fällt, wenn man  $GH$  in  $AB$  legt,  $H$  in  $B$ , weil  $AB = CD$  ist, und  $GE$  fällt in eine grade Linie mit  $AC$ , etwa in  $AI$ ; eben so  $BK = FH$  in eine grade Linie mit  $BD$ . Auch ist  $IK$ , wenn  $EF$  in diese Linie fällt, mit  $AB$  und  $CD$  parallel. Also ist  $ID$  ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie mit  $AD$  und  $EH$ , welches so groß ist, als beide zusammen. Seine Höhe aber ist gleich  $AP + EQ$ ; denn wie in (I.) folgt, daß die Perpendikel  $EQ$  und  $IR$  gleich sind, und wenn  $IRS$  eine grade Linie ist, so ist zwischen den Parallelen  $AB$  und  $CD$ ,  $RS = AP$ , also die Höhe  $IS$  des Parallelogramms  $ID$ , gleich  $EQ + AP$ .

Eben so verhält es sich, wenn drei und mehrere gleichwinklige Parallelogramme von gleichen Grundlinien zusammengesetzt werden.

Wenn man also die Höhen beliebiger gleichwinkliger Parallelogramme von gleichen Grundlinien, der Kürze wegen, durch  $h, i, k, l, \dots$  und ihre gemeinschaftliche Grundlinie durch  $a$  bezeichnet, so ist

$$(a.h) + (a.i) + (a.k) + (a.l) \dots = (a(h + i + k + l \dots)).$$

III. Zwei gleichwinklige Parallelogramme von gleicher Höhe sind um ein Parallelogramm von eben dem Winkel und eben der Höhe unterschieden, dessen Grundlinie dem Unterschiede der Grundlinien der beiden Parallelogramme gleich ist.

*Beweis.* Wenn die beiden Parallelogramme  $AD$  und  $EH$  (Fig. 73.) gleiche Winkel  $C = G$  und gleiche Höhen  $AR = EQ$  haben, so wird, wie in (I.), bewiesen, daß  $AC = EG$  ist. Legt man also  $GH$  in  $CM$ , so fällt, wegen der gleichen Winkel  $G$  und  $C$ ,  $EG$  in  $AC$  und weil  $EG = AC$  ist,  $E$  in  $A$ , also die Parallele  $EF$  in die Parallele  $AL$ . Und da  $FH$ , welches in  $LM$  fällt, mit  $EG$  parallel ist, so ist auch  $LM$  mit  $AC$  und  $BD$  parallel, und folglich  $LD$  ein Parallelogramm von dem nemlichen Winkel wie  $AD$  und  $EH$ . Dieses Parallelogramm ist der Unterschied der beiden Parallelogramme  $AD$  und  $EH$ . Seine Höhe ist ihrer Höhe und seine Grundlinie dem Unterschiede  $MD$  ihrer Grundlinien gleich,

Bezeichnet man also die Grundlinien zweier gleichwinkliger Parallelogramme, der Kürze wegen, durch  $a$  und  $b$  und ihre gemeinschaftliche Höhe durch  $h$ , so ist

$$(a \cdot h) - (b \cdot h) = ((a - b) \cdot h).$$

IV. Zwei gleichwinklige Parallelogramme von gleichen Grundlinien sind, nm ein Parallelogramm von eben dem Winkel und eben der Grundlinie, unterschieden, dessen Höhe dem Unterschiede der Höhen der beiden Parallelogramme gleich ist.

*Beweis.* Wenn die beiden Parallelogramme  $AD$  und  $EH$  (Fig. 74.) gleiche Grundlinien  $CD = GH$  und gleiche Winkel  $G = C$  haben, so fällt, wenn man  $GH$  in  $CD$  und  $G$  in  $C$  legt,  $H$  in  $D$  und  $GE$  in  $CA$ , desgleichen  $HF$  in  $DB$ . Fällt nun  $E$  in  $L$  und  $F$  in  $M$ , also  $EF$  in  $LM$ , so ist  $LM$  mit  $CD$  parallel, weil  $EF$  mit  $GH$  parallel ist. Also ist  $ABLM$  ein Parallelogramm. Dieses Parallelogramm, welches der Unterschied der beiden Parallelogramme  $AD$  und  $EH$  ist, hat mit ihnen gleiche Grundlinien  $LM = CD = GH$  und gleiche Winkel  $L = C = G$ , seine Höhe  $AU$  aber ist gleich dem Unterschiede der Höhen  $AP$  und  $LT = EQ$ , wenn  $AP$  und  $LT$  Perpendikel auf  $CD$  sind; denn die Parallelen  $LM$  und  $CD$  schneiden von den Perpendikeln  $LT$  und  $AP$  gleich lange Stücke ab.

Bezeichnet man also die Höhen zweier beliebiger gleichwinkliger Parallelogramme, der Kürze wegen, durch  $h$  und  $i$ , und die gemeinschaftliche Grundlinie durch  $a$ , so ist

$$(a \cdot h) - (a \cdot i) = (a(h - i)).$$

## 119.

*Zusätze.* I. Alle Sätze (118.) gelten auch von Rechtecken; denn auch Rechtecke sind Parallelogramme.

II. Das Quadrat über der Summe zweier beliebigen graden Linien ist so groß als die Summe der Quadrate der einzelnen Linien und des zweifachen Rechtecks unter den nemlichen Linien; und umgekehrt. Das heisst es ist z. B.

$$[(a + b)^2] = [a^2] + [b^2] + 2[a \cdot b].$$

Denn  $[(a + b)^2]$  oder  $[(a + b) \cdot (a + b)]$  ist nach (§. 118. I.), so viel als  $[a(a + b)] + [b(a + b)]$ . Ferner ist  $[a(a + b)]$  so viel als  $[a^2] + [a \cdot b]$ , und  $[b(a + b)]$  ist so viel als  $[b \cdot a] + [b^2]$ , oder, weil  $[b \cdot a] = [a \cdot b]$  ist (§. 117. VI.), so viel als  $[a \cdot b] + [b^2]$ . Also ist  $[(a + b)^2]$  so viel als  $[a^2] + [a \cdot b] + [b^2] + [a \cdot b]$ , oder so viel als  $[a^2] + [b^2] + 2[a \cdot b]$ ; welches das Erste war. Umgekehrt ist  $[a^2] + [b^2] + 2[ab]$  so viel als  $[a \cdot a] + [a \cdot b] + [b \cdot a] + [b \cdot b]$ , oder nach (§. 118. I.) so viel als  $[a(a + b)] + [b(a + b)]$ , oder so viel als  $[(a + b)(a + b)]$  oder  $[(a + b)^2]$ ; welches das Zweite war.

III. Das Quadrat über dem Unterschiede zweier beliebigen graden Linien ist so groß, als die Summe der Quadrate der einzelnen Linien, weniger dem zweifachen Rechteck unter den nemlichen Linien; und umgekehrt. Das heisst, es ist z. B.

$$[(a - b)^2] = [a^2] + [b^2] - 2[a \cdot b].$$

Denn  $[(a - b)^2]$  oder  $[(a - b) \cdot (a - b)]$  ist nach (§. 118. III.) so viel als  $[a(a - b)] - [b(a - b)]$ . Ferner ist  $[a(a - b)]$  nach (§. 118. IV.) so viel als  $[a^2] - [a \cdot b]$ , und  $[b(a - b)]$  ist so viel als  $[b \cdot a] - [b^2]$ , oder so viel als  $[a \cdot b] - [b^2]$ . Also ist  $[(a - b)^2]$  so viel als  $[a^2] - [a \cdot b] - ([a \cdot b] - [b^2])$ , oder so viel als  $[a^2] + [b^2] - 2[a \cdot b]$ ; wel-

ches das Erste war. Umgekehrt ist  $[a^2] + [b^2] - 2[a.b]$  so viel als  $[a.a] - [a.b] + [b.b] - [b.a]$ , oder so viel als  $[a.a] - [a.b] - ([b.a] - [b.b])$ , oder  $[a(a-b)] - [b(a-b)]$ , oder  $[(a-b)(a-b)]$  oder  $[(a-b)^2]$ ; welches das Zweite war.

IV. Das Rechteck unter der Summe und dem Unterschiede zweier beliebigen graden Linien, ist gleich dem Unterschiede der Quadrate der nemlichen Linie; und umgekehrt. Das heisst es ist, z. B.

$$[(a+b) \cdot (a-b)] = [a^2] - [b^2].$$

Denn  $[(a+b)(a-b)]$  ist nach (§. 118. I.) so viel als  $[a(a-b)] + [b(a-b)]$ . Ferner ist  $[a(a-b)]$  nach (§. 118. III.) so viel als  $[a^2] - [a.b]$ , und  $[b(a-b)]$  so viel als  $[b.a] - [b^2]$ , oder  $[a.b] - [b^2]$ , also ist  $[(a+b)(a-b)]$  zusammen so viel als  $[a^2] - [a.b] + [a.b] - [b^2]$ , das heisst, so viel als  $[a^2] - [b^2]$ ; welches das Erste war.

Umgekehrt ist  $[a^2] - [b^2]$  so viel als  $[a^2] + [a.b] - [a.b] - [b^2]$ , und dieses nach (§. 118. III.) so viel als  $[a(a+b)] - [b(a+b)]$ , oder so viel als  $[(a-b)(a+b)]$ , oder  $[(a+b)(a-b)]$ ; welches das Zweite war.

V. Summe und Unterschied von Dreiecken gleicher Höhe sind einem Dreieck von eben der Höhe gleich, dessen Grundlinie, Summe und Unterschied der Grundlinien der einzelnen Dreiecke ist.

Denn die Dreiecke sind die Hälften beliebiger, also auch gleichwinkliger Parallelogramme, von gleichen Grundlinien und Höhen (§. 116.), von welchen der Satz Statt findet (§. 118. I. III.).

VI. Summe und Unterschied von Dreiecken gleicher Grundlinie sind einem Dreiecke von eben der Grundlinie gleich, dessen Höhe, Summe und Unterschied der Höhen der einzelnen Dreiecke ist.

Denn die einzelnen Dreiecke sind die Hälften beliebiger, also auch gleichwinkliger Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen (§. 116.), von welchen der Satz Statt findet (§. 118. II-IV.).

## 120.

**Lehrsatz.** Wenn Dreiecke mit gemeinschaftlichem Scheitel, die beiden Seiten und Diagonalen eines beliebigen Parallelogramms zu Grundlinien haben, so ist das Dreieck über einer der Diagonalen so gross, als die Summe oder der Unterschied der Dreiecke über denjenigen beiden Seiten, die mit der Diagonale in einem Punkt zusammen treffen, je nachdem der andere Winkel des Parallelogramms innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks über der Diagonal fällt.

Z. B. wenn  $ABCD$  (Fig. 75.) ein beliebiges Parallelogramm und  $E$  ein beliebiger Punkt ist, so ist

$$1. \begin{cases} \triangle ACE = \triangle ABE + \triangle ADE \\ \triangle DBE = \triangle ABE - \triangle CBE. \end{cases}$$

**Beweis.**  $DR$ ,  $CVQ$  und  $BP$  sollen auf  $EA$  senkrecht, dergleichen soll  $BV$  mit  $EA$  parallel seyn. Alsdann sind die rechtwinkligen Dreiecke  $DEA$  und  $CVB$  gleich, weil  $DA = CB$  ist, und die Winkel  $DAR$  und  $CBV$  gleich sind. Also ist,  $CV = DR$ . Nun ist wegen der Parallelen,  $VQ = BP$ . Also ist  $CQ = BP + DR$ . Aber  $CQ$ ,  $BP$  und  $DR$  sind die Höhen der Dreiecke  $ACE$ ,  $ABE$  und  $ADE$  über der nemlichen Grundlinie  $AE$ . Also ist das Dreieck  $ACE$  so



gröfs, als die Summe der beiden Dreiecke  $ABE$  und  $ADE$  (§. 119. VI.); welches das Erste ist, weil der andere Winkel des Parallelogramms  $B$  innerhalb  $AEC$  fällt.

Es sey ferner  $EBIGH$  eine grade Linie, auf welche  $DH$ ,  $CI$  und  $AG$  senkrecht sind, desgleichen sey  $DF$  mit  $EH$  parallel, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $DFA$  und  $BIC$  gleich; denn es ist, wegen der Parallelen,  $DA = BC$ , und die Winkel  $DAF$  und  $BCI$  sind gleich. Also ist  $AF = CI$ , folglich auch, weil wegen der Parallelen  $DH = FG$  ist,  $AG - CI = DH$ . Aber  $DH$ ,  $AG$  und  $CI$  sind die Höhen der Dreiecke  $DBE$ ,  $ABE$  und  $CBE$  über der nemlichen Grundlinie  $BE$ . Also ist das Dreieck  $DBE$  so gröfs, als der Unterschied der beiden Dreiecke  $ABE$  und  $CBE$  (§. 119. VI.); welches das Zweite ist, weil der andere Winkel des Parallelogramms  $A$  ausserhalb  $DEB$  fällt.

## 121.

**Lehrsatz.** Wenn grade Linien durch die Winkel-Scheitel eines Dreiecks auf den gegenüber liegenden Seiten perpendicular sind, so sind die Rechtecke unter den Seiten und den Abständen der Perpendikel, um jede Ecke, gleich.

Z. B. wenn in (Fig. 76. I. und II.), in welchen Figuren gleiche Buchstaben, gleiche Punkte bezeichnen,  $AS$  auf der Seite  $BC$ ,  $ET$  auf der Seite  $CA$  und  $CU$  auf der Seite  $AB$  senkrecht steht, so ist in beiden Figuren

$$[AB.AU] = [AC.AT]$$

$$[BC.BS] = [BA.BU]$$

$$[CA.CT] = [CB.CS].$$

**Beweis.**  $ASP$ ,  $BTQ$  und  $CUR$  (immer in beiden Figuren) sollen grade Linien und  $AE$ ,  $BI$ ,  $CF$  sollen Quadrate seyn, so sind die Seiten dieser Quadrate mit den Seiten des Dreiecks  $ABC$  und mit den Perpendikeln  $CU$ ,  $AS$  und  $BT$  parallel; also sind  $AR$ ,  $BR$ ,  $BP$ ,  $CP$ , und  $CQ$ ,  $AQ$  Rechtecke.

Nun ist z. B. in den beiden Dreiecken  $AFB$  und  $ACD$ ,  $AF = AC$ ,  $AB = AD$  und der Winkel  $FAB$ , als die Summe von  $BAC$  und einem rechten, gleich dem Winkel  $CAD$ , als einer gleichen Summe. Folglich sind die Dreiecke  $AFB$  und  $ACD$  gleich.

Das Dreieck  $AFB$  hat aber mit dem Rechteck  $AQ$  gleiche Grundlinie  $AF$ , und seine Spitze  $B$  liegt in der andern Parallele  $BQ$ . Also ist es die Hälfte des Rechtecks  $AQ$  (§. 117. II.). Das Dreieck  $ACD$  hingegen hat mit dem Rechteck  $AR$  gleiche Grundlinie  $AD$  und seine Spitze  $C$  liegt in der andern Parallele. Also ist es die Hälfte des Rechtecks  $AR$ . Die beiden Dreiecke  $AFB$  und  $ACD$  wären aber einander gleich und mithin auch gleich gröfs. Also sind auch die Rechtecke  $AQ$  und  $AR$  gleich gröfs, das heifst, es ist  $[AD.AU] = [AF.AT]$ , oder weil  $AF = AC$  und  $AD = AB$  ist,

$$[AB.AU] = [AC.AT].$$

Eben so wird bewiesen, dafs die Dreiecke  $EBC$  und  $ABH$  gleich und folglich, weil sie halb so gröfs sind, als die Rechtecke  $BR$  und  $BP$ , dafs diese Rechtecke gleich gröfs sind, d. h., dafs  $[BH.BS] = [BE.BU]$ , oder weil  $BH = BC$  und  $BE = BA$  ist, dafs

$$[BC.BS] = [BA.BU]$$

ist.



Desgleichen, daß die Dreiecke  $ACI$  und  $BCG$  gleich, und folglich, weil sie halb so groß sind, als die Rechtecke  $CP$  und  $CQ$ , daß diese Rechtecke gleich groß sind, d. h., daß  $[CG \cdot CT] = [CI \cdot CS]$ , weil  $CG = CA$  und  $CI = CB$  ist, daß

$$[CA \cdot CT] = [CB \cdot CS]$$

ist.

## 122.

**Zusatz.** Wenn das Dreieck rechtwinklig ist, so fallen die Perpendikel aus den Scheiteln der beiden andern Winkel auf die gegenüberstehenden Seiten in die Catheten selbst, und folglich sind die Abschnitte der Perpendikel um den rechten Winkel Null. Wenn z. B. der Winkel (*B. Fig. 76. I. und II.*) ein rechter ist, so fallen die Perpendikel  $AS$  und  $CU$  aus  $A$  und  $C$ , in  $AB$  und  $CB$ , wie (*Fig. 76. III.*), und folglich sind alsdann die Rechtecke  $UE$  und  $BP$  (*Fig. 76. I. II.*) Null.

Wenn also ein Dreieck rechtwinklig ist, so sind die Rechtecke unter der Hypothenuse und den Abschnitten des Perpendikels aus dem rechten Winkel auf die Hypothenuse, den Quadraten der Catheten gleich, nemlich in (*Fig. 76. III.*)

$$[AB \cdot AB] = [AC \cdot AT] \text{ und} \\ [BC \cdot BC] = [CA \cdot CT]$$

oder

$$[AB^2] = [AC \cdot AT] \text{ und} \\ [BC^2] = [CA \cdot CT]$$

oder

$$\text{Quadrat } AE = \text{Rechteck } AQ \text{ und} \\ \text{Quadrat } CH = \text{Rechteck } CQ.$$

## 123.

**Lehrsatz.** In jedem Dreieck ist

- 1) um einen spitzen Winkel die Summe der Quadrate der Seiten, wenn man davon die Rechtecke unter den Seiten und den Abständen der Perpendikel aus der gegenüber liegenden Winkelspitze von der Ecke, also weil diese Rechtecke gleich groß sind (§. 121.), das doppelte Rechteck unter einer Seite und dem Abstände des Perpendikels wegnimmt;
- 2) um einen stumpfen Winkel die Summe der Quadrate der Seiten, wenn man denselben die nemlichen Rechtecke hinzufügt;
- 3) um einen rechten Winkel die Summe der Quadrate der Seiten selbst, dem Quadrate der dritten Seite gleich.

Z. B. in *Fig. 76. I.*) ist

$$[AB^2] + [BC^2] - [AB \cdot BU] - [BC \cdot BS] = [AC^2] \text{ oder} \\ [AB^2] + [BC^2] - 2[BC \cdot BS] = [AC^2] \text{ und} \\ [AB^2] + [BC^2] - 2[BA \cdot BU] = [AC^2].$$

In

In (Fig. 76. II.) ist

$$[AB^2] + [BC^2] + [AB.BU] + [BC.BS] = [AC^2], \text{ oder}$$

$$[AB^2] + [BC^2] + 2[BC.BS] = [AC^2], \text{ und}$$

$$[AB^2] + [BC^2] + 2[BA.BU] = [AC^2].$$

In (Fig. 76. III.) ist

$$[AB^2] + [BC^2] = [AC^2].$$

**Beweis.** I. In (Fig. 76. I.) ist nach (§. 121.)

Rechteck  $AQ =$  Rechteck  $AR$ ,

Rechteck  $CQ =$  Rechteck  $CP$ .

Also, da Rechteck  $AQ +$  Rechteck  $CQ = [AC^2]$  ist,

Rechteck  $AR +$  Rechteck  $CP = [AC^2]$ .

Aber Rechteck  $AR = [AB^2] -$  Rechteck  $BR$ ,

Rechteck  $CP = [BC^2] -$  Rechteck  $BP$ ;

also

$$[AB^2] - \text{Rechteck } BR + [BC^2] - \text{Rechteck } BP = [AC^2].$$

Nun ist Rechteck  $BR = [BE.BU] = [AB.BU]$ ,

und Rechteck  $BP = [BH.BS] = [BC.BS]$ ,

also ist

$$[AB^2] + [BC^2] - [AB.BU] - [BC.BS] = [AC^2],$$

oder auch, weil nach (§. 121.)  $[AB.BU] = [BC.BS]$  ist,

$$[AB^2] + [BC^2] - 2[BC.BS] = [AC^2], \text{ oder}$$

$$[AB^2] + [BC^2] - 2[AB.BU] = [AC^2].$$

II. In (Fig. 76. II.) ist nach (§. 121.)

Rechteck  $AQ =$  Rechteck  $AR$ ,

Rechteck  $CQ =$  Rechteck  $CP$ .

Also, da Rechteck  $AQ +$  Rechteck  $CQ = [AC^2]$  ist,

Rechteck  $AR +$  Rechteck  $CP = [AC^2]$ .

Aber Rechteck  $AR = [AB^2] +$  Rechteck  $BR$ ,

Rechteck  $CP = [BC^2] +$  Rechteck  $BP$ ;

also

$$[AB^2] + \text{Rechteck } BR + [BC^2] + \text{Rechteck } BP = [AC^2].$$

Nun ist Rechteck  $BR = [BE.BU] = [AB.BU]$ ,

und Rechteck  $BP = [BH.BS] = [BC.BS]$ ;

also ist

$$[AB^2] + [BC^2] + [AB.BU] + [BC.BS] = [AC^2],$$

oder auch, weil nach (§. 121.)  $[AB.BU] = [BC.BS]$ ,

$$[AB^2] + [BC^2] + 2[BC.BS] = [AC^2], \text{ oder}$$

$$[AB^2] + [BC^2] + 2[AB.BU] = [AC^2].$$

III. In (Fig. 76. III.) ist nach (§. 122.)

$[AB^2] =$  Rechteck  $AQ$ ,

$[BC^2] =$  Rechteck  $CQ$ ;

also ist, weil Rechteck  $AQ +$  Rechteck  $CQ = [AC^2]$ ,

$$[AB^2] + [BC^2] = [AC^2].$$

$$[AD^2] = [AP^2] + [DP^2] \text{ und} \\ [AB^2] = [AP^2] + [BP^2],$$

also, wenn man für (Fig. I.) das Quadrat der kleinern Linie  $AD$  von dem Quadrat der größern  $AB$  abzieht,

$$[AB^2] - [AD^2] = [BP^2] - [DP^2],$$

und, wenn man für (Fig. II.) das Quadrat der kleinern Linie  $AB$  von dem Quadrat der größern  $AD$  abzieht,

$$[AD^2] - [AB^2] = [DP^2] - [BP^2].$$

Nun ist der Unterschied zweier Quadrate gleich dem Rechteck unter der Summe und dem Unterschiede ihrer Seiten (§. 119. IV.). Also ist in (Fig. I.)

$$[(AB + AD)(AB - AD)] = [(BP + DP)(BP - DP)],$$

und in (Fig. II.)

$$[(AD + AB)(AD - AB)] = [(DP + BP)(DP - BP)].$$

Es ist aber in (Fig. I.)  $BP + DP$ , oder  $CP + DP = DC$  und  $BP - DP = BD$ ; und in (Fig. II.)  $DP + BP = BD$  und  $DP - BP$ , oder  $DP - CP = DC$ . Also ist

$$[(AB + AD)(AB - AD)] = [BD \cdot DC] \text{ in (Fig. I.) und} \\ [(AD + AB)(AD - AB)] = [BD \cdot DC] \text{ in (Fig. II.)}$$

128.

**Lehrsatz.** In jedem Viereck ist die Summe der Quadrate über den vier Seiten gleich der Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen und des vierfachen Quadrats über der Entfernung der Mittel-Punkte der Diagonalen von einander.

Z. B. wenn in dem beliebigen Viereck  $ABCD$  (Fig. 80.)  $AG = GD$ ,  $CF = FB$ , und  $FG$  eine grade Linie ist, so ist

$$[AB^2] + [BD^2] + [DC^2] + [CA^2] \\ = [AD^2] + [BC^2] + 4[FG^2].$$

**Beweis.** In dem Dreiecke  $ABC$  halbt die grade Linie  $AF$  die Grundlinie  $BC$ , weil  $CF = FB$  seyn soll; also ist nach (§. 125.)

$$[AB^2] + [CA^2] = 2[AF^2] + 2[CF^2].$$

Eben so halbt in dem Dreieck  $DBC$  die grade Linie  $DF$  die Grundlinie  $CB$ ; also ist

$$[BD^2] + [DC^2] = 2[FD^2] + 2[CF^2].$$

Beides zusammengenommen giebt

$$[AB^2] + [BD^2] + [DC^2] + [CA^2] \\ = 2[AF^2] + 2[FD^2] + 4[CF^2],$$

oder, weil  $4[CF^2] = [CB^2]$ , indem  $CB = 2CF$  ist,  
 $[AB^2] + [BD^2] + [DC^2] + [CA^2]$   
 $= 2[AF^2] + 2[FD^2] + [CB^2].$

Nun halbiert die grade Linie  $FG$  in dem Dreiecke  $AFD$  die Grundlinie  $AD$ , also ist nach (§. 125.)

$$[AF^2] + [FD^2] = 2[AG^2] + 2[FG^2],$$

folglich ist

$$[AB^2] + [BD^2] + [DC^2] + [CA^2]$$

$$= 4[AG^2] + 4[FG^2] + [CB^2],$$

oder, weil  $4[AG^2] = AD^2$ , indem  $AD = 2AG$  ist,  
 $[AB^2 + BD^2] + [DC^2] + [CA^2]$   
 $= [AD^2] + [BC^2] + 4[FG^2];$

wie behauptet wurde.

## 129.

*Zusätze.* Aus (§. 128.) folgt I., dass in einem Parallelogramme die Summe der Quadrate über den vier Seiten gleich ist der Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen.

Denn, wenn  $ABCD$  (Fig. 80.) ein Parallelogramm wäre, so würden sich seine Diagonalen halbiren (§. 82. III.), und also  $F$  und  $G$  in  $E$  zusammenfallen, folglich  $FG$  gleich Null, mithin bloss

$$[AB^2] + [BD^2] + [DC^2] + [CA^2]$$

$$= [AD^2] + [BC^2]$$

seyn.

II. In einem Rhomboïd ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen viermal so gross, als das Quadrat einer der gleichen Seiten.

Denn die Seiten des Rhomboïdes sind gleich lang.

III. In einem Quadrat ist das Quadrat über der Diagonal doppelt so gross, als das Quadrat über der Seite; denn die beiden Diagonalen sind in einem Quadrate einander gleich. Dieser Satz folgt auch unmittelbar aus dem Pythagorischen Lehrsatz, weil ein Quadrat rechte Winkel hat und seine Seiten einander gleich sind.

## 130.

*Erklärung.* Wenn die Winkel eines Dreiecks, oder einer beliebigen andern Figur, den Winkeln einer andern gleich sind, so sollen die Seiten, welche in den beiden Figuren zwischen den nemlichen Winkeln liegen, ähnlich-

liegend oder homolog heißen. Z. B. wenn in (Fig. 81.) die Figuren  $ABCDEFG$  und  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta$  gleiche Winkel haben, so daß  $A = \alpha$ ,  $B = \beta$ ,  $C = \gamma$  etc. ist, so sind  $AB$  und  $\alpha\beta$ ,  $BC$  und  $\beta\gamma$ ,  $CD$  und  $\gamma\delta$  ähnlichliegende, oder homologe Seiten.

## 131.

**Erklärung.** Die Seiten einer Figur, wie sie in beliebiger Richtung auf einander folgen, sollen, von einer beliebigen Seite anfangend, erste, zweite, dritte etc. heißen. Eben so die Winkel.

In einem Dreieck kann jede Seite die erste seyn, und jede andere Seite die zweite. Die letzte Seite ist dann die dritte. Eben so die Winkel.

In gleichwinkligen Dreiecken sind der erste, zweite und dritte Winkel gleich, und die erste, zweite und dritte Seite sind ähnlichliegende.

## 132.

**Lehrsatz.** I. In zwei gleichwinkligen Dreiecken sind die Parallelogramme, unter einer beliebigen Seite des einen und einer beliebigen Seite des andern, und die Parallelogramme, unter den ähnlichliegenden Seiten der beiden Dreiecke, gleich groß, wenn die Winkel der Parallelogramme den Winkeln der Dreiecks-Seiten, unter welchen sie liegen, gleich sind.

Z. B. es sey  $XY$  (Fig 82. I. und II.) mit  $AC$  parallel, so daß  $ABC$  und  $XBY$  gleichwinklige Dreiecke sind. Ferner sey  $GYH$  und  $ECD$  grade und mit  $AB$  parallel,  $LXM$  und  $FAE$  grade und mit  $BC$  parallel, und  $IXYK$  und  $FBD$  grade und mit  $CA$  parallel, so daß

$BM$  und  $BG$  Parallelogramme unter den ähnlichliegenden Seiten  $BX$ ,  $BC$  und  $BY$ ,  $BA$ ;

$BK$  und  $AH$  Parallelogramme unter den ähnlichliegenden Seiten  $BX$ ,  $AC = XK$  und  $XY = BH$ ,  $BA$ ;

$BI$  und  $BN$  Parallelogramme unter den ähnlichliegenden Seiten  $BY$ ,  $AC = BF$  und  $XY = BL$ ,  $BC$  sind; so sind diese Parallelogramme einander gleich; nemlich:

$$1. (BX. BC) = (BA. BY),$$

$$2. (BX. AC) = (BA. XY),$$

$$3. (BY. AC) = (BC. XY).$$

**Beweis.**  $\alpha$ . Das Parallelogramm  $BM = (BX. BC)$  erhält man, wenn man von dem Dreieck  $ABC$  das Drei-

eck  $AXN$  wegnimmt und dagegen das Dreieck  $NMC$  zusetzt; also ist

$$\text{Parall. } BM = \triangle ABC - \triangle AXN + \triangle NCM.$$

Das Parallelogramm  $BG = (BA.BY)$  erhält man, wenn man von dem Dreieck  $ABC$  das Dreieck  $OYC$  wegnimmt und das Dreieck  $AOG$  zusetzt, so dass

$$\text{Parall. } BG = \triangle ABC - \triangle OYC + \triangle AOG.$$

Nun ist das Dreieck  $OYC$  dem Dreieck  $AXN$  gleich, denn die Seiten des einen sind den Seiten des andern gleich, nemlich: wegen der Parallelen ist  $OY = AX$ ,  $YC = XN$  und  $NC = XY = AO$ ; also,  $NO$  abgezogen, auch  $OC = AN$ . Auf dieselbe Weise ist das Dreieck  $AOG$  dem Dreieck  $NCM$  gleich; denn es ist, wie vorhin,  $AO = XY = NC$ ,  $AG = XN + NP = YC + NP = PM + NP = NM$  und  $GO = GP + OP = AX + OP = YO + OP = YP = MC$ . Also ist

$$\triangle OYC = \triangle AXN \text{ und } \triangle AOG = \triangle NCM,$$

folglich

$$\text{Parall. } BM = \text{Parall. } BG.$$

$\beta$ . Die Dreiecke  $ABC$  und  $DBC$  sind gleich, denn es ist  $BC = BC$ , und wegen der Parallelen,  $AB = CD$  und  $AC = BD$ . Aus demselben Grunde sind die Dreiecke  $BXY$  und  $BHY$  und die Dreiecke  $YOC$  und  $YKC$  gleich. Also sind die Parallelogramme  $AY$  und  $DY$  gleich; denn es ist  $\text{Parall. } AY = \triangle ABC - \triangle BXY - \triangle YOC$  und  $\text{Parall. } DY = \triangle DBC - \triangle BHY - \triangle YKC$ . Nun ist das Parallelogramm  $BK$  gleich der Summe der Parallelogramme  $HX$  und  $DY$ , und das Parallelogramm  $AH$  gleich der Summe der gleich grossen Parallelogramme  $HX$  und  $AY$ . Also ist

$$\text{Parall. } BK = \text{Parall. } AH.$$

$\gamma$ . Eben wie in ( $\beta$ .) wird bewiesen, dass die Parallelogramme  $BI$  und  $BN$  gleich gross sind; denn es ist  $\triangle ABC = \triangle ABF$ ,  $\triangle BLX = \triangle BYX$  u.  $\triangle AIX = \triangle ANX$ , wegen der gleichen Seiten zwischen Parallelen. Also ist  $\text{Parall. } XF = \text{Parall. } XC$ , und folglich  $\text{Parall. } LY + \text{Parall. } XF$  gleich  $\text{Parall. } LY + \text{Parall. } XC$ , das heisst:

$$\text{Parall. } BI = \text{Parall. } BN.$$

II. Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel der nemliche ist, und das Parallelogramm mit diesem Winkel, unter einer den Winkel einschliessenden Seite in einem Dreieck und der andern einschliessenden Seite im andern, ist so gross, als das gleichwinklige Parallelogramm unter der andern anliegenden Seite im ersten und der ersten anliegen-

den Seite im andern Dreieck, so sind die Dreiecke gleichwinklig und die Parallelogramme unter den übrigen ähnlich liegenden Seiten sind gleich groß.

Z. B. wenn in den Dreiecken  $ABC$  und  $DEF$  (Fig. 83.)  $E = B$  und

$$(ED \cdot BC) = (BA \cdot EF)$$

ist, so sind die Dreiecke  $ABC$  und  $DEF$  gleichwinklig, das heißt, es ist auch

$$A = D \text{ und } C = F.$$

**Beweis.** Man lege  $EF$  in  $BY$ .  $XY$  sey mit  $AC$  parallel, so sind in den gleichwinkligen Dreiecken  $ABC$  und  $XBY$  nach (I.) die Parallelogramme  $(BX \cdot BC)$  und  $(BA \cdot BY)$  gleich groß. Nun wird für den nemlichen Winkel  $E = B$ ,  $(ED \cdot BC) = (BA \cdot EF)$  vorausgesetzt. Desgleichen wird vorausgesetzt  $BY = EF$ , so daß

$$(BX \cdot BC) = (BA \cdot BY) \text{ und zugleich}$$

$$(ED \cdot BC) = (BA \cdot EF) = (BA \cdot BY)$$

ist. Daraus folgt

$$(BX \cdot BC) = (ED \cdot BC),$$

und mithin  $ED = BX$ , weil in gleich großen Parallelogrammen, wie  $(BX \cdot BC)$  und  $(ED \cdot BC)$ , mit gleichen Winkeln und einer gleichen Seite  $BC$ , auch die andere Seite  $BX$  gleich groß ist (§. 112.).

Also ist in den Dreiecken  $DEF$  und  $XBY$ ,  $EF = BY$ ,  $ED = BX$  und  $E = B$ . Folglich sind die Dreiecke gleich. Da nun die Dreiecke  $XBY$  und  $ABC$  gleichwinklig sind, indem  $XY$  mit  $AC$  parallel war, so sind auch die Dreiecke  $DEF$  und  $ABC$  gleichwinklig; wie behauptet wurde. Dann aber sind auch die Parallelogramme unter den übrigen, ähnlichliegenden Seiten, nach (I.), gleich groß.

### 133.

**Lehrsatz. I.** In zwei gleichwinkligen Dreiecken sind die Rechtecke unter einer beliebigen Seite des einen und einer beliebigen Seite des andern so groß, als die Rechtecke unter den andern ähnlichliegenden Seiten der Dreiecke.

Z. B. in den gleichwinkligen Dreiecken  $ABC$  und  $\alpha\beta\gamma$  (Fig. 84. I. und II.) sind folgende Rechtecke gleich groß:

$$1. [BC \cdot \alpha\gamma] = [AC \cdot \beta\gamma],$$

$$2. [CA \cdot \beta\alpha] = [BA \cdot \gamma\alpha],$$

$$3. [AB \cdot \gamma\beta] = [CB \cdot \alpha\beta].$$

**Beweis.** Man lege z. B. die Seite  $\alpha\gamma$  des kleinern Dreiecks in die Seite  $BC$  des größern, und den Punct  $\gamma$  in den Punct  $C$ , so wird die andere Seite  $\beta\gamma$ , an dem nemlichen Winkel, in die Seite  $AC$  fallen, weil die Winkel  $\gamma$  und  $C$  gleich seyn sollen.

Nimmt man nun auf den Seiten  $AC$  und  $BC$ ,  $E\gamma = \alpha\gamma$  und  $D\gamma = \beta\gamma$ , so ist das Dreieck  $D\gamma E$  dem kleinern Dreieck  $\alpha\beta\gamma$  gleich, weil zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in dem einen so groß sind, als in dem andern.

Nun ist der Winkel  $ADE$ , oder  $\delta$ , gleich  $2\varrho - \beta$  und der Winkel  $BED$ , oder  $\epsilon$ , gleich  $2\varrho - \alpha$ , weil  $ADC$  und  $BEC$  grade Linien sind; also sind in dem Viereck  $ABED$  die Summen der gegenüberliegenden Winkel  $B + \delta = B + 2\varrho - \beta$  und  $A + \epsilon = A + 2\varrho - \alpha$ , oder, weil  $B = \beta$ ,  $A = \alpha$  vorausgesetzt wird,

$$B + \delta = 2\varrho \text{ und } A + \epsilon = 2\varrho.$$

Folglich ist das Viereck  $ABDE$  centrisch nach den Ecken (§. 86. II.). Ist also  $M$  der Mittel-Punct dieses Vierecks, so ist

$$AM = BM = DM = EM.$$

Nun ist in dem gleichschenkligen Dreiecke  $MBE$ , für die Linie  $MC$ , die durch den Scheitel  $M$  geht, nach (§. 127.), das Rechteck unter Summe und Unterschied der Linien  $MB$  und  $MC$ , gleich dem Rechteck unter den Abschnitten  $BC$  und  $EC$ , das heißt, es ist

$$[MC + MB][MC - MB] = [BC \cdot \alpha C].$$

Auf dieselbe Weise ist in dem gleichschenkligen Dreiecke  $MAD$ , für die nemliche Linie  $MC$ , die durch den Scheitel  $M$  geht,

$$[MC + MA][MC - MA] = [AC \cdot \beta C].$$

Es ist aber  $MA = MB$ . Also ist

$$[MC + MB][MC - MB] = [MC + MA][MC - MA];$$

folglich ist auch  $[BC \cdot \alpha C] = [AC \cdot \beta C]$ , oder

$$[BC \cdot \alpha\gamma] = [AC \cdot \beta\gamma];$$

wie behauptet wurde (1.).

Eben so wird, wenn man die Winkel  $\alpha$  und  $A$  in einander legt, bewiesen, daß

$$[CA \cdot \beta\alpha] = [BA \cdot \gamma\alpha],$$

und wenn man die Winkel  $\beta$  und  $B$  in einander legt, daß

$$[AB \cdot \gamma\beta] = [CB \cdot \alpha\beta]$$

ist, wie in (2.) und (3.) behauptet \*).

II. Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel der nemliche ist, und das Rechteck unter einer, den Winkel einschliessenden Seite des einen und der andern einschliessenden Seite des andern ist so groß, als das Rechteck unter der andern einschliessenden Seite des

\*) Diesen Lehrsatz pflegt man gewöhnlich durch Proportionen, das heißt, mit Hülfe der Zahlen zu beweisen. Gräson hat gezeigt, daß der Satz, wie hier oben, auch ohne Hülfe der Zahl, durch blofse Anschauung bewiesen werden kann. Man sehe in den Memoiren der Academie der Wissenschaften zu Berlin, von den Jahren 1814 und 15 die Abhandlung unter dem Titel „Vereinfachung und Erweiterung der Euklidischen Geometrie“ vom Hrn. Gräson. Der Satz (§. 133.) nebst dem vorbereitenden Satze (§. 127.) und die Beweise der folgenden Sätze, die darauf beruhen, sind die dortigen. Es können dadurch, wenn man nicht sowohl die Gleichvielfachheit ähnlichliegender Seiten bey ähnlichen Figuren, wovon weiter unten, sondern nur die Gleichheit der Gröfse der Parallelogramme oder Rectangel unter ähnlichliegenden Seiten in Betrachtung ziehen will, auch mehrere Sätze von der Aehnlichkeit der Figuren bewiesen werden.



ersten und der ersten einschliessenden Seite des andern, so sind die Dreiecke gleichwinklig; auch sind die Rechtecke unter den übrigen ähnlichliegenden Seiten gleich.

Z. B. wenn in (Fig. 84. I. und II.) die Winkel  $\beta$  und  $B$  gleich sind; und es ist

$$[AB.\beta\gamma] = [BC.\alpha\beta],$$

so sind die Dreiecke  $ABC$  und  $\alpha\beta\gamma$  gleichwinklig, das heisst, es ist auch  $A = \alpha$ ,  $C = \gamma$ . Desgleichen ist

$$[CA.\beta\alpha] = [BA.\gamma\alpha] \text{ und } [BC.\alpha\gamma] = [AC.\beta\gamma].$$

*Beweis.* Der Beweis ist dem des Satzes (§. 132. II.) ähnlich, wenn man blofs Rechteck statt Parallelogramm setzt und den Beweis auf (§. 135. I.) gründet.

III. Wenn in zwei Dreiecken das Rechteck unter einer beliebigen Seite des einen und einer beliebigen Seite des andern, so gross ist, als das Rechteck unter einer der anstossenden Seiten im ersten und einer der anstossenden Seiten im andern Dreieck, zugleich aber die der grösseren von den zusammenstossenden Seiten gegenüberliegenden Winkel in den beiden Dreiecken gleich gross sind, so sind die Dreiecke gleichwinklig und die Rechtecke unter den übrigen ähnlichliegenden Seiten sind gleich gross.

Z. B. wenn in (Fig. 85.)

$$[AB.\beta\gamma] = [BC.\alpha\beta],$$

und es ist  $AB > BC$ ,  $\alpha\beta > \beta\gamma$  und  $C = \gamma$ , so sind die Dreiecke  $ABC$  und  $\alpha\beta\gamma$  gleichwinklig; also  $A = \alpha$  und  $B = \beta$ ; desgleichen ist

$$[AC.\alpha\beta] = [AB.\alpha\gamma] \text{ und } [BC.\alpha\gamma] = [AC.\beta\gamma].$$

*Beweis.* Es sey  $BY = \beta\gamma$  und der Winkel  $BYX$  gleich  $\gamma$ , also gleich  $C$ , so ist  $XY$  mit  $AC$  parallel; folglich sind die Dreiecke  $XBY$  und  $ABC$  gleichwinklig. Mithin ist zu Folge (1.)

$$[AB.BY] = [BC.BX].$$

Da nun  $BY = \beta\gamma$  seyn sollte, so ist auch

$$[AB.\beta\gamma] = [BC.BX].$$

Es wurde aber  $[AB.\beta\gamma] = [BC.\alpha\beta]$  vorausgesetzt. Also ist nothwendig  $[BC.BX] = [BC.\alpha\beta]$ , und folglich

$$BX = \alpha\beta \text{ (§. 112.)}$$

Daraus folgt, dass in den Dreiecken  $XBY$  und  $\alpha\beta\gamma$  die Seiten  $\alpha\beta$  und  $XB$ ,  $\beta\gamma$  und  $BY$  und die den grösseren gegenüber liegenden Winkel  $\gamma$  und  $Y$  gleich sind. Also sind die Dreiecke gleich (§. 53.) und folglich auch gleichwinklig. Da nun aber, wie vorhin bewiesen, auch die Dreiecke  $XBY$  und  $ABC$  gleichwinklig sind, so sind es auch die Dreiecke  $\alpha\beta\gamma$  und  $ABC$ , d. h. es ist auch  $A = \alpha$  und  $B = \beta$ . Die Gleichheit der Grösse der Rechtecke unter den übrigen ähnlichliegenden Seiten folgt nun aus (I.).

IV. Wenn in zwei Dreiecken das Rechteck unter der ersten Seite des einen und einer zweiten Seite des andern so gross ist, als das Rechteck unter der zweiten Seite des ersten und der ersten Seite des andern, desgleichen, wenn ein zweites Rechteck z. B. unter der zweiten Seite des ersten und der dritten Seite des andern so gross ist, als das Rechteck unter der dritten Seite des ersten und der zweiten Seite des andern, so sind die Dreiecke gleichwinklig, und auch das dritte Rechteck unter der dritten Seite des ersten

Dreiecks und der ersten des ändern ist so grofs, als das Rechteck unter der ersten Seite der ersten und der dritten Seite des ändern.

Z. B. wenn in (Fig. 85.)

$$[AB. \beta\gamma] = [\alpha\beta. BC] \text{ und } [BC. \gamma\alpha] = [\beta\gamma. CA]$$

ist, so ist

$$A = \alpha, B = \beta, C = \gamma \text{ und } [CA. \alpha\beta] = [\gamma\alpha. AB].$$

*Beweis.* Es sey  $BY = \beta\gamma$  und  $XY$  mit  $AC$  pallel, so sind die Dreiecke  $XYB$  und  $ABC$  gleichwinklig. Alsdann ist zu Folge (I.)

$$\begin{aligned} [AB. BY] &= [BX. BC] \text{ und} \\ [BC. XY] &= [BY. CA]. \end{aligned}$$

Da nun  $BY = \beta\gamma$  seyn soll, so ist auch

$$\begin{aligned} [AB. \beta\gamma] &= [BX. BC] \text{ und} \\ [BC. XY] &= [\beta\gamma. CA]. \end{aligned}$$

Es wurde aber

$$\begin{aligned} [AB. \beta\gamma] &= [\alpha\beta. BC] \text{ und} \\ [BC. \gamma\alpha] &= [\beta\gamma. CA] \end{aligned}$$

vorausgesetzt. Also ist nothwendig

$$BX = \alpha\beta \text{ und } XY = \gamma\alpha \text{ (§. 112.).}$$

Da nun auch  $BY = \alpha\gamma$  seyn sollte, so sind alle drei Seiten des Dreiecks  $XYB$  so grofs, als die drei Seiten des Dreiecks  $\alpha\beta\gamma$ ; folglich sind diese Dreiecke gleich (§. 52.). Die Dreiecke  $XYB$  und  $ABC$  sind aber gleichwinklig, also sind es auch die Dreiecke  $\alpha\beta\gamma$  und  $ABC$ ; welches das Erste war.

Ferner ist in den gleichwinkligen Dreiecken  $XYB$  und  $ABC$  auch

$$[CA. BX] = [XY. AB],$$

oder, weil  $BX = \alpha\beta$  und  $XY = \gamma\alpha$  war,

$$[CA. \alpha\beta] = [\gamma\alpha. AB];$$

welches das Zweite war.

### 134.

**Lehrsatz. 1.** In zwei gleichwinkligen Dreiecken sind die Parallelogramme mit beliebigem gleichen Winkel, unter einer beliebigen Seite des einen und einer beliebigen Seite des ändern Dreiecks so grofs, als die Parallelogramme von gleichen Winkeln unter ähnlichliegenden Seiten der Dreiecke.

Wenn z. B.  $ABC$  und  $XYB$  (Fig. 86.) zwei gleichwinklige Dreiecke sind, und es ist  $BK = BA$ ,  $BN = BX$ , auch  $KL$  und  $NP$  mit  $BC$ , und  $LY$  und  $PC$  mit  $BK$  pallel, so dafs  $BL$  und  $BP$  Parallelogramme mit dem beliebigen Winkel  $KBC$  unter  $BA$ ,  $BY$  und  $BX$ ,  $BC$  sind, so ist

$$\text{Parall. } BL = \text{Parall. } BP.$$

*Beweis.* Nach (§. 133. I.) ist

$$\text{Rechteck } BE = \text{Rechteck } BI,$$

wenn  $BD = BA$ ,  $BH = BX$ , und  $DBC$  ein rechter Winkel ist.

Nun sind  $BE$  und  $BI$  zugleich Rechtecke unter ähnlichliegenden Seiten der Dreiecke  $KBC$  und  $NYB$ , denn es wird vorausgesetzt  $KB = AB = DB$  und  $NB = XB = HB$ ; also sind diese Dreiecke  $KBC$  und  $NYB$ , nach (§. 133. II.) gleichwinklig.  $BL$  und  $BP$  sind aber Parallelogramme unter ähnlichliegenden Seiten dieser gleichwinkligen Dreiecke; also sind sie nach (§. 132. I.) gleich grofs.

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß die Parallelogramme mit beliebigem gleichem Winkel unter den andern ähnlichliegenden Seiten der gleichwinkligen Dreiecke  $ABC$  und  $XY$  gleich groß sind, wenn man andere Winkel dieser Dreiecke in einander legt.

## 135.

*Anmerkung.* Dieser Satz (§. 134.) hat ähnliche Gegensätze wie (§. 133.). Man findet sie und ihre Beweise, wenn man überall statt Rechteck oder statt Parallelogramm mit rechten Winkeln, Parallelogramm mit beliebigem Winkel setzt.

## 136.

*Anmerkung.* Der Unterschied der drei ersten Lehrsätze in (§. 132. 133. 134.) ist folgender.

Man stelle sich zwei gleichwinklige Dreiecke und ein Parallelogramm unter einer beliebigen Seite des einen und einer beliebigen, nicht-ähnlichliegenden Seite des andern Dreiecks, desgleichen ein Parallelogramm von gleichem Winkel unter den im ersten und im andern Dreieck anstoßenden Seiten vor, so wird bewiesen:

In (§. 132. I.) daß diese beiden Parallelogramme gleich groß sind, wenn ihr Winkel dem Winkel in den beiden Dreiecken gleich ist, unter deren Seiten sie liegen.

In (§. 133. I.) daß die beiden Parallelogramme gleich groß sind, wenn ihr Winkel ein rechter ist.

In (§. 134. I.) daß die beiden Parallelogramme gleich groß sind, wenn auch ihr Winkel beliebig ist.

Der Satz (§. 134. I.), enthält also auch die Sätze (§. 132. I.) und (§. 133. I.) einschließend; allein sie müssen ihm vorhergehen, weil er sich auf sie gründet.

## 137.

**Lehrsatz:** Das Quadrat der Seite eines regelmäßigen Fünfecks ist so groß als die Summe der Quadrate der Seiten des regelmäßigen Sechsecks und des regelmäßigen Zehnecks, von dem nemlichen Halbmesser der Ecken.

Wenn z. B.  $AD$  (Fig. 87.) die Seite eines regelmäßigen Fünfecks,  $AC$  die Seite eines regelmäßigen Sechsecks und  $AB$  die Seite eines regelmäßigen Zehnecks, sämtlich von gleichem Halbmesser der Ecken, ist, so daß  $AM = BM = CM = DM$ , so ist

$$[AD^2] = [AC^2] + [AB^2].$$

*Beweis.* Die Seite des regelmäßigen Sechsecks ist dem Halbmesser seiner Ecken gleich (§. 110.); also ist  $AC = AM = CM$ . Es sey der Winkel  $FMA$  dem Winkel  $FAM$  gleich, so ist das Dreieck  $FAM$  über  $AM$  gleichschenkelig. Nun ist auch das Dreieck  $DAM$  gleichschenkelig, über  $DA$ , und der Winkel  $DAM$  ist dem Winkel  $FAM$  gleich; also sind die Dreiecke  $FAM$

und  $DAM$  gleichwinklig. Aehnlichliegende Seiten derselben sind z. B.  $AM$ ,  $AF$  und  $AD$ ,  $AM$ . Also ist nach (§. 133. I.)  $[AM \cdot AM] = [AF \cdot AD]$ , oder, weil  $AM = AC$  ist,

$$1. [AC^2] = [AF \cdot AD].$$

Nun ist im regulären Fünfeck der Winkel  $AMD = \frac{4\rho}{5}$ , also jeder der Winkel  $DAM$  und  $ADM$

gleich  $\frac{1}{2} \left( 2\rho - \frac{4\rho}{5} \right) = \rho - \frac{2\rho}{5} = \frac{3\rho}{5}$ . Es sollte aber der Winkel  $FMA$  dem Winkel  $FAM$  oder  $DAM$  gleich seyn. Also ist auch der Winkel  $FMA = \frac{3\rho}{5}$ . Nun ist

im regulären Zehneck der Winkel  $BMA = BMD = \frac{4\rho}{10} = \frac{2\rho}{5}$ , also ist der Winkel  $BME = FMA - BMA = \frac{3\rho}{5} - \frac{2\rho}{5} = \frac{\rho}{5}$ . Folglich ist, weil  $BMD = \frac{2\rho}{5}$  war,

$BME = \frac{1}{2} BMD$ . Mithin halbirt die Linie  $ME$  den Winkel  $BMD$ , und folglich auch in dem gleichschenkligen Dreieck  $BMD$  die Grundlinie  $BD$  und steht darauf senkrecht (§. 69. I.). Also sind in dem rechtwinkligen Dreiecke  $BEF$  die beiden Seiten  $BE$  und  $EF$  und der rechte Winkel  $E$ , so groß als in dem rechtwinkligen Dreieck  $DEF$  die beiden Seiten  $DE$  und  $EF$  und der rechte Winkel  $E$ . Folglich sind die Dreiecke gleich, und folglich sind die Winkel  $BDF$  und  $DBF$  einander gleich. Aber auch in dem gleichschenkligen Dreiecke  $ABD$  sind die Winkel  $BDA$  und  $BAD$  gleich groß, weil  $AB = BD$  ist. Also sind die Dreiecke  $BDF$  und  $BAD$ , weil sie den Winkel  $D$  gemein haben, gleichwinklig. Aehnlichliegende Seiten derselben sind z. B.  $AB$ ,  $FD$  und  $AD$ ,  $BD = AB$ . Also ist nach (§. 133. I.)

$$2. [AB^2] = [FD \cdot AD].$$

Oben war  $[AC^2] = [AF \cdot AD]$  (1.). Also ist, zusammen genommen,

$$[AF \cdot AD] + [FD \cdot AD] = [AC^2] + [AB^2],$$

oder

$$[(AF + FD) \cdot AD] = [AC^2] + [AB^2] \text{ (118. I.)},$$

oder, weil  $AF + FD = AD$  ist,

$$[AD^2] = [AC^2] + [AB^2],$$

wie behauptet.

## 138.

**Lehrsatz.** In jedem Trapez sind die Rechtecke unter den zusammenstoßenden Theilen der Diagonalen, welche sie von einander abschneiden, gleich groß.

Z. B. wenn in (Fig. 88.)  $AB$  mit  $CD$  parallel, also  $ABCD$  ein Trapez ist, so ist

$$[AP \cdot PC] = [BP \cdot PD].$$

**Beweis.** Die Dreiecke  $APB$  und  $DPC$  sind gleichwinklig; denn die Scheitelwinkel bei  $P$  und die Wechselwinkel  $ABP$ ,  $PCD$  und  $BAP$ ,  $PDC$ , zwischen den Parallelen, sind gleich. Aehnlichliegende Seiten sind  $AP$ ,  $PD$  und  $BP$ ,  $PC$ ; also ist nach (§. 133. I.)

$$[AP \cdot PC] = [BP \cdot PD],$$

wie behauptet.

## 139.

**Zusatz.** Also sind in einem Trapez auch die von den Diagonalen und den nicht-parallelen Seiten eingeschlossenen Dreiecke gleich groß. Z. B. Dreieck  $APC$  = Dreieck  $BPD$  (Fig. 88.).

Denn da die Rechtecke unter  $AP$ ,  $PC$  und  $BP$ ,  $PD$  gleich groß sind (§. 138.), so sind auch die Parallelogramme unter diesen Linien, mit dem Winkel  $APC = BPD$ , gleich groß und von diesen Parallelogrammen sind die Dreiecke  $APC$  und  $BPD$ , welche von den Diagonalen und den nicht parallelen Seiten eingeschlossen werden, die Hälften.

## 140.

**Lehrsatz.** In jedem nach den Ecken centrischen Vierecke sind die Rechtecke unter den in graden Linien liegenden Stücken, welche die Diagonalen von einander abschneiden, gleich groß.

Z. B. wenn das Viereck  $ABCD$  (Fig. 53.) nach den Ecken centrisch ist, so ist

$$[AP \cdot PD] = [CP \cdot PB].$$

**Beweis.** Die Dreiecke  $APB$  und  $CPD$  sind gleichwinklig; denn es ist, zu Folge (§. 87.),  $a = \delta$ ,  $b = \beta$ . Aehnlichliegende Seiten sind  $AP$ ,  $CP$  und  $PB$ ,  $PD$ . Also ist, nach (§. 133. I.),

$$[AP \cdot PD] = [CP \cdot PB].$$

## 141.

In jedem nach den Ecken centrischen Vierecke sind die Rechtecke unter den Entfernungen des Durchschnitts-Puncts je zweier gegenüberliegender Seiten von den Ecken, in diesen Seiten, gleich groß.

Z. B. wenn das Viereck  $ABCD$  (Fig. 53.) nach den Ecken centrisch, und  $E$  der Durchschnitts-Punct der Seiten  $AB$  und  $CD$ ,  $F$  der Durchschnitts-Punct der Seiten  $AC$  und  $BD$  ist, so ist

$$[EA \cdot EB] = [EC \cdot ED] \text{ und}$$

$$[FA \cdot FC] = [FB \cdot FD].$$

**Beweis.** Die Summen gegenüberliegender Winkel des centrischen Vierecks  $ABCD$  sind gleich zwei rechten (§. 86. I.). Also ist  $\angle ACD + \angle ABD = \angle ACD + \angle ACE$ , denn auch die Summe der Nebenwin-

kel  $\angle ACD$  und  $\angle ACE$  beträgt zwei rechte; also ist  $\angle ABD = \angle ACE$ . Folglich sind die Dreiecke  $EAC$  und  $EBD$  gleichwinklig, denn sie haben ausserdem den Winkel  $E$  gemein. Aehnlichliegende Seiten dieser Dreiecke sind  $EA, ED$  und  $EC, EB$ . Also ist

$$[EA \cdot EB] = [ED \cdot EC] \text{ (§. 133. I.)}$$

Eben so wird bewiesen, dass die Dreiecke  $FAB$  und  $FCD$  gleichwinklig sind, und dass also

$$[FA \cdot FC] = [FB \cdot FD]$$

ist; wie behauptet.

## 142.

In jedem nach den Ecken centrischen Vierecke ist die Summe der Rechtecke unter den gegenüberliegenden Seiten dem Rechteck unter den Diagonalen gleich.

Wenn z. B. das Viereck  $ABCD$  (Fig. 53.) nach den Ecken centrisch ist, so ist

$$[AB \cdot CD] + [AC \cdot BD] = [AD \cdot BC].$$

Dieser Satz heisst auch, nach seinem Erfinder, der Ptolomäische.

*Beweis.* Es sey der Winkel  $KBD$  dem Winkel  $b$  gleich, so sind die Dreiecke  $ABC$  und  $KBD$  gleichwinklig; denn ausser  $KBD = b$  ist auch  $a = \alpha$  (§. 87.). Aehnlichliegende Seiten dieser Dreiecke sind  $AC, KD$  und  $BC, BD$ . Also ist, zu Folge (§. 133. I.),

$$1. [AC \cdot BD] = [KD \cdot BC].$$

Ferner sind die Dreiecke  $DBC$  und  $ABK$  gleichwinklig; denn es ist

$$\angle ABK = \angle ABD - \angle KBD = b + \gamma - b = \gamma,$$

weil  $KBD = b$  seyn sollte, also  $\angle ABK = \angle CBD$  und ausserdem  $\delta = d$  (§. 87.). Aehnlichliegende Seiten der Dreiecke  $DBC$  und  $ABK$  sind  $AB, BC$  und  $AK, CD$ . Also ist, zu Folge (§. 133. I.),

$$2. [AB \cdot CD] = [AK \cdot BC].$$

Zusammengenommen also ist, aus (1. 2.),

$$[AB \cdot CD] + [AC \cdot BD] = [AK \cdot BC] + [KD \cdot BC] = [(AK + KD) \cdot BC],$$

und, weil  $AK + KD = AD$  ist,

$$[AB \cdot CD] + [AC \cdot BD] = [AD \cdot BC];$$

wie behauptet.

## 143.

**Lehrsatz.** I. Wenn eine grade Linie durch eine beliebige Winkel-Spitze eines beliebigen Dreiecks den Winkel, durch dessen Spitze sie geht, halbiert, so ist das Rechteck unter einer an der halbirenden Linie liegenden Seite und dem Abschnitt an der andern Seite so gross, als das Rechteck unter dieser andern Seite und dem andern Abschnitt.

Z. B. wenn in (Fig. 89.)  $\beta = \gamma$  ist, so ist

$$[AB \cdot DC] = [AC \cdot BD].$$

*Beweis.* Es sey  $CAE$  eine grade Linie und  $AE = AB$ , so ist  $\epsilon = \varphi$  (§. 44. I.), also der äussere Winkel  $BAC$  des Dreiecks  $EAB$ , welcher  $\epsilon + \varphi$  ist, (§. 33. VI.), gleich  $2\epsilon$ ; mithin ist  $\beta + \gamma = 2\epsilon$ , und, weil  $\beta = \gamma$  seyn

soll,  $\gamma = \epsilon$ ; folglich ist  $EB$  mit  $AD$  parallel (§. 23. I.), und folglich sind die Dreiecke  $CAD$  und  $CEB$  gleichwinklig. Nun sey  $AF$  mit  $BC$  parallel, so sind auch die Dreiecke  $EFA$  und  $ADC$  gleichwinklig. Also ist, vermöge (§. 133. I.),

$$[EA.DC] = [AC.FA].$$

Es wird aber  $EA = BA$  vorausgesetzt, und vermöge der Parallelen ist  $FA = BD$ . Also ist

$$[AB.DC] = [AC.BD];$$

wie behauptet.

II. Wenn eine grade Linie durch eine beliebige Winkelspitze eines beliebigen Dreiecks geht, und das Rechteck unter einer an diese Linie anstossenden Seite des Dreiecks und dem Abschnitte an der andern Seite ist so groß, als das Rechteck unter der andern Seite und dem andern Abschnitte, so halbirte die Linie den Winkel des Dreiecks, durch dessen Scheitel sie geht.

Z. B. wenn in (Fig. 89.)

$$[AB.DC] = [AC.BD]$$

ist, so ist  $\beta = \gamma$ .

*Beweis.* Es sey  $GD$  mit  $AC$  parallel, so daß die Winkel  $GDB$  und  $ACD$  gleich sind, auch sey  $GD = AB$ . Da nun  $[AB.DC] = [AC.BD]$  vorausgesetzt wird, so ist  $[GD.DC] = [AC.BD]$ . Daraus folgt, vermöge (§. 133. II.), daß die Dreiecke  $GDB$  und  $ACD$  gleichwinklig sind, und daß folglich  $GB$  mit  $AD$  parallel ist. Schneiden sich nun  $GB$  und  $AC$  in  $E$ , so sind, die Winkel  $CEB$  und  $DGB$  gleich, weil  $CE$  und  $DG$  parallel sind. Also ist  $\epsilon = DGB = \gamma$ . Es ist aber auch, wegen der Parallelen,  $AE = GD$ , und da  $GD = AB$  war,  $AE = AB$ , folglich  $\epsilon = \varphi$  (§. 44. I.); und da wegen der Parallelen auch die Wechselwinkel  $\varphi$  und  $\beta$  gleich sind, so ist auch  $\epsilon = \beta$ . Mithin ist, weil vorhin  $\epsilon = \gamma$  war,  $\beta = \gamma$ ; wie behauptet.

144.

**Lehrsatz.** Wenn eine grade Linie durch eine Winkelspitze eines beliebigen Dreiecks den Winkel, durch dessen Spitze sie geht, halbirte, so ist das Rechteck unter den Seiten des Dreiecks, die den halbirten Winkel einschließen, so groß als die Summe des Rechtecks unter den beiden Abschnitten auf der dritten Seite, und des Quadrats der halbirenden Linie.

Z.

## 145. 146. Größte Figuren von gleich. Umfange. 113

**Z. B.** wenn in (Fig. 90.) die grade Linie  $BD$  den Dreiecks-Winkel  $B$  halbt, so daß  $\alpha = \beta$  ist, so ist  

$$[AB \cdot BC] = [AD \cdot DC] + [BD^2].$$

**Beweis.** Es sey der Winkel  $b$  dem Winkel  $\alpha$ , also auch dem Winkel  $\beta$  gleich, so sind die Dreiecke  $DBC$  und  $ADE$  gleichwinklig; denn außer den gleichen Scheitelwinkeln bei  $D$  sind die Winkel  $b$  und  $\beta$  gleich. Gleichliegende Seiten dieser Dreiecke sind  $AD$ ,  $BD$  und  $DE$ ,  $DC$ , also ist zu Folge (§. 133. I.)

$$1. [AD \cdot DC] = [BD \cdot DE].$$

Aber auch die Dreiecke  $ABE$  und  $DBC$  sind gleichwinklig; denn da in den Dreiecken  $DBC$  und  $ADE$ ,  $b = \beta$  und  $d = \delta$  ist, so ist auch der dritte Winkel  $c = \gamma$ , folglich ist in den Dreiecken  $ABE$  und  $DBC$ ,  $c = \gamma$ , und wie vorausgesetzt,  $\alpha = \beta$ . Aehnlichliegende Seiten dieser Dreiecke sind  $AB$ ,  $EB$  und  $BD$ ,  $CB$ . Also ist zu Folge (§. 133. I.)

$$2. [AB \cdot CB] = [BD \cdot EB].$$

Nun ist  $EB = DE + BD$ , also ist aus (2)

$$[AB \cdot CB] = [BD \cdot (DE + BD)] = [BD \cdot DE] + [BD^2],$$

folglich, weil vorhin  $[BD \cdot DE] = [AD \cdot DC]$  war (1.),  

$$[AB \cdot CB] = [AD \cdot DC] + [BD^2];$$

wie behauptet.

### Größere und kleinere Figuren von gleichem Umfange.

145.

**Erklärung.** Die Summe der Seiten einer Figur heißt *Umfang*. Figuren von gleichem Umfange und vielleicht verschiedener Gestalt und Fläche heißen *isoperimetrisch*.

146.

**Lehrsatz.** Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange und gleicher Grundlinie ist das größte das über der Grundlinie gleichschenklige.

**Erster Beweis.** Das Dreieck  $ABC$  (Fig. 91.) sey gleichschenklig über  $BC$ , also  $AB = AC$ .  $FAE$  sey mit  $BC$  parallel.  $BAD$  sey eine grade Linie und  $AD = AB$ . Wegen der Parallelen sind die Neigungswinkel  $DAE$  und  $ABC$  und die Wechselswinkel  $EAC$  und  $ACB$  gleich. Also sind auch die Winkel  $DAE$  und  $EAC$  gleich, weil die Winkel  $ABC$  und  $ACB$  in dem gleichschenkligen Dreiecke  $ABC$  gleich sind. Nun ist auch  $AD = AC$ , weil  $AD = AB$  seyn soll, und  $AE$  ist sich selbst gleich. Also sind in dem Dreiecke  $DAE$  die beiden Seiten  $AD$  und  $AE$ , nebst dem eingeschlossenen Winkel  $DAE$ , so groß als in dem Dreiecke  $EAC$  die beiden Seiten  $AC$  und  $AE$ , mit dem eingeschlossenen Winkel  $EAC$ . Also sind die Dreiecke



$DAE$  und  $EAC$  gleich, und folglich ist  $DE=EC$ . Nun ist  $DE+EB > BD$  (§. 49.). Also ist auch  $EC+EB > BD$ , oder  $EC+EB > AB+AD$ ; und, weil  $AD=AC$  ist,

$$EC+EB > AB+AC.$$

Die Dreiecke  $ABC$  und  $EBC$  haben aber gleiche Grundlinie und gleiche Höhe und folglich gleichen Inhalt. Also hat jedes, nicht gleichschenklige Dreieck  $EBC$  einen grössern Umfang, als ein gleich großes, gleichschenkliges Dreieck  $ABC$ .

Ein höheres oder größeres, nicht gleichschenkliges Dreieck, wie z. B.  $AGC$ , kann ferner keinen kleinern Umfang haben wie  $ABC$ , über derselben Grundlinie. Denn es ist in dem Dreieck  $BGH$ ,  $BG+GH > BH$  (§. 49.), und folglich  $BG+GC > BH+HC$ , mithin, weil wie vorhin bewiesen  $BH+HC > AB+AC$ , um so mehr,

$$GB+GC > AB+AC.$$

Also haben alle nicht gleichschenklige Dreiecke, die eben so hoch oder höher, das heißt, eben so groß oder größer sind, als ein gleichschenkliges Dreieck über derselben Grundlinie, einen größeren Umfang. Mithin kann ein nicht gleichschenkliges Dreieck, welches den nemlichen Umfang hat, wie ein gleichschenkliges über derselben Grundlinie, nur eine geringere Höhe und folglich nur einen geringeren Inhalt haben, und folglich ist unter allen Dreiecken von gleichem Umfange und gleicher Grundlinie das größte das über der Grundlinie gleichschenklige.

*Zweiter Beweis.* Man setze, die Dreiecke  $ACB$  und  $ADB$  (Fig. 92.) hätten gleichen Umfang, so daß also

$$CA+CB=DA+DB$$

ist.

Es sey  $ACH$  eine grade Linie,  $CH=CB$  und  $CE$  auf  $HB$ ,  $CI$  auf  $AB$  senkrecht. Alsdann sind die Winkel  $HCE$  und  $BCE$ , wie  $BCI$  und  $ACI$ , gleich (§. 59. III.). Also ist  $HCE+ACI=BCE+BCI=ECI$ , folglich ist  $ECI$  ein rechter Winkel, denn  $HCE+ACI+ECI$  ist gleich zwei rechten. Da also in dem Viereck  $EI$  drei Winkel bei  $I$ ,  $E$  und  $C$  rechte sind, so ist auch der vierte Winkel  $ABH$  ein rechter.

Nun sey der Winkel  $DAB$  in dem Dreieck  $DAB$ , welches nach der Voraussetzung mit  $CAB$  gleichen Umfang haben soll, kleiner als  $CAB$ , so ist der Winkel  $DBA$  nothwendig größer als  $CBA$ . Denn wäre  $DBA$  kleiner als  $CBA$ , z. B.  $LBA$ , so wäre  $LB+LA < CB+CA$  (§. 50.), und wäre  $DBA$  gleich  $CBA=MBA$ , so wäre  $MB+MA$ , weil  $MA < CM+CA$  ist (§. 49.), ebenfalls kleiner als  $CB+CA$ . Beides ist der Voraussetzung entgegen, weil  $DA+DB=CA+CB$  seyn soll. Folglich kann der Winkel  $DBA$  weder kleiner als  $CBA$ , noch ihm gleich seyn, und folglich ist nothwendig  $DBA > CBA$ ; also  $DBH < CBH$ .

Es sey  $DF$  auf  $HB$  senkrecht und  $GF=BF$ , so sind die Winkel  $DGB$  und  $DBG$  gleich. Also ist auch  $DGB$  kleiner als  $CBH$ . In dem Viereck  $ADGB$  ist also der Winkel  $DAB$  kleiner als  $CBA$  und der Winkel  $DGB$  kleiner als  $CBH$ , folglich ist die Summe der beiden Winkel  $DAB$  und  $DGB$  kleiner als  $ABG$ , oder kleiner als ein rechter, und folglich, da der dritte Winkel bei  $B$  ein rechter ist, der vierte Winkel  $ADG$ , nach innen zu, größer als zwei rechte, und folglich der äußere Winkel  $ADG$  kleiner als zwei rechte. Folglich ist  $ADG$  keine grade Linie, sondern  $AD+DG > AG$ , oder, weil  $DG=DB$  ist,  $DA+DB > AG$ . Es wird

# 147—149. Größte Figur. von gleich. Umfange. 115

aber vorausgesetzt, daß  $DA + DB = CA + CB$  seyn soll. Also ist  $CA + CB$ , oder, weil  $CB = CH$  ist,  $CA + CH$  oder  $AH > AG$ . Da nun bei  $B$  ein rechter Winkel ist, so ist  $HB > GB$  (§. 62. II.). Nun ist  $CI = EB = \frac{1}{2}HB$  und  $DK = FB = \frac{1}{2}GB$ . Also ist  $EB > FB$  oder  $CI > DK$ , das heißt: das gleichschenklige Dreieck  $ACB$  ist höher und folglich größer, als jedes nicht gleichschenklige Dreieck  $ADB$  von gleichem Umfange, über derselben Grundlinie; wie behauptet wird.

## 147.

**Lehrsatz.** Wenn in beliebig verschiedenen Dreiecken zwei Seiten in dem einen so groß sind als in dem andern, so ist dasjenige das größte, in welchem die beiden unveränderlichen Seiten einen rechten Winkel einschließen.

**Beweis.** In (Fig. 93.) sey das Dreieck  $ABC$  in  $B$  rechtwinklig. Beliebige andere Dreiecke  $DAB$ ,  $EAB$  etc. sollen, außer der Seite  $AB$ , die gleiche Seite  $DB = EB = \dots = CB$  haben. Alsdann sind alle diese Dreiecke kleiner als das Dreieck  $ABC$ ; denn, wenn  $DF$ ,  $EG$  etc. Perpendikel aus  $D$ ,  $E$  etc. auf  $AG$  sind, so sind diese Perpendikel sämtlich kürzer als die schrägen Linien  $DB$ ,  $EB$  (§. 63. IV.), und folglich sämtlich kürzer als  $CB$ . Nun sind  $DF$ ,  $EG$  etc. die Höhen der Dreiecke  $DAB$ ,  $EAB$  etc. und  $CB$  ist die Höhe des Dreiecks  $CAB$ , sämtlich über gleicher Grundlinie. Also sind alle die Dreiecke  $DAB$ ,  $EAB$  etc. kleiner als das rechtwinklige Dreieck  $CAB$  mit eben der Grundlinie  $AB$  und eben der einen gleichen Seite  $CB = DB = EB$  etc.

## 148.

**Lehrsatz.** Unter allen Vielecken von gleichem Umfange kann das größte nur gleiche Seiten haben.

**Beweis.** Gesetzt das Vieleck  $ABCDEF$  (Fig. 94.) habe nicht gleiche Seiten und es sey z. B. nicht  $AB = BC$ , so ist, wenn auch die übrige Figur  $ACDEF$  bleibt, schon mit der Summe der Seiten  $AB$  und  $BC$  ein über  $AC$  gleichschenkliges Dreieck  $AKC$  von gleichem Umfange möglich, welches größer ist als  $ABC$  (§. 146.). Eben so verhält es sich mit allen andern zusammenstoßenden Seiten. Also kann eine ungleichseitige Figur nie die größte unter allen von gleichem Umfange seyn, und die größte kann also nur gleiche Seiten haben.

## 149.

**Lehrsatz.** Wenn alle Seiten eines Vielecks, bis auf eine, gegeben sind, so kann das größte Vieleck, welches sich damit einschließen läßt, nur centrisch nach den Ecken seyn und den Mittelpunkt der Ecken in der Mitte der willkürlichen Seite haben.

**Beweis.** Die Seiten  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$  und  $FG$  des Vielecks  $ABCDEF$  (Fig. 95.) sollen die gegebenen seyn,  $AG$  die willkürliche. Schließen nun beliebige zwei Diagonalen von den Enden dieser willkürlichen Seite nach einer Ecke, z. B.  $AD$  und  $DG$ , in  $D$  nicht einen rechten Winkel ein, so läßt sich, wenn man die Figuren  $ABCD$  und  $DEFG$ , also auch die Diagonalen  $AD$  und  $DG$ , unverändert beibehält, mit diesen Diagonalen

ein größeres Dreieck  $ADG$  einschließen (§. 147.) und folglich mit den nemlichen Seiten ein größeres Vieleck  $ABCDEFGG$ . So verhält es sich mit den Diagonalen nach jeder andern Ecke. Das größte Vieleck, welches sich mit den gegebenen Seiten  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$  und  $FG$  einschließen läßt, kann also nur unter denjenigen seyn, in welchen alle die Winkel  $ABG$ ,  $ACG$ ,  $ADG$ ,  $AEG$  und  $AFG$  rechte sind. Ein solches Vieleck ist centrisch nach den Ecken und hat seinen Mittel-Punct der Ecken in der Mitte der willkührliche Seite  $AG$  (§. 106. II).

Es giebt aber nur ein solches Vieleck; denn alle dergleichen Vielecke mit den nemlichen gegebenen und einer willkührlichen Seite sind gleich (§. 105.). Also kann das größte Vieleck  $ABCDEFGG$  mit den gegebenen Seiten  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$  und  $FG$  nur das eine seyn, welches centrisch nach den Ecken ist und den Mittel-Punct der Ecken in der Mitte der willkührlichen Seite  $AG$  hat.

## 150.

**Lehrsatz.** Das größte, unter allen Vielecken mit den nemlichen Seiten, also von gleichem Umfange, ist centrisch nach den Ecken.

**Beweis.**  $ABCDEF$  (Fig. 96. I.) sey ein nach den Ecken centrisches Vieleck mit den gegebenen Seiten  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$  und  $FA$ ;  $M$  sey der Mittel-Punct der Ecken,  $AMZ$  eine grade Linie und  $AM = MZ$ ;  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\varphi$  (Fig. 96. II.) dagegen sey ein nicht centrisches Vieleck mit den nemlichen Seiten  $AB = \alpha\beta$ ,  $BC = \beta\gamma$ ,  $CD = \gamma\delta$ ,  $DE = \delta\epsilon$ ,  $EF = \epsilon\varphi$  und  $FA = \varphi\alpha$ . Auch sey  $DZ = \delta\zeta$  und  $ZE = \zeta\epsilon$ .

Nun ist zu Folge (§. 149.) das centrische Vieleck  $ABCDZ$  größer als jedes andere Vieleck mit den nemlichen Seiten  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  und  $DZ$  und einer willkührlichen Seite  $AZ$ , also größer als das nicht centrische Vieleck  $\alpha\beta\gamma\delta\zeta$ . Auf dieselbe Weise ist das Vieleck  $AFEZ$  größer als das Vieleck  $\alpha\varphi\epsilon\zeta$ . Zusammengenommen also ist das Vieleck  $ABCDZEF$  größer als jedes andere Vieleck  $\alpha\beta\gamma\delta\zeta\epsilon\varphi$ , mit den nemlichen Seiten. Die Dreiecke  $DZE$  und  $\delta\zeta\epsilon$  sind aber gleich, weil alle drei Seiten in dem einen so groß sind als in dem andern, folglich auch gleich groß. Zieht man daher diese gleichen Dreiecke ab, so folgt, daß auch das centrische Vieleck  $ABCDEF$  größer ist als jedes andere nicht centrische Vieleck  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\varphi$ , mit den nemlichen Seiten, oder von gleichem Umfange.

## 151.

**Lehrsatz.** Nach den Ecken centrische Vielecke, mit den nemlichen Seiten, sind auch dann noch gleich groß, wenn ihre Seiten in verschiedenor Ordnung aufeinander folgen.

**Beweis.** Zuerst folgt, daß die Halbmesser nach den Ecken centrischer Vielecke, wenn sie die nemlichen Seiten haben, nicht ungleich seyn können. Denn gesetzt, der Halbmesser des einen wäre kleiner als der Halbmesser des andern, so wären alle Winkel am Mittel-Puncte, über gleichen Seiten, in dem ersten größer als in dem andern, welches auf die Weise, wie in (§. 104.), bewiesen wird, folglich wären die Summen der Winkel am Mittel-Punct verschieden, was nicht seyn kann, da sie immer vier rechten gleich sind. Wäre der Halbmesser in dem einen Vieleck größer

als im andern, so wären alle Winkel am Mittel-Punct über gleichen Seiten, in dem ersten kleiner als in dem andern (§. 104.), also die Summen der Winkel am Mittel-Punct wiederum verschieden. Also können die Halbmesser der beiden Vielecke nicht ungleich seyn, sondern müssen gleich seyn. Dann aber sind die Dreiecke über gleichen Seiten gleich und folglich auch gleich groß. Mithin sind auch die Summen der Dreiecke um den Mittel-Punct, oder die Flächen der beiden Vielecke, gleich groß.

## 152.

**Lehrsatz.** Unter allen Vielecken von gleichem Umfange und gleich vielen Seiten ist das regelmässige das grösste.

**Beweis.** Nach (§. 148.) ist unter allen Vielecken von gleichem Umfange, das gleichseitige und nach (§. 150.) das nach den Ecken centrische das grösste. Also ist unter allen Vielecken von gleichem Umfange und gleich vielen Seiten das gleichseitige, welches zugleich centrisch nach den Ecken ist, das grösste, und dieses ist das regelmässige (§. 108. II.).

B. *Vergleichung der Grösse der Figuren mit Hülfe der Zahl, oder durch Rechnung.*

## 153.

**Erklärung.** Grössen heissen gleichartig, wenn sie durch Vermehrung und Verminderung aus einander entstehen können, ungleichartig, im entgegengesetzten Falle. In der Geometrie sind die Längen von Linien, die Winkel, die Inhalte begrenzter Flächen, die Inhalte von Körpern gleichartige Grössen; denn, wenn man Linien, oder Winkel, oder Flächen, oder Körper an einander setzt, oder von einander abschneidet, so entstehen wieder Linien, Winkel, Flächen und Körper. Hingegen Linien und Winkel, oder Linien und Flächen, oder Winkel und Körper u. s. w. sind ungleichartige Grössen, weil nie aus Linien Winkel, oder aus Linien Flächen, oder aus Winkel Körper u. s. w. entstehen können, wie man dergleichen Grössen auch an einander fügen, oder von einander wegnehmen mag.

## 154.

**Erklärung.** Nur gleichartige Grössen können mittelst der Zahl verglichen oder durch einander ausgedrückt oder gemessen werden, weil nur solche Grössen durch Aneinanderfügen und Voneinanderwegnehmen entstehen.

Die Bezeichnung gleichartiger Grössen durch die Zahl geschieht mittelst irgend einer Grösse derselben Art,

die auch eine der Vergleichenen selbst seyn kann, und welche Einheit heisst und immer durch 1 bezeichnet wird.

Man nimmt eine solche Einheit, die dann für alle zu vergleichenden Gröſsen derselben Art die nemliche bleibt, willkührlich an, und drückt durch Zahlen aus, wie oft die Einheit, oder irgend ein Theil derselben, aneinander gefügt oder von einer andern Gröſse derselben Art hinweggenommen werden muß, um die zu messende Gröſse genau oder näherungsweise zu bekommen. Nähert man sich bloß der auszudrückenden Gröſse, so kann auch bloß die Operation, durch welche die Näherung geschieht, durch irgend ein Zeichen angedeutet werden.

I. Ist eine Gröſse grade ein *Vielfaches der Einheit*, so wird dieselbe durch eine einzelne Zahl, oder durch eine sogenannte *ganze Zahl* ausgedrückt; denn die ganze Zahl ist das Zeichen des geschehenen Aneinanderfügens mehrerer gleichartiger Gröſsen. Wird z. B. zum Messen der Längen von beliebigen Linien die Länge der graden Linie  $AB$  (Fig. 97. I.) als Einheit angenommen, und also durch das Zeichen 1 bezeichnet, und muß dann diese Länge grade dreimal an einander gefügt werden, um eine andere Linie  $AC$  zu bekommen, so wird die Linie  $AC$  durch die ganze Zahl drei, und also durch das Zeichen 3 bezeichnet. Ist der Winkel  $ABC$  (Fig. 97. II.) das angenommene Maas oder die Einheit beliebiger Winkel, welches wiederum durch 1 bezeichnet wird, und der Winkel  $DBA$  entsteht durch fünfmaliges Aneinandersetzen des Winkels  $ABC$ , so wird der Winkel  $ABD$  durch die ganze Zahl fünf, und folglich durch das Zeichen 5 ausgedrückt. Ist das Quadrat  $AC$  (Fig. 97. III.) das angenommene Maas oder die Einheit beliebiger Flächen, welches dann wiederum durch 1 bezeichnet wird, und die Fläche  $AF$  entsteht durch zwölfmaliges Aneinandersetzen des Quadrats  $AC$ , so wird  $AF$  durch die ganze Zahl zwölf, und folglich durch das Zeichen 12 ausgedrückt u. s. w.

II. Ist umgekehrt die angenommene *Einheit* einer Gröſse grade ein *Vielfaches der zu messenden Gröſse*, so wird letztere durch einen Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner die Zahl des Vielfachen ist, ausgedrückt, und ist ein *aufgehender Theil* der Einheit. (Man sehe den ersten Band; Rechenkunst, zweiter Abschnitt.) Ist z. B. in (Fig. 97. I.), wie vorhin,  $AB = 1$ ,

und die Linie  $AD$  muß grade viermal aneinander gesetzt werden, um  $AB$  zu geben, so wird  $AD$  durch den Bruch  $\frac{1}{4}$  ausgedrückt. Ist in (Fig. 97. II.), wie vorhin, der Winkel  $ABC = 1$  und der Winkel  $ABE$  muß grade dreimal an einander gesetzt werden, um  $ABC$  zu geben, so wird  $ABE$  durch  $\frac{1}{3}$  ausgedrückt. Ist in (Fig. 97. III.), wie vorhin, das Quadrat  $AC = 1$ , und die Fläche  $AI$  muß grade sechsmal an einander gesetzt werden, um  $AC$  zu geben, so wird  $AI$  durch  $\frac{1}{6}$  ausgedrückt u. s. w.

III. Ist die zu messende und zu vergleichende Grösse grade ein Vielfaches eines aufgehenden Theils der Einheit, so wird sie durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Nenner die Zahl der Theile in der Einheit und dessen Zähler die Zahl solcher Theile in der zu messenden Grösse bezeichnet. (Rechenkunst, zweiter Abschnitt.) Ist z. B. in (Fig. 97. I.), wie vorhin,  $AB = 1$ , und der fünfte Theil von  $AB$  muß dreizehnmal an einander gesetzt werden, um  $AE$  zu geben, so wird  $AE$  durch den Bruch  $\frac{13}{5}$  ausgedrückt. Ist in (Fig. 97. II.), wie vorhin, der Winkel  $ABC = 1$ , und der dritte Theil dieses Winkels muß achtmal an einander gesetzt werden, um den Winkel  $ABF$  zu geben, so wird  $ABF$  durch  $\frac{8}{3}$  ausgedrückt. Ist in (Fig. 97. III.), wie vorhin, das Quadrat  $AC = 1$ , und die Hälfte davon muß elfmal an einander gesetzt werden, um die Figur  $AL$  zu geben, so wird die Fläche  $AL$  durch  $\frac{11}{2}$  ausgedrückt u. s. w.

IV. Ist endlich die zu messende Grösse weder ein Vielfaches der Einheit, noch ein Vielfaches irgend eines Theils derselben, sondern fällt zwischen zwei auf einander folgende Vielfachen irgend eines Theils der Einheit, so klein auch der Theil seyn mag, so ist sie *incommensurabel*: im Gegensatz von den Grössen in den vorigen Fällen, welche *commensurabel* sind. Man kann sich einer solchen Grösse nur durch Zusammen setzen commensurabler Grössen nach Belieben nähern. Die Grösse wird aber genau ausgedrückt, wenn man die Operation bezeichnet, durch welche man der Grösse ohne Ende näher kommen kann. Gesetzt, die Länge der Linie  $AE$ , oder die Grösse des Winkels  $ABG$ , oder der Inhalt der Figur  $AN$  (Fig. 97. I. II. III.) wäre von der Art, daß die Zahl, welche ausdrückt, wie Vielfaches diese Grössen von ihrer Einheit sind, diejenige ist,

welche mit sich selbst multiplicirt 5 giebt, so kann die Vielfachheit der benannten Gröſſen gegen die Einheit durch keine ganze Zahl und durch keinen Bruch ausgedrückt werden, weil es keine ganze Zahl und keinen Bruch giebt, die, mit sich selbst multiplicirt, die ganze Zahl 5 gäben, indem 5 nicht die zweite Potestät einer ganzen Zahl ist. Man kann sich also alsdann dem Ausdruck der Vielfachheit der Gröſſe, welche gemessen werden soll, nur durch Reihen, durch Kettenbrüche, oder durch andere Mittel, nach Belieben nähern. Gleichwohl wird die zu messende Gröſſe genau ausgedrückt, wenn man die Operation anzeigt, durch welche die Näherung geschieht, also in dem obigen Beispiele, wenn man die zu messende Gröſſe durch  $\sqrt{5}$  oder durch  $5^{\frac{1}{2}}$  bezeichnet; u. s. w.

So läßt sich jede Raum-Gröſſe, sie sey Linie, Winkel, Fläche oder Körper, durch eine Einheit ihrer Art, mit Hülfe der Zahl, ausdrücken, und man kann, wenn man Raum-Gröſſen, die verglichen werden sollen, durch Buchstaben, z. B. Linien, Winkel, Flächen und Körper durch  $a, b, c \dots \alpha, p \dots \alpha, \beta \dots$  und wie man sonst will, bezeichnet hat, unter diesen Buchstaben ohne Weiteres blos Zahlen verstehen, das heist, Zahlen im allgemeinen Sinne des Wortes (Rechenkunst, dritter Abschnitt) nicht ganze Zahlen allein, sondern eben so wohl Brüche und incommensurable, blos durch Operations-Zeichen angedeutete Zahlengröſſen, wie die Umstände sie erfordern.

## 155.

*Erklärung.* So wie der Ausdruck irgend einer Raumgröſſe, durch eine Einheit ihrer Art, vermittelt der Zahl geschieht, was nichts anderes ist als die Vergleichung der zu messenden Gröſſe mit einer andern, zur Einheit angenommenen, ihrer Art, so geschieht auch die gegenseitige Vergleichung beliebiger, auf diese Weise ausgedrückter gleichartiger Gröſſen durch die Zahl allein. So wie z. B. eine Linie, oder ein Winkel, oder eine Fläche, oder Körper  $a$ , das  $a$ fache der Einheit von Linie, Winkel, Fläche oder Körper und eine dergleichen Gröſſe  $b$  das  $b$ fache der nemlichen Einheit ist: so ist die erste Gröſſe  $a$ , das  $\frac{a}{b}$ fache der zweiten und die



zweite Grösse  $b$  das  $\frac{b}{a}$  fache der ersten; denn nimmt man das  $\frac{a}{b}$  fache der Grösse  $b$ , das heisst, multiplicirt man  $b$  mit  $\frac{a}{b}$ , so erhält man  $a$ , und nimmt man das  $\frac{b}{a}$  fache der Grösse  $a$ , das heisst, multiplicirt man  $a$  mit  $\frac{b}{a}$ , so erhält man  $b$ . Vergleicht man zwei gleichartige Grössen, so ist der Quotient der Zahlen, welche sie ausdrücken, nicht mehr eine Grösse eben der Art, sondern eine blofse Zahl, welche anzeigt, welches Vielfache die eine Grösse von der andern ist. Wären  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  vier verschiedene Linien, oder Winkel, oder Flächen, oder Körper, durch ihre Einheiten in Zahlen ausgedrückt, und man fände, dafs  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ist, so müfste man sagen, dafs  $a$  und  $c$  von  $b$  und  $d$  *Gleich-Vielfache* sind.

Wie sich in der Folge zeigen wird, können die Zahlen der Flächen-Einheiten in einer beliebigen Fläche allemal als das Product zweier Zahlen von Linien-Einheiten in zwei Linien, und die Zahlen der Körper-Einheiten in einem beliebigen Körper als das Product dreier Zahlen von Linien-Einheiten in drei Linien, oder auch als das Product zweier Zahlen, die eine von Linien-Einheiten in einer Linie, die andere von Flächen-Einheiten in einer Fläche betrachtet werden, was sich schon daraus schliessen läfst, dafs die Flächen allemal zwei Abmessungen, Länge und Breite, und die Körper drei Abmessungen, Länge, Breite und Höhe, haben (§. 4.). Das Product zweier und dreier Zahlen, wenn sie Linien bezeichnen, hat also allemal eine geometrische Bedeutung. Ersteres bedeutet eine Fläche, letzteres einen Körper. Das Product von vier, fünf und mehreren Zahlen dagegen, welche Linien bezeichnen, oder auch nur von zwei Zahlen, welche Flächen oder Körper bezeichnen, hat keine geometrische Bedeutung. Gleichwohl hindert nichts, dafs bei den Vergleichen von Räumen, Producte von mehr als drei Zahlen, die Linien oder Flächen etc. bezeichnen, vorkommen; denn durch Division, oder durch fernere Multiplication, lassen



sich dergleichen Producte allemal auf weniger als drei Abmessungen zurückbringen. Gesetzt z. B.  $a, b, c, d$  und  $p, q, r, s$  bezeichneten Linien, und man habe bei irgend einer Vergleichung gefunden, daß

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = p \cdot q \cdot r \cdot s$$

ist, so haben zwar die beiden Producte  $a \cdot b \cdot c \cdot d$  und  $p \cdot q \cdot r \cdot s$  an sich keine geometrische Bedeutung. Allein multiplicirt man die Zahlen  $a, b, c, d$  und  $p, q, r, s$  ferner, z. B. mit  $\frac{1}{d}$ , oder, was dasselbe ist, dividirt man sie durch  $d$ , so erhält man

$$a \cdot b \cdot c = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot s}{d} = pqr \frac{s}{d} = pqs \frac{r}{d} \text{ etc.}$$

und dieses drückt aus, daß der durch  $abc$  bezeichnete Körper das  $\frac{s}{d}$  fache des Körpers  $pqr$  oder das  $\frac{r}{d}$  fache des Körpers  $pqs$  ist, u. s. w.; denn  $\frac{s}{d}, \frac{r}{d}$  etc. sind, wie vorhin bemerkt, nicht mehr Linien, sondern bloße Zahlen. Dividirt man  $abcd = pqrs$  durch  $bd$ , so erhält man

$$ac = \frac{pqrs}{bd} = pq \frac{rs}{bd} = pr \frac{qs}{bd} \text{ etc.,}$$

welches ausdrückt, daß die durch  $ac$  bezeichnete Fläche das  $\frac{rs}{bd}$  fache der Fläche  $pq$  oder das  $\frac{qs}{bd}$  fache der Fläche  $pr$  ist, u. s. w. Denn z. B.  $\frac{rs}{bd}$  oder  $\frac{r}{b} \cdot \frac{s}{d}$  ist das Product von zwei bloßen Zahlen, und also ebenfalls eine Zahl u. s. w.

Es hindert also nichts, die Zahlen, welche Linien, Winkel, Flächen, Körper ausdrücken, durch so viele Multiplicationen und Divisionen, als man will, zusammenzusetzen, und damit, wie überall, mit bloßen Zahlen zu rechnen, worin eben der Vortheil der Anwendung der Zahl, oder der Rechenkunst auf die Geometrie besteht, dessen man entbehrt, wenn man bei der bloßen Anschauung bleibt; denn bei dieser ist man auf die drei Abmessungen des Raumes beschränkt, und kann Sätze, bei welchen es auf die Producte von mehr als drei Zahlen ankommt, nur mit

Mühe und durch fremdartige Vorstellungen anschaulich machen. Betrachtet man dagegen Raumgrößen als Zahlen ihrer Einheiten, so kann man mit diesen Zahlen, ohne weitere Rücksicht auf die Einheit, unbeschränkt rechnen, das heisst, sie allen den Verwandlungen unterwerfen, die aus den Verbindungen, in welche sie durch die Natur der Aufgabe gesetzt sind, für bloße Zahlen folgen. Will man dem Resultate wieder seine geometrische Bedeutung geben, so darf man dasselbe nur auf 1, 2 oder 3 Abmessungen bringen. Ausdrücke mit einer Abmessung können dann Linien oder Winkel, Ausdrücke mit zwei Abmessungen Flächen, und mit drei Abmessungen Körper bedeuten. Ausdrücke mit weniger als einer, oder mit mehr als drei Abmessungen sind aber allemal bloße Zahlen, die keine unmittelbare geometrische Bedeutung haben.

## 156.

*Erklärung.* Wenn Raum-Größen einerlei Art an einander gefügt werden, so werden sie offenbar größer, nimmt man sie von einander hinweg, kleiner. Nun kann man schon eine einzelne Grösse als durch Hinzufügung zu Null entstanden ansehen: es folgt also, dass, wenn z. B. eine Linie zu einer andern hinzugefügt wird, dieses Hinzufügen nur in derselben Richtung, oder die Linie fortsetzend, geschehen kann, und wenn eine Linie von einer andern hinweggenommen wird, dass es in entgegengesetzter Richtung, oder umkehrend, geschehen muss. Wenn also z. B. die Linie  $BC = b$  (Fig. 98.) zu der Linie  $AB = a$  hinzugefügt werden soll, und man nimmt an, dass die Linie von  $A$  ab nach  $B$ , nicht etwa von  $B$  ab nach  $A$ , größer wird, also in  $A$  der Nullpunkt ist, so muss nothwendig  $BC$ , wie in der Figur, an  $AB$  angesetzt werden, und die Linie  $AC$  wird dann durch  $a + b$  ausgedrückt. Soll hingegen die Linie  $BC = a$  hinweggenommen werden, so wird  $AB$  um eben so viel kleiner, und folglich muss  $BC$  von  $B$  nach  $A$  rückwärts genommen werden, so dass, wenn  $BD = BC = b$  ist, nur noch  $AD$  übrig bleibt. Dieses  $AD$  wird alsdann durch  $a - b$  ausgedrückt. In der That ist  $AD = a - b$  nichts anders als diejenige Linie, welche, wenn man zu derselben  $b = DB$  hinzuthut, wiederum  $AB = a$  giebt, wie es in dem Sinne des Zeichens — liegt (Rechenkunst,

§. 107.). Ist  $b$  größer als  $a$ , so fällt der Endpunct der Linie  $a - b$  über  $A$  hinaus, auf die entgegengesetzte Seite von  $A$ . Wäre z. B.  $b = EB$ , so wäre  $a - b = AE$  und negativ, während alle Linien auf der andern Seite von  $A$  nach  $C$  zu positiv sind. Das Negative ist also bei Linien dem Positiven, der Richtung nach entgegengesetzt: es liegt auf verschiedenen Seiten des Nullpunctes. Betrachtet man beliebige Längen auf der Linie  $AC$ , rechterhand des Punctes  $A$ , als positiv, so sind alle Längen linkerhand von  $A$ , negativ.

Giebt man hierauf überall Acht, so findet sich der Ausdruck der Linien blos nach den Regeln, denen die durch Addition und Subtraction zusammengesetzten Zahlen überhaupt unterworfen sind. Gesetzt man wolle die Linie  $DB$  durch die Linien  $AB$  und  $AD$  ausdrücken. Der Null-Punct mag in  $A$ , die beiden Linien  $AB$  und  $AD$  also mögen positiv seyn, und zwar sey  $AB = a$ ,  $AD = c$ . Alsdann ist offenbar  $DB = a - c$ ; denn, wenn  $AD = BF$ , so ist  $AF = a - c = DB$ . Nun sey  $c$  negativ, also etwa gleich  $AE$ , so ist nach derselben Regel  $EB = a - (-c) = a + c$ , und in der That ist, wenn z. B.  $BC = AE$  ist,  $EB = AC = a + c$ .

Bei Winkeln verhält es sich eben so. Wenn man die Winkel (Fig. 99.) von  $AC$  ab nach  $D$  zu rechnet, so sind die Winkel  $ACB$ ,  $ACD$ ,  $ACF$ , der äußere Winkel  $ACG$  und selbst größere Winkel, als  $4\varrho$ ,  $8\varrho$  etc., alle positiv, weil dergleichen immer größere Winkel durch Hinzufügung immer neuer Winkel entstehen. Hingegen Winkel, wie  $ACE$ ,  $ACK$  etc., auf der andern Seite von  $AC$ , die ebenfalls größer als  $4\varrho$ ,  $8\varrho$  etc. seyn können, sind alle negativ, weil sie entstehen, wenn man von einem positiven Winkel einen Winkel zurückrechnet, der größer ist als er.

## 157.

Anmerkung. Wenn also z. B.  $RP$  und  $QS$  (Fig. 100.) Coordinaten-Axen sind (§. 64.); und die Abscissen von  $A$  nach  $S$  zu, und die Ordinaten von  $A$  nach  $P$  zu, sind positiv, so sind die Abscissen von  $A$  nach  $Q$  zu und die Ordinaten von  $A$  nach  $R$  zu, in den entgegengesetzten Richtungen, negativ, und von allen Puncten, wie  $M$ , die in dem Winkel  $PAS$  liegen, sind die Abscissen und die Ordinaten positiv; von allen Puncten, wie  $N$ ,

## 158. 159. Vergl. d. Gröſſe d. Figur. durch d. Zahl. 125

die in dem Winkel  $PAQ$  liegen; sind die Abscissen negativ, die Ordinate positiv; von allen Punkten, wie  $U$ , in dem Winkel  $SAR$ , sind die Abscissen positiv, die Ordinate negativ und von allen Punkten, wie  $T$ , in dem Winkel  $QAR$ , sind die Abscissen und Ordinate negativ.

Die Ordinate aus einem Punkte  $AM$ ,  $AN$ ,  $AT$ ,  $AU$  sind alle positiv, nur der Ordinate-Winkel kann negativ seyn: z. B. wenn die Winkel, wie  $SAM$ ,  $SAN$  etc., positiv genommen werden, so sind die Winkel in der entgegengesetzten Richtung, wie  $SAU$ ,  $SAT$  etc., negativ.

### 158.

**Erklärung.** Wenn ungleichartige Gröſſen, z. B. Linien und Winkel, Linien und Flächen, Winkel und Körper etc. die auf irgend eine Weise von einander abhängen, die Eigenschaft haben, daſs, so lange die eine wächst oder abnimmt, die andere ebenfalls immer wächst, oder immer abnimmt, oder umgekehrt, nie die zweite vom Wachsen zum Abnehmen übergeht, so lange es nicht die erste auch thut, so sollen die Gröſſen zusammengehörig, und zwar, wenn sie beide zugleich immerfort wachsen oder immerfort abnehmen, gleichförmig zusammengehörig, wenn die eine abnimmt indem die andere wächst, entgegengesetzt zusammengehörig heißen.

### 159.

**Lehrsatz.** Wenn von zwei ungleichartigen, aber gleichförmig zusammengehörigen, von einander abhängigen Gröſſen  $A$  und  $B$  bewiesen werden kann, daſs, wenn  $A$  in das  $m$ -fache  $A$  oder in  $mA = P$  übergeht, aus  $B$  ebenfalls grade das  $m$ -fache  $B$ , oder  $mB = Q$  wird, wo  $m$  eine ganze Zahl oder einen Bruch bedeutet, so daſs also  $P$  und  $Q$  commensurable Gleich-Vielfache von  $A$  und  $B$  sind (§. 155.), so gilt das Nemliche auch, wenn  $mA$  mit  $A$  incommensurabel, oder wenn  $m$  eine irrationale Zahl ist, das heißt, auch dann gehört grade  $mB$  zu  $mA$ , und  $P$  und  $Q$  sind also immer Gleich-Vielfache von  $A$  und  $B$ ,  $m$  mag rational oder irrational seyn, mithin für jede beliebige Zahl  $m$ .

**Beweis.** Ginge, im Fall  $m$  irrational ist,  $B$  nicht grade in  $mB = Q$  über, wenn  $A$  in  $mA$  übergeht, so ginge es in eine gröſſere oder kleinere Gröſſe als  $mB$  über, z. B. in die gröſſere  $(m + e)B$ , wo  $e$

irgend eine Zahl ist. Es lassen sich aber Zahlen, namentlich Brüche, so nahe bei einander annehmen, als man will, also z. B. zwei Zahlen,  $p$  und  $q$ , die um weniger als  $e$  verschieden sind, was auch  $e$  seyn mag. Nun können zwischen den beiden Zahlen  $p$  und  $q$  nicht zwei andere, zugleich liegen, deren Unterschied gröfser ist, als der Unterschied von  $p$  und  $q$ , also lassen sich Brüche  $p$  und  $q$  annehmen, zwischen welchen  $m$  und  $m + e$  nicht zugleich liegen können. Ist also  $p$  kleiner und  $q$  gröfser als  $m$ , so liegt  $q$  nothwendig zwischen  $m$  und  $m + e$ , und folglich ist  $qB$  gröfser als  $mB$  und kleiner als  $(m + e)B$ , desgleichen ist  $qA$  gröfser als  $mA$ .

Nun nehme man an,  $A$  und  $B$  wachsen und  $A$  gehe zuerst in  $qA$  über, so mufs nothwendig, weil nach der Voraussetzung bewiesen werden kann, dafs für alle ganze Zahlen und Brüche, wie  $q$ ,  $B$  in das Gleichvielfache übergeht,  $qB$  aus  $B$  werden. Ginge nun weiter  $A$  von  $qA$  in  $mA$  über, so müfste  $qB$  in  $(m + e)B$  übergehen, weil nach der Voraussetzung, wenn  $mA$  aus  $A$  wird,  $B$  in  $(m + e)B$  übergeht. Aber  $qA$  ist gröfser als  $mA$ , hingegen  $qB$  ist kleiner als  $(m + e)B$ , also würde die eine Gröfse  $A$  von  $qA$  nach  $mA$  abnehmen, während die andere von  $qB$  nach  $(m + e)A$  wächst. Dieses ist der Voraussetzung entgegen, weil die Gröfsen gleichförmig zusammengehören, also immer nur zugleich wachsen und abnehmen sollen, nie abwechselnd. Also ist es unmöglich, dafs  $B$  in etwas Gröfseres als  $mB$  übergeht, während  $A$  von  $A$  nach  $mA$  kömmt.

Ganz auf dieselbe Art wird bewiesen, dafs aus  $B$  nichts Kleineres als  $mB$  werden kann, wenn aus  $A$ ,  $mA$  wird. Also mufs nothwendig immer  $B$  in  $mB = Q$  übergehen, wenn  $mA = P$  aus  $A$  wird; auch wenn  $m$  irrational ist, dafs heifst: auch dann sind  $P$  und  $Q$  Gleichvielfache von  $A$  und  $B$ . Folglich gilt eine Gleichvielfachheit, die für gleichförmig zusammengehörige commensurable Gröfsen bewiesen wird, auch ohne Ausnahme für gleichförmig zusammengehörige incommensurable Gröfsen \*).

---

\*) Man pflegt gewöhnlich diesen Satz bei jedem einzelnen Falle, wo er vorkommt, besonders zu beweisen. Da aber der Beweis immer der nemliche ist, und also nur wiederholt werden mufs, übrigens aber der Satz häufig vorkommt, so scheint es besser, ihn, wie hier, ein für allemal aufzustellen.

## 160.

**Lehrsatz.** Wenn, wie vorhin,  $A$  und  $B$  gleichförmig zusammengehörige Grössen sind, die nach irgend einem Gesetz von einander abhängen, und  $P$  ist der letzte, äusserste Werth von  $A$ , den  $A$  nicht überschreiten kann, also eine Grenze für  $A$ , der zu dem Werth  $P$  von  $A$  gehörige Werth von  $B$  aber ist  $Q$ , so ist auch  $Q$  eine Grenze für  $B$ , das heisst: wenn  $A$  und  $B$  zugleich wachsen und  $P$  ist das grösste  $A$ , so ist der zu diesem Werth  $P$  von  $A$  gehörige Werth  $Q$ , von  $B$  auch das grösste  $B$ , und wenn  $A$  und  $B$  zugleich abnehmen und  $P$  ist das kleinste  $A$ , so ist der zu  $P$  gehörige Werth  $Q$  von  $B$  auch das kleinste  $B$ .

**Beweis.** Im ersten Falle wächst  $A$  immerfort, bis zu  $P$ , und  $B$  mit  $A$ . Wäre nun der zu dem grössten Werth  $P$  von  $A$  gehörige Werth  $Q$  von  $B$  nicht das grösste  $B$ , so müste  $B$  irgendwo abgenommen haben, welches der Voraussetzung entgegen ist, weil  $A$  und  $B$  nur zugleich wachsen sollen. Also ist  $Q$  das grösste von allen  $B$ .

Im zweiten Falle nimmt  $A$  immerfort ab bis zu  $P$  und  $B$  mit  $A$ . Wäre nun der zu dem kleinsten Werthe  $P$  von  $A$  gehörige Werth  $Q$  von  $B$  nicht das kleinste  $B$ , so müste  $B$  irgendwo zugenommen haben, welches der Voraussetzung entgegen ist, weil  $A$  und  $B$  nur zugleich abnehmen sollen. Also ist  $Q$  das kleinste von allen  $B$ .

## 161.

**Lehrsatz.** Wenn  $a$  und  $b$  die Zahlen Ausdrücke zweier zusammenstossenden Seiten eines Parallelogramms von beliebigem Winkel, also die Zahlen der willkürlich angenommenen Linien-Einheit in den beiden Seiten sind, so ist das Product  $a \cdot b$  der Zahlen-Ausdruck des Flächen-Inhalts des Parallelogramms, nemlich die Zahl der Flächen-Einheiten in der Fläche desselben, welche Einheit ein Rhomboid mit den Seiten 1 und dem Winkel des Parallelogramms ist.

**Beweis.** Die willkürlich angenommene Linien-Einheit sey  $AE = AG = 1$  (Fig. 101.) und  $AF$  ein Parallelogramm, also ein Rhomboid, so ist dieses Rhomboid die Flächen-Einheit. Ist nun  $EP$  mit  $AC$  parallel, so gehören zu beliebigen gleichen Theilen der Linie  $AC$ , wie  $AG = GM$  etc. oder auch  $AQ = QS$  etc., gleiche

Parallelelogramme  $AF$ ,  $GN$  etc. oder  $AR$ ,  $QT$  etc.; denn die Seiten und Winkel dieser Parallelelogramme sind gleich (§. 83.). Ist also  $b$  eine ganze Zahl oder ein Bruch, so wird durch eben diese Zahl  $b$  auch die Fläche des Parallelelogramms  $AP$  ausgedrückt, weil zu jeder Linien-Einheit  $AG$  eine Flächen-Einheit  $AF$  gehört. Aber die Fläche  $AP$  wächst mit der Linie  $b$  zugleich. Also sind die Fläche  $AP$  und die Linie  $AC$  gleichförmig zusammengehörige Größen. Folglich wird, weil für jedes beliebige commensurable  $b$ , die Fläche  $AF = 1$  mit  $AG = 1$  zugleich in  $AP = b$  und  $AC = b$  übergeht, die Fläche  $AP$  auch dann noch durch  $b$  ausgedrückt, wenn  $b$  incommensurabel ist (§. 159.). Geht nun ferner  $AE = 1$  in  $AB = a$  über, so geht die Fläche  $AP = b$ , in so fern  $a$  commensurabel ist, in  $AD = a \cdot b$  über, weil zu jeder Einheit  $AE = EH$  etc. der Linie  $AB$  ein gleiches Parallelelogramm  $AP = EI = HL$  etc. von  $b$  Flächen-Einheiten gehört (§. 83.). Nun wächst die Fläche  $AD$  mit der Linie  $AB = a$  immer zugleich. Also sind wieder die Fläche und die Linie gleichförmig zusammengehörige Größen. Folglich wird, weil für jedes beliebige commensurable  $a$  die Fläche  $AP = b$ , mit  $AE = 1$  zugleich, in das  $a$ fache übergeht, die Fläche  $AD$  auch dann noch durch  $a \cdot b$  ausgedrückt, wenn  $a$  incommensurabel ist. Die Zahl der Flächen-Einheiten  $AF$  in dem Parallelelogramme  $AD$  ist also in allen Fällen, die Zahlen  $a$  und  $b$  der Linien-Einheiten in den Seiten  $AB$  und  $AC$  mögen ganze Zahlen, oder Brüche, oder incommensurabel seyn, dem Producte  $a \cdot b$  der Zahlen  $a$  und  $b$  gleich, und man findet sie, wenn man diese Zahlen mit einander multiplicirt.

Wenn z. B.  $AB = 5$   $AE = 5$  und  $AC = 3$   $AG = 3$  ist, so ist das Parallelelogramm  $AD = 5 \cdot 3$   $AF = 15$   $AF = 15$ .

Wenn  $AB = \frac{11}{2}$   $AE = \frac{11}{2}$ ,  $AC = \frac{10}{3}$   $AG = \frac{10}{3}$  ist, so ist das Parallelelogramm  $AD = \frac{11}{2} \cdot \frac{10}{3}$   $AF = \frac{110}{6}$   $AF = \frac{55}{3}$   $AF = \frac{55}{3}$ .

Wenn  $AB = 13\frac{1}{2}$   $AE = 13\frac{1}{2}$ ,  $AC = 10\frac{1}{2}$   $AG = 10\frac{1}{2}$  ist, so ist das Parallelelogramm  $AD = 13\frac{1}{2} \cdot 10\frac{1}{2}$   $AF = 13\frac{1}{2} \cdot 10\frac{1}{2}$  u. s. w.

*Zusätze* L Wenn das Parallelelogramm rechtwinklig ist, so ist die zugehörige Flächen-Einheit  $AF$  (Fig.



(Fig. 101.) ein Quadrat. Also findet man die Zahl der Quadrat-Einheiten in einem Rechteck, wenn man die Zahlen der Linien-Einheiten in den beiden Seiten mit einander multiplicirt, die Zahlen mögen ganz, oder gebrochen, oder incommensurabel seyn.

II. Die Zahl der Quadrat-Einheiten in einem Quadrat also findet man, wenn man die Zahl der Längen-Einheiten in den Seiten mit sich selbst multiplicirt, die Zahl mag ganz, oder gebrochen, oder incommensurabel seyn.

III. Die Zahl der Quadrat-Einheiten in einem Parallelogramm findet man, wenn man die Zahl der Linien-Einheiten in Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt, die Zahlen mögen ganz, oder gebrochen, oder incommensurabel seyn.

Denn das Parallelogramm ist so groß als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 115. I.).

IV. Die Zahl der Quadrat-Einheiten in einem Dreieck findet man, wenn man die Zahlen der Linien-Einheiten in Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt und davon die Hälfte nimmt, oder auch, wenn man die Zahl der Linien-Einheiten in der halben Grundlinie mit denen in der ganzen Höhe, oder die Zahl der Linien-Einheiten in der ganzen Grundlinie mit denen in der halben Höhe multiplicirt, die Zahlen mögen ganz, oder gebrochen, oder incommensurabel seyn.

Denn das Dreieck ist halb so groß, als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 117. I.).

### 163.

*Anmerkung.* Der Kürze wegen pflegt man die Zahl der Quadrat-Einheiten in einer Fläche blos Fläche oder Inhalt, und die Zahl der Linien-Einheiten in einer Linie blos Linie zu nennen, und sagt also z. B. der Inhalt eines Rechtecks werde gefunden, wenn man seine Seiten mit einander multiplicirt, worunter die Zahlen der Flächen- und Linien-Einheiten verstanden werden; denn Linien kann man nicht mit einander multipliciren, sondern nur Zahlen.



## 164.

**Lehrsatz.** Die Flächen zweier Parallelogramme, oder zweier Rechtecke, oder zweier Dreiecke und ihre Grundlinien sind von einander Gleichvielfache, wenn die Figuren gleiche Höhe haben, und haben sie gleiche Grundlinien, so sind ihre Flächen und ihre Höhen von einander Gleichvielfache.

**Beweis.** Denn die gleiche Höhe zweier Parallelogramme, oder Rechtecke, oder Dreiecke sey  $b$ , die Grundlinie des ersten sey  $a$ , des zweiten  $c$ , so sind die Inhalte der Parallelogramme oder Rechtecke gleich  $ab$  und  $cb$ , und die Inhalte der Dreiecke gleich  $\frac{1}{2}ab$  und  $\frac{1}{2}cb$  (§. 162.). Nun ist

$$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c} \text{ und } \frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{1}{2}cb} = \frac{a}{c},$$

also sind die Inhalte und die Grundlinien Gleichvielfache. Auf dieselbe Weise wird der Satz bewiesen, wenn die Grundlinien gleich und die Höhen verschieden sind.

## 165.

**Lehrsatz.** Summen und Unterschiede von Parallelogrammen oder Dreiecken von beliebigen gleichen oder ungleichen Winkeln und Grundlinien, aber gleichen Höhen, sind so groß als ein Parallelogramm oder Dreieck von eben der Höhe, dessen Grundlinie so groß ist als Summe und Unterschied der Grundlinien der einzelnen Parallelogramme oder Dreiecke. Eben so verhält es sich mit Parallelogrammen oder Dreiecken von gleichen Grundlinien und verschiedenen Höhen.

**Beweis.** Die gleiche Höhe der Parallelogramme oder Dreiecke sey  $h$ , ihre Grundlinien sollen  $a, b, c$  etc. seyn, so sind die Inhalte der einzelnen Parallelogramme  $ah, bh, ch$  etc., und die Inhalte der Dreiecke  $\frac{1}{2}ah, \frac{1}{2}bh, \frac{1}{2}ch$  .... (§. 162.). Der Inhalt eines Parallelogramms von gleicher Höhe, dessen Grundlinie, Summe oder Unterschied der einzelnen Grundlinien ist, ist aber gleich  $(a + b + c \dots)h$  und  $(a - b)h$ . Der Inhalt eines solchen Dreiecks ist  $\frac{1}{2}(a + b + c \dots)h$  und  $\frac{1}{2}(a - b)h$ . Diese Inhalte sind der Summe oder dem Unterschiede der einzelnen Parallelogramme und Dreiecke gleich, denn es ist

$$(a + b + c \dots)h = ah + bh + ch \dots \text{ und } (a - b)h = ah - bh,$$

166. 167. *Vergl. d. Grösse d. Figur. durch d. Zahl.* 131

$$\frac{1}{2}(a + b + c \dots)h = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}ch \dots$$

$$\frac{1}{2}(a - b)h = \frac{1}{2}ah - \frac{1}{2}bh.$$

Der Beweis für den Fall gleicher Grundlinien und verschiedener Höhen ist dem vorigen gleich.

166.

*Anmerkung.* Die Sätze (§. 119. II. III. IV.) findet man hier, wie nachstehend:

I. Das Quadrat über der Summe zweier beliebigen graden Linien ist so groß als die Summe der Quadrate der einzelnen Linien und des zwiefachen Rechtecks unter den nemlichen Linien; und umgekehrt.

Denn wenn die beiden Linien  $a$  und  $b$  sind, so ist ihre Summe  $a + b$ . Ein Quadrat aber, dessen Seite  $a + b$  ist, ist gleich  $(a + b)(a + b) = a^2 + b^2 + 2ab$ ; welches der Satz ist.

Umgekehrt ist auch  $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$ .

II. Das Quadrat über dem Unterschiede zweier beliebigen Linien ist so groß als die Summe der Quadrate der einzelnen Linien, weniger dem zwiefachen Rechteck unter den nemlichen Linien; und umgekehrt.

Denn wenn die beiden Linien  $a$  und  $b$  sind, so ist ihr Unterschied  $a - b$ . Ein Quadrat mit der Seite  $a - b$  aber ist gleich  $(a - b)(a - b) = a^2 + b^2 - 2ab$ ; welches der Satz ist.

Umgekehrt ist auch  $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$ .

III. Ein Rechteck, dessen eine Seite die Summe und dessen andere der Unterschied zweier Linien ist, ist so groß als der Unterschied der Quadrate der beiden Linien; und umgekehrt.

Denn wenn die beiden Linien  $a$  und  $b$  sind, so ist ihre Summe  $a + b$  und ihr Unterschied  $a - b$ . Der Inhalt eines Rechtecks aber, dessen Seiten  $a + b$  und  $a - b$  sind, ist  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ; welches der Satz ist.

Umgekehrt ist auch  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ .

167.

*Zusatz.* Den Inhalt eines Trapezes findet man, wenn man die Summe der parallelen Seiten mit der Höhe multiplicirt und davon die Hälfte nimmt, oder auch, wenn man, schon vor der Multiplication, von einem der Factoren die Hälfte nimmt und diese Hälfte mit dem andern Factor multiplicirt.

Denn die Fläche eines Trapezes  $ABCD$  (Fig. 102.) ist gleich der Summe der Flächen zweier Dreiecke  $ABD$  und  $ACD$  von gleicher Höhe, deren Inhalte also zusammen der Hälfte des Products der Summe ihrer Grundlinien  $AB$  und  $CD$  in ihre gemeinschaftliche Höhe (das Perpendikel zwischen den Parallelen) gleich sind.

168.

*Anmerkung.* Wenn beide Seiten eines Parallelogramms, z. B. eines Rechtecks, positiv sind, so ist auch der Inhalt positiv. Ist eine Seite negativ, so ist der Inhalt negativ; sind aber beide Seiten negativ, so ist der Inhalt wieder positiv.

Dieses folgt aus den Regeln der Multiplication von Zahlen (Rechenkunst §. 117.). Denn, wenn die beiden Seiten des Rechtecks  $+a$  und  $+b$  sind, so ist der Inhalt  $(+a).(+b)$  gleich  $+ab$ . Sind die Seiten  $+a$  und  $-b$ , oder  $-a$  und  $+b$ , so ist der Inhalt  $(+a).(-b)$  gleich  $-ab$ , oder  $(-a).(+b)$  ebenfalls gleich  $-ab$ . Sind hingegen die Seiten  $-a$  und  $-b$ , so ist der Inhalt  $(-a).(-b)$  gleich  $+ab$  (Rechenkunst §. 117.).

An der Figur lassen sich diese Resultate, wie folgt, sehen. Es sey  $A$  (Fig. 103.) der Anfangs-Punct der Seiten des Rechtecks. Nach der rechten Hand und nach oben sollen die positiven Seiten gerechnet werden; so muß nothwendig auch der positive Inhalt innerhalb  $BAD$  liegen, und es ist also z. B. das Rechteck  $AC$  nothwendig positiv.

Soll nun ein anderes Rechteck z. B. dieselbe Höhe, aber eine negative Grundlinie haben, so muß man, nach dem Sinne des Negativen, etwas Größeres, als sie selbst ist, in der Richtung des Positiven, zu ihr hinzuthun müssen, um eine positive Grundlinie zu bekommen. Eine solche Grundlinie also würde z. B.  $AF$  seyn; denn zu dieser muß man, von  $F$  an, nach der Rechten zu, etwas Größeres als  $AF$ , z. B.  $FD$  hinzuthun, um eine positive Grundlinie  $AD$  zu bekommen. Das zu der Grundlinie  $AF$  gehörige Rechteck ist  $AE$ . Dieses Rechteck ist aber nothwendig negativ, weil man auch zu ihm ein Größeres, als es selbst ist, namentlich das Rechteck  $FC$ , nach der Rechten zu hinzuthun muß, um das zu der positiven Grundlinie  $AD$  gehörige Rechteck  $AC$  zu bekommen. Also ist ein Rechteck unter einer negativen Grundlinie und einer positiven Höhe negativ.

Eben so verhält es sich, wenn die Rechtecke gleiche Grundlinien, aber verschiedene Höhen haben sollen. Soll ein Rechteck  $AI$  mit der nemlichen Grundlinie  $AD$  die negative Höhe  $AH$  haben, so ist es nothwendig negativ, denn man muss, nach oben zu, das grössere Rechteck  $HC$  hinzuthun, um das zu der positiven Höhe  $AB$  gehörige positive Rechteck  $AC$  zu bekommen.

Anders aber verhält es sich, wenn Grundlinien und Höhen, also beide Seiten zugleich negativ seyn sollen, und wenn also z. B. von dem Rechteck  $AG$  die Rede ist. Thut man zu der negativen Höhe  $AH$  dieses Rechtecks die positive Linie  $HB$  hinzu, so bekommt man die positive Höhe  $AB$ , und das zu dieser positiven Höhe und der negativen Grundlinie  $AF$  gehörige Rechteck  $AE$  ist negativ. Eben so ist das zu der positiven Höhe  $BH$  und negativen Grundlinie  $AF$  gehörige Rechteck  $HE$ , wie vorhin bewiesen, negativ. Wäre nun das Rechteck  $AG$  negativ, so würde man, wenn man zu demselben das negative Rechteck  $HE$  hinzuthäte, nicht das negative Rechteck  $AE$  allein, wie es seyn soll, sondern ausser demselben noch das negative Rechteck  $AG$ , doppelt bekommen. Eben so verhält es sich, wenn man zu der negativen Grundlinie  $AF$  die positive Linie  $FD$  und zu dem Rechteck  $AG$  das negative Rechteck  $GD$  hinzuthäte. Also kann das Rechteck  $AG$  nicht negativ seyn, sondern es ist vielmehr positiv.

## 169.

**Lehrsatz. I.** Die Seiten eines beliebigen Dreiecks sind von den ähnlichliegenden Seiten eines beliebigen andern gleichwinkligen Dreiecks Gleichvielfache. Desgleichen sind ähnlichliegende Seiten gleichwinkliger Dreiecke von einander Gleichvielfache.

Z. B. wenn  $ABG$  (Fig. 104. I. und II.) und  $DEF$  (Fig. 104. III. und IV.) gleichwinklige Dreiecke sind, so ist

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{d}{e}, \frac{b}{c} = \frac{e}{f}, \frac{c}{a} = \frac{f}{d}.$$

**Beweis.** Man lege z. B. die Seite  $ED = d$  in  $BG$ , so fällt  $EF = e$  in  $BH$ , weil die Winkel  $B$  und  $E$  gleich sind, und die Dreiecke  $GBH$  und  $DEF$  sind gleich; denn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind in dem einen so gross, als in dem andern. Also sind

die Winkel  $GHB$  und  $ACB$  gleich; denn, weil die Dreiecke  $GBH$  und  $DEF$  gleich sind, so sind die Winkel  $GHB$  und  $DFE$  gleich, und nach der Voraussetzung sollen die Winkel  $DFE$  und  $ACB$  gleich seyn: folglich ist  $GH$  mit  $AC$  parallel. Nun haben die Dreiecke  $AGH$  und  $CGH$  gleiche Grundlinie  $GH$  und gleiche Höhen zwischen den Parallelen  $AC$  und  $GH$ , also sind sie gleich groß (§. 117. III.), folglich sind auch, wenn man zu beiden das Dreieck  $GBH$  hinzuthut, die Dreiecke  $ABH$  und  $GBC$  gleich groß.

Aber die Dreiecke  $ABH$  und  $GBH$  haben über den Grundlinien  $AB$  und  $GB$  einerlei Höhe, denn sie haben einen gemeinschaftlichen Scheitel  $H$ . Also sind ihre Inhalte und ihre Grundlinien von einander Gleichvielfache (§. 164.), das heißt, es ist

$$\frac{\triangle ABH}{\triangle GBH} = \frac{AB}{GB} = \frac{AB}{ED} = \frac{a}{d}.$$

Eben so haben die Dreiecke  $CBG$  und  $HBG$ , über den Grundlinien  $CB$  und  $HB$ , einerlei Höhe, denn sie haben einen gemeinschaftlichen Scheitel  $G$ . Also sind ihre Inhalte und ihre Grundlinien ebenfalls Gleichvielfache (§. 164.), d. h. es ist

$$\frac{\triangle CBG}{\triangle HBG} = \frac{b}{e}.$$

Nun aber sind die Dreiecke  $ABH$  und  $CBG$ , wie vorhin bewiesen, gleich groß, und das Dreieck  $GBH$  oder  $HBG$  ist sich selbst gleich. Also ist

$$\frac{\triangle ABH}{\triangle GBH} = \frac{\triangle CBG}{\triangle HBG};$$

folglich ist auch

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e},$$

d. h. die gleichliegenden Seiten  $a$ ,  $d$  und  $b$ ,  $e$  sind von einander Gleichvielfache.

Auf dieselbe Weise wird, wenn man die andern Winkel in einander legt, bewiesen, daß auch die andern gleichliegenden Seiten von einander Gleichvielfache sind. Also ist

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e}, \quad \frac{b}{e} = \frac{c}{f}, \quad \frac{c}{f} = \frac{a}{d},$$

oder, zusammengenommen,

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f};$$

welches das Erste war.

Aus diesen Gleichungen folgt weiter das Zweite, nemlich:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{e}, \quad \frac{b}{c} = \frac{e}{f}, \quad \frac{c}{a} = \frac{f}{d}.$$

II. Wenn ein Winkel eines Dreiecks so gross ist, als ein Winkel eines andern und die beiden Seiten, die ihn einschliessen, in dem einen Dreiecke sind von denen im andern, oder auch beide Seiten-Paare von einander Gleichvielfache, so sind die Dreiecke gleichwinklig und auch die andern Seiten sind von einander Gleichvielfache.

Z. B. wenn in (Fig. 104.)  $E = B$  und  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$ , oder, was das nemliche ist,  $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$  ist, so sind die Dreiecke  $ABC$  und  $DEF$  gleichwinklig; auch ist  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ .

*Beweis.* Man lege die Seite  $ED = d$  in  $BG$ , so fällt die Seite  $EF = e$  in die Seite  $BC$ , weil die Winkel  $B$  und  $E$  gleich seyn sollten. Fiele nun der Punct  $F$  nicht in  $H$ , sondern vielleicht in den Punct  $K$ , so dafs  $BK = e$  und  $KG$  nicht mit  $AC$  parallel wäre, sondern  $GH$  wäre mit  $AC$  parallel, so könnte auch nicht  $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$

seyn, denn wie in (I.) bewiesen, ist  $\frac{a}{b} = \frac{d}{BH}$ . Also kann  $F$  nur in  $H$  fallen und  $GH$  mufs mit  $AC$  parallel seyn. Dann aber sind, vermöge der Parallelen, die Winkel bei  $G$  und  $H$  den Winkeln bei  $A$  und  $C$  gleich. Nun sind die Dreiecke  $GBH$  und  $DEF$  gleich, weil zwei Seiten und der Winkel, den sie einschliessen, in dem einen so gross sind, als in dem andern. Also sind auch die Winkel  $C$  und  $A$  den Winkeln  $F$  und  $D$  gleich, und folglich sind die Dreiecke  $ABC$  und  $DEF$  gleichwinklig; woraus auch, vermöge (I.),  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$  folgt.

III. Wenn zwei Seiten eines Dreiecks von zwei Seiten eines andern, oder auch beide von einander Gleichvielfache sind, und der der grössern von den beiden Seiten gegenüberliegende Winkel ist in dem einen Dreieck so gross als in dem andern, so sind die Dreiecke gleichwinklig

und auch die übrigen Seiten sind von einander Gleichvielfache.

Z. B. wenn in (Fig. 104.)  $a > b$ ,  $d > e$ ,  $C = F$  und  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$  ist, so sind die Dreiecke  $ABC$  und  $DEF$  gleichwinklig, und es ist

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}.$$

*Beweis.* Es sey  $BH = EF$  und  $HG$  mit  $AC$  parallel, so sind die Dreiecke  $GBH$  und  $ABC$  gleichwinklig; also ist zu Folge (I.)  $\frac{a}{BG} = \frac{b}{BH}$ . Es war aber  $BH = EF = e$ . Also ist  $\frac{a}{BG} = \frac{b}{e}$ . Nun soll nach

der Voraussetzung  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$  seyn. Also ist  $BG = d = ED$ .

In den Dreiecken  $GBH$  und  $DEF$  sind also die Seiten  $BG$  gleich  $d$ ,  $BH$  gleich  $e$ , und der der größern von ihnen gegenüber liegende Winkel  $H$  ist dem Winkel  $F$  gleich, weil wegen der Parallelen  $H = C$  war und  $C$  nach der Voraussetzung gleich  $F$  seyn soll. Also sind die Dreiecke  $GBH$  und  $DEF$  gleich (§. 53.). Nun sind die Dreiecke  $GBH$  und  $ABC$  gleichwinklig. Also sind es auch die Dreiecke  $DEF$  und  $ABC$ , und folglich ist auch zu Folge (I.)  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ .

IV. Wenn die drei Seiten eines Dreiecks von den drei Seiten eines andern, oder auch von einander Gleichvielfache sind, so sind die Dreiecke gleichwinklig.

Z. B. wenn in (Fig. 104.)  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$  ist, so sind die Dreiecke  $ABC$  und  $DEF$  gleichwinklig.

*Beweis.* Es sey  $BH = EF$  und  $GH$  mit  $AC$  parallel, so sind die Dreiecke  $GBH$  und  $ABC$  gleichwinklig, also ist zu Folge (I.)  $\frac{a}{BG} = \frac{b}{BH} = \frac{c}{GH}$ . Es war

aber  $BH = EF = e$ . Also ist  $\frac{a}{BG} = \frac{b}{e} = \frac{c}{GH}$ . Nun

soll nach der Voraussetzung  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$  seyn. Also ist  $BG = d = ED$  und  $GH = f = DF$ . In den Dreiecken

$GBH$  und  $DEF$  sind also alle drei Seiten in dem einem so groß als in dem andern, nemlich  $BH = EF = e$ ,  $BG = ED = d$  und  $GH = DF = f$ . Also sind die Dreiecke  $GBH$  und  $DEF$  gleich (§. 52.). Nun sind die Dreiecke  $GBH$  und  $ABC$  gleichwinklig. Also sind es auch die Dreiecke  $DEF$  und  $ABC$ .

## 170.

*Erklärung.* Es sollen hinfort *Winkel*, wo es bequem ist, auch durch Nebeneinandersetzen der Zeichen der Länge der Linien, welche sie einschließen, in Klammern gestellt, bezeichnet werden, und zwar sowohl, wenn die Linien an den Enden ihrer bestimmten Länge zusammenstoßen, als wenn sie, erst genugsam verlängert, sich begegnen.

Z. B. der Winkel zwischen zwei graden Linien, deren Länge  $a$  und  $b$  ist, soll durch  $(ab)$  der Winkel zwischen den Linien  $e$  und  $q$  durch  $(eq)$  zwischen  $x$  und  $y$  durch  $(xy)$  u. s. w. bezeichnet werden.

In dem Dreiecke  $ABC$  (Fig. 104. I.) z. B. würde also der Winkel  $A$  durch  $(ac)$ , der Winkel  $B$  durch  $(ba)$ , der Winkel  $C$  durch  $(cb)$  bezeichnet werden.

In dem Vieleck (Fig. 105.) würden z. B.  $(ab)$  und  $(ag)$  die Winkel  $ABC$  und  $BAG$ , hingegen, wenn  $QRABP$ ,  $DCP$ ,  $DEQ$ ,  $FGR$  und  $EFS$  grade Linien sind,  $(ac)$  den Winkel  $APD$ ,  $(ad)$  den Winkel  $BQD$ ,  $(ae)$  den Winkel  $BSE$  und  $(af)$  den Winkel  $BRF$  bezeichnen, u. s. w. Sind nicht zusammenstoßende Seiten eines Vielecks parallel, so sind die Winkel, welche sie einschließen, und welche immer auf dieselbe Weise bezeichnet werden, Null.

## 171.

*Zusätze.* I. Bedient man sich der Bezeichnung der Winkel (170.) in den Lehrsätzen (169.) von den Dreiecken, und nimmt zwei Dreiecke mit den Seiten  $a_1, b_1, c_1$  und  $a_2, b_2, c_2$  an, so kann man die Sätze (169.) auch wie folgt ausdrücken.

1. Wenn  $(a_1 b_1) = (a_2 b_2)$ ,  $(b_1 c_1) = (b_2 c_2)$  und  $(c_1 a_1) = (c_2 a_2)$  ist, so ist

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (\S. 169. I.).$$

2. Wenn  $(a_1 b_1) = (a_2 b_2)$  und  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$  ist, so ist

$$(b_1 c_1) = (b_2 c_2), \quad (c_1 a_1) = (c_2 a_2) \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

(§. 169. II.).



3. Wenn  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ,  $(b_1 c_1) = (b_2 c_2)$  und  $b_1 > a_1$  ist, so ist

$$(a_1 b_1) = (a_2 b_2), (c_1 a_1) = (c_2 a_2) \text{ und } \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad (\S. 169. \text{ III.}).$$

4. Wenn  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$  ist, so ist

$$(a_1 b_1) = (a_2 b_2), (b_1 c_1) = (b_2 c_2) \text{ und } (c_1 a_1) = (c_2 a_2) \quad (\S. 169. \text{ IV.}).$$

II. Will man die den Seiten  $a_1, b_1, c_1$  und  $a_2, b_2, c_2$  gegenüberliegenden Winkel durch  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  bezeichnen, so sind die Sätze (§. 169.) folgende.

1. Wenn  $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$  und  $\gamma_1 = \gamma_2$  ist, so ist

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (\S. 169. \text{ I.}).$$

2. Wenn  $\gamma_1 = \gamma_2$  und  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$  ist, so ist

$$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2 \text{ und } \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad (\S. 169. \text{ II.}).$$

3. Wenn  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$  und  $b_1 > a_1$  ist, so ist

$$\beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2 \text{ und } \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad (\S. 169. \text{ III.}).$$

4. Wenn  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$  ist, so ist

$$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2 \text{ und } \gamma_1 = \gamma_2 \quad (\S. 169. \text{ IV.}).$$

III. Setzt man, um die Gleichvielfachheit der Längen von Linien-Paaren auszudrücken, z. B.  $\frac{a_1}{a_2} = m$ ,

also  $a_1 = m a_2$ , wo  $m$  eine ganze, gebrochene oder irrationale gegebene Zahl seyn kann, so ist, wenn z. B.

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$  und  $a_1 = m a_2$  ist, auch  $b_1 = m b_2$ . Bedient man sich dieser Bezeichnung, so sind die Sätze (§. 169.) folgende:

1. Wenn  $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$  und  $\gamma_1 = \gamma_2$ , desgleichen  $a_1 = m a_2$  ist, so ist auch

$$b_1 = m b_2 \text{ und } c_1 = m c_2 \quad (\S. 169. \text{ I.}).$$

2. Wenn  $\gamma_1 = \gamma_2$ ,  $a_1 = m a_2$  und  $b_1 = m b_2$  ist, so ist

$$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2 \text{ und } c_1 = m c_2 \quad (\S. 169. \text{ II.}).$$

3. Wenn  $a_1 = ma_2$ ,  $b_1 = mb_2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$  und  $b_1 > a_1$  ist, so ist

$$\beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2 \text{ und } c_1 = mc_2 \text{ (§. 169. III.).}$$

4. Wenn  $a_1 = ma_2$ ,  $b_1 = mb_2$ ,  $c_1 = mc_2$  ist, so ist  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  und  $\gamma_1 = \gamma_2$  (§. 169. IV.).

## 172.

*Anmerkung.* Die Sätze von Dreiecken (§. 169.), in welchen von der Zahl Gebrauch gemacht wird, treten an die Stelle der Sätze (§. 133.), welche auf die Anschauung allein gegründet sind, und ihre Resultate stimmen mit jenen wie gehörig überein.

1. Der Satz (§. 169. I.) nemlich giebt z. B., wie (§. 171. I.) ausgedrückt, Folgendes:

Wenn  $(a_1 b_1) = (a_2 b_2)$ ,  $(b_1 c_1) = (b_2 c_2)$  und  $(c_1 a_1) = (c_2 a_2)$  ist, so ist

$a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$ ,  $b_1 \cdot c_2 = b_2 \cdot c_1$  und  $c_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot c_2$ ; die Producte  $a_1 \cdot b_2$ ,  $a_2 \cdot b_1$  etc. drücken aber die Flächen der Rechtecke unter den Seiten  $a_1$  und  $b_2$ ,  $a_2$  und  $b_1$  etc. aus. Also giebt der Satz (§. 169. I.) das Nemliche wie der Satz (§. 133. I.), und folglich stimmen die beiden Sätze überein.

2. Der Satz (§. 169. II.) giebt, wie (§. 171. I.) ausgedrückt, Folgendes:

Wenn  $(a_1 b_1) = (a_2 b_2)$  und  $a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$  ist, so ist

$$(b_1 c_1) = (b_2 c_2), (c_1 a_1) = (c_2 a_2) \text{ und}$$

$$b_1 \cdot c_1 = b_2 \cdot c_2, c_1 \cdot a_1 = c_2 \cdot a_2.$$

Das Nemliche giebt der Satz (§. 133. II.); also stimmen die beiden Sätze überein.

3. Der Satz (§. 169. III.) giebt, wie (§. 171. I.) ausgedrückt, Folgendes:

Wenn  $a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$ ,  $(b_1 c_1) = (b_2 c_2)$  und  $b_1 > a_1$  ist, so ist

$$(a_1 b_1) = (a_2 b_2), (c_1 a_1) = (c_2 a_2) \text{ und}$$

$$b_1 \cdot c_2 = b_2 \cdot c_1 \text{ und } c_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot c_2.$$

Das Nemliche giebt der Satz (§. 133. III.). Also stimmen die beiden Sätze überein.

4. Der Satz (§. 169. IV.) giebt, wie (§. 171. I.) ausgedrückt, Folgendes:

Wenn  $a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$ ,  $b_1 \cdot c_2 = b_2 \cdot c_1$  und  $c_1 \cdot a_2 = c_2 \cdot a_1$  ist, so ist

$$(a_1 b_1) = (a_2 b_2), (b_1 c_1) = (b_2 c_2), (c_1 a_1) = (c_2 a_2).$$

Das Nemliche giebt der Satz (§. 133. IV.). Also stimmen die beiden Sätze überein.

Man kann also auch nunmehr die obigen Sätze (§. 134. bis 144.), in welchen Dreiecke vorkommen, von deren Seiten und Winkeln das Nemliche vorausgesetzt wird, wie in einem der vier Sätze (§. 133.), und welche also auf den Sätzen (§. 133.) beruhen, auf die Sätze (§. 169.) gründen und folglich dieselben nunmehr auch mit Hülfe der Zahl beweisen. Diese Art des Beweises ist die, welche man gewöhnlich durch geometrische Proportionen nennt; allein sie ist nichts anders als die Beweis-Art durch die Zahl, denn die geometrischen Proportionen drücken die Gleichvielfachheit aus und die Gleichvielfachheit wird von der Zahl ausgedrückt.

## 173.

*Anmerkung.* Unter den vielen Beweisen des pythagorischen Lehrsatzes ist noch folgender, der jetzt auf Zahlen beruht, zu bemerken.

Das Dreieck  $ABC$  (Fig. 106.) sey in  $A$  rechtwinklig und  $AD$  auf  $BC$  senkrecht, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $ADB$  und  $BAC$ , weil außer dem rechten Winkel der Winkel  $B$  in dem einen so groß ist als in dem andern, gleichwinklig. Aus demselben Grunde sind die Dreiecke  $ADC$  und  $BAC$  gleichwinklig. Aehnlichliegende Seiten sind in den beiden ersten  $c, a$  und  $a, q$ , und in den beiden andern  $c, b$  und  $b, s$ . Also ist vermöge (§. 171.)

$$cq = a^2 \text{ und } cs = b^2,$$

die Summe hiervon ist

$$c(q + s) = a^2 + b^2.$$

Es ist aber  $q + s = c$ . Also ist

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

welches der pythagorische Lehrsatz ist; denn die Gleichung drückt aus, daß das Quadrat der Hypotenuse gleich ist der Summe der Quadrate der Catheten.

Es folgt daraus

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ und } b^2 = c^2 - a^2.$$

Die Seiten selbst durch einander ausgedrückt sind folgende:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

## 174.

*Lehrsatz.* Wenn die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks  $a, b$  und  $c$  sind, so ist der Inhalt des Dreiecks:

1.  $\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$  \*),  
oder auch

2.  $\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(a^2+c^2)^2 - (a^2-c^2)^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}$   
oder auch

3.  $\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$ .

*Beweis.* Das Perpendikel  $AD$  in dem Dreiecke  $ABC$  (Fig. 107.) sey  $p_1$ , so ist zu Folge (§. 173.)

$$BD = \sqrt{c^2 - p_1^2} \text{ und } DC = \sqrt{b^2 - p_1^2},$$

also, da  $BD + DC = BC = a$  ist,

$$4. \quad a = \sqrt{c^2 - p_1^2} + \sqrt{b^2 - p_1^2}.$$

Daraus folgt  $a - \sqrt{c^2 - p_1^2} = \sqrt{b^2 - p_1^2}$ , und wenn man diese Ausdrücke zu beiden Seiten mit sich selbst multiplicirt,

$$a^2 - 2a\sqrt{c^2 - p_1^2} + c^2 - p_1^2 = b^2 - p_1^2, \text{ oder}$$

$$5. \quad a^2 + c^2 - b^2 = 2a\sqrt{c^2 - p_1^2}.$$

Multiplicirt man wieder auf beiden Seiten mit sich selbst, so findet man

$$(a^2 + c^2 - b^2)^2 = 4a^2 c^2 - 4a^2 p_1^2, \text{ oder}$$

$$6. \quad 4a^2 p_1^2 = 4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2, \text{ oder}$$

$$4a^2 p_1^2 = (2ac - a^2 - c^2 + b^2)(2ac + a^2 + c^2 - b^2), \text{ oder}$$

$$4a^2 p_1^2 = (b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2), \text{ oder}$$

$$4a^2 p_1^2 = (b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b), \text{ oder}$$

$$7. \quad 2ap_1 = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}.$$

Nun ist der Inhalt des Dreiecks gleich  $\frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}ap_1$ , also ist derselbe gleich

8.  $\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$ ; welches der erste Ausdruck des Lehrsatzes ist. Derselbe ist zur Berechnung durch Logarithmen bequem, da er die Wurzel eines bloßen Products von Factoren ist.

Da ferner  $4a^2 c^2$  so viel ist als

$$9. \quad (a^2 + c^2)^2 - (a^2 - c^2)^2,$$

welches nemlich  $a^4 + 2a^2 c^2 + c^4 - a^4 + 2a^2 c^2 - c^4 = 4a^2 c^2$  ausmacht, so ist das obige  $4a^2 p_1^2 = 4a^2 c^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$  so viel als

$$10. \quad 4a^2 p_1^2 = (a^2 + c^2)^2 - (a^2 - c^2)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2;$$

woraus für den Inhalt  $\frac{1}{2}ap_1$ .

$$10. \quad \Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 + c^2)^2 - (a^2 - c^2)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}$$

folgt. Dieses ist der zweite Ausdruck des Lehrsatzes. Derselbe ist zur Berechnung dann bequem, wenn

\*) Dieser Satz wird gewöhnlich dem Tartalea zugeschrieben. Er ist aber vielleicht schon im achten Jahrhundert, von Hero dem Jüngern gefunden.

man Tafeln der zweiten Potestäten der natürlichen Zahlen hat. Man kann alsdann, weil der Ausdruck bloß aus zweiten Potestäten zusammengesetzt ist, den Inhalt bloß durch die Tafeln, ohne weitere Rechnung finden.

Endlich folgt aus der obigen Gleichung (6.)  $4a^2 p_1^2$  oder

$$\Delta^2 = 4a^2 c^2 - (a^4 + c^4 + b^4 + 2a^2 c^2 - 2a^2 b^2 - 2b^2 c^2), \text{ oder}$$

$$\Delta^2 = 2a^2 c^2 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - c^4 - b^4, \text{ oder}$$

16.  $\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{[2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4]}$ ; welches der dritte Ausdruck des Lehrsatzes ist.

175.

**Lehrsatz.** Wenn die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks, wie vorhin, durch  $a, b, c$ , die Halbmesser der Seiten und Ecken aber durch  $q$  und  $r$  bezeichnet werden, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$1. \quad \Delta = \frac{abc}{4r} \text{ und}$$

$$2. \quad \Delta = \frac{1}{2} (a + b + c) q.$$

**Beweis.**  $M$  (Fig. 107.) sey der Mittelpunkt der Ecken des Dreiecks, so das also  $AM = BM = CM = r$  ist,  $EMC$  sey eine grade Linie und  $EM = MC$ , so ist  $M$  auch der Mittelpunkt der Ecken des Dreiecks  $AEC$ , denn es ist  $AM = CM = EM$ . Also sind die Winkel  $E$  und  $B$  beide die Hälften des Winkels  $AMC$  (§. 68.), und folglich sind sie einander gleich. Ferner ist der Winkel  $EAC$  ein rechter (§. 69. I.) und in dem Dreieck  $ABD$  ist der Winkel  $D$  ein rechter. Also sind in dem Dreieck  $AEC$  zwei Winkel so groß als in dem Dreieck  $ABD$ . Folglich sind diese Dreiecke gleichwinklig. Aehnlichliegende Seiten sind  $EC, AB$  und  $AC, AD$ . Also ist  $\frac{AB}{EC} = \frac{AD}{AC}$ , das heißt  $\frac{c}{2r} = \frac{p_1}{b}$ . Daraus folgt  $p_1 = \frac{bc}{2r}$ . Nun ist der Inhalt des Dreiecks

gleich  $\Delta = \frac{1}{2} a p_1$ , also ist  $\Delta = \frac{1}{2} a \cdot \frac{bc}{2r}$ , oder

$$\Delta = \frac{abc}{4r};$$

welches das Erste war.

Wenn ferner  $N$  der Mittel-Punct der Seiten des Dreiecks  $ABC$  ist und  $NF, NG$  und  $NH$  sind Perpen-

dikel aus  $N$  auf die Seiten' des Dreiecks, so ist  $NF = NG = NH = q$ . Also ist der Inhalt des Dreiecks  $BCN$  gleich  $\frac{1}{2}aq$ , der Inhalt des Dreiecks  $CNA$  gleich  $\frac{1}{2}bq$  und der Inhalt des Dreiecks  $ANB$  gleich  $\frac{1}{2}cq$ . Diese drei Dreiecke zusammen machen das Dreieck  $ABC$  aus; also ist der Inhalt des gegebenen Dreiecks  $\Delta = \frac{1}{2}aq + \frac{1}{2}bq + \frac{1}{2}cq$  oder

$$\Delta = \frac{1}{2}(a + b + c)q;$$

welches das Zweite war.

## 176.

*Zusätze.* I. Wenn die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks wie vorhin durch  $a, b, c$  bezeichnet werden, so ist der Halbmesser der Ecken des Dreiecks zu Folge

(§. 175. 1.)  $r = \frac{abc}{4\Delta}$ , und wenn man statt  $\Delta$  den Ausdruck des Inhalts durch die Seiten (§. 174. 1.) setzt,

$$r = \frac{abc}{\sqrt{((a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a))}},$$

welches der Ausdruck des Halbmessers der Ecken eines beliebigen Dreiecks durch die drei Seiten ist.

II. Für  $q$  findet man aus (§. 175. 2.)  $q = \frac{2\Delta}{a+b+c}$ , also, wenn man wieder den Ausdruck von  $\Delta$  durch  $a, b$  und  $c$  aus (§. 174. 1.) setzt,

$$q = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{((a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a))}}{a+b+c},$$

oder

$$q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{a+b+c}};$$

welches der Ausdruck des Halbmessers der Seiten eines beliebigen Dreiecks durch die drei Seiten ist.

## 177

*Zusatz.* Der Inhalt eines beliebigen Dreiecks läßt sich auch leicht durch die drei Perpendikel aus den Ecken auf die gegenüber liegenden Seiten und durch die drei geraden Linien durch die Ecken und die Mitten der gegenüber liegenden Seiten ausdrücken.

Bezeichnet man nemlich die Perpendikel  $AD_1, BD_1, BD_2$  (Fig. 107.) durch  $p_1, p_2, p_3$ , so ist der Inhalt des Dreiecks  $ABC$

$$1. \Delta = \frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{\sqrt{\{(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)(p_1 p_2 + p_1 p_3 - p_2 p_3) \cdot (p_1 p_2 - p_1 p_3 + p_2 p_3)(p_1 p_3 + p_2 p_3 - p_1 p_2)\}}}$$

Bezeichnet man die graden Linien  $AK_1$ ,  $BK_2$ ,  $CK_3$  durch die Ecken und die Mitten der gegenüberliegenden Seiten durch  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , so ist der Inhalt

$$2. \Delta = \frac{1}{8} \sqrt{[(k_1 + k_2 + k_3)(k_1 + k_2 - k_3)(k_1 - k_2 + k_3)(k_2 + k_3 - k_1)]}.$$

Den ersten Ausdruck findet man weil  $2\Delta = ap_1 = bp_2 = cp_3$  und also  $a = \frac{2\Delta}{p_1}$ ,  $b = \frac{2\Delta}{p_2}$ ,  $c = \frac{2\Delta}{p_3}$  ist. Setzt man dieses in den Ausdruck des Inhalts  $\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$  (1. §. 174.), so erhält man

$$\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{\left[\left(\frac{2\Delta}{p_1} + \frac{2\Delta}{p_2} + \frac{2\Delta}{p_3}\right)\left(\frac{2\Delta}{p_1} + \frac{2\Delta}{p_2} - \frac{2\Delta}{p_3}\right)\left(\frac{2\Delta}{p_1} - \frac{2\Delta}{p_2} + \frac{2\Delta}{p_3}\right)\left(\frac{2\Delta}{p_2} + \frac{2\Delta}{p_3} - \frac{2\Delta}{p_1}\right)\right]},$$

oder

$$\Delta = \Delta^2 \sqrt{\left[\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3}\right)\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)\left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} - \frac{1}{p_1}\right)\right]},$$

oder wenn man mit  $p_1^2 p_2^2 p_3^2$  multiplicirt und mit  $\Delta$  dividirt

$$p_1^2 p_2^2 p_3^2 = \Delta \sqrt{[(p_2 p_3 + p_1 p_3 + p_1 p_2)(p_2 p_3 + p_1 p_3 - p_1 p_2) \times (p_2 p_3 - p_1 p_3 + p_1 p_2)(p_1 p_3 + p_1 p_2 - p_2 p_3)]}$$

woraus der Ausdruck (1.) folgt.

Den zweiten Ausdruck findet man mit Hülfe des Satzes (§. 123.). Vermöge dieses Satzes ist z. B. in dem Dreieck  $ABK_1$

$$AB^2 = BK_1^2 + AK_1^2 + 2BK_1 DK_1$$

und in dem Dreieck  $ACK_1$ ,

$$AC^2 = CK_1^2 + AK_1^2 - 2CK_1 DK_1,$$

oder weil  $BK_1 = CK_1$  ist, indem  $K_1$  in der Mitte der Seite  $BC$  liegen soll,

$$AB^2 = BK_1^2 + AK_1^2 + BK_1 DK_1 \text{ und}$$

$$AC^2 = BK_1^2 + AK_1^2 - BK_1 DK_1.$$

Die Summe dieser beiden Ausdrücke ist

$$AB^2 + AC^2 = 2BK_1^2 + 2AK_1^2, \text{ oder}$$

$$c^2 + b^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} a^2 + 2k_1^2 = \frac{1}{2} a^2 + 2k_1^2, \text{ oder}$$

$$5. 4k_1^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2.$$

Auf dieselbe Weise findet man für die anderen beiden Linien  $k_2$  und  $k_3$ ,

$$4. 4k_2^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 \text{ und}$$

$$5. 4k_3^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Daraus folgt

$$6. 8k_1^2 + 8k_2^2 - 4k_3^2 = 4b^2 + 4c^2 - 2a^2 + 4c^2 + 4a^2 - 2b^2 - 2a^2 - 2b^2 + c^2 = 9c^2$$

und auf dieselbe Weise

$$7. 8k_2^2 + 8k_3^2 - 4k_1^2 = 9a^2$$

$$8. 8k_3^2 + 8k_1^2 - 4k_2^2 = 9b^2.$$

Nun ist zu Folge der Gleichung (6.) im Beweise des Satzes (§. 174.)  $4a^2 p_1^2 = 4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$ , und weil  $\frac{1}{2} a p_1 = \Delta$  ist,

$$16 \Delta^2 = 4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2,$$

oder

oder, wenn man mit  $9^2$  multiplicirt,

$$9. \quad 16.81 \Delta^2 = 4.9a^2.9c^2 - (9a^2 + 9c - 9b^2)^2.$$

Setzt man hierin die Ausdrücke von  $9a^2$ ,  $9b^2$  und  $9c^2$  aus (7. 8. und 6.), so findet man

$$16.81 \Delta^2 = 4(8k_1^2 + 8k_2^2 - 4k_1^2)(8k_1^2 + 8k_2^2 - 4k_2^2) - (8k_1^2 + 8k_2^2 - 4k_1^2 + 8k_1^2 + 8k_2^2 - 4k_2^2 - 8k_1^2 - 8k_2^2 + 4k_1^2)^2,$$

oder

$$16.81 \Delta^2 = 4(8k_1^2 + 8k_2^2 - 4k_1^2)(8k_1^2 + 8k_2^2 - 4k_2^2) - (20k_1^2 - 4k_2^2 - 4k_3^2)^2.$$

oder, wenn man mit 16 dividirt,

$$81 \Delta^2 = 4(2k_1^2 + 2k_2^2 - k_1^2)(2k_1^2 + 2k_2^2 - k_2^2) - (5k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)^2,$$

das heisst,

$$\begin{aligned} 81 \Delta^2 &= 16k_1^2 k_2^2 + 16k_2^4 - 8k_1^2 k_3^2 + 16k_1^2 k_3^2 + 16k_2^2 k_3^2 - 8k_3^4 \\ &\quad - 8k_1^4 - 8k_1^2 k_2^2 + 4k_1^2 k_3^2 - 25k_2^4 - k_1^4 - k_3^4 \\ &\quad + 10k_1^2 k_2^2 + 10k_2^2 k_3^2 - 2k_1^2 k_3^2 \\ &= 18k_1^2 k_2^2 + 18k_1^2 k_3^2 + 18k_2^2 k_3^2 - 9k_1^4 - 9k_2^4 - 9k_3^4, \end{aligned}$$

oder

$$9 \Delta^2 = 2k_1^2 k_2^2 + 2k_1^2 k_3^2 + 2k_2^2 k_3^2 - k_1^4 - k_2^4 - k_3^4, \text{ oder}$$

$$9. \quad \Delta = \frac{1}{3} \sqrt{[2k_1^2 k_2^2 + 2k_1^2 k_3^2 + 2k_2^2 k_3^2 - k_1^4 - k_2^4 - k_3^4]}.$$

Die Grösse rechterhand bezeichnet nach (3. §. 174.)  $\frac{2}{3}$  von dem Inhalt eines Dreiecks, dessen Seiten  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  sind. Der Inhalt eines solchen Dreiecks aber ist auch zu Folge des ersten Ausdrucks (§. 174.) gleich  $\frac{1}{4} \sqrt{[(k_1 + k_2 + k_3)(k_1 + k_2 - k_3)(k_1 - k_2 + k_3)(k_2 + k_3 - k_1)]}$ ; also ist auch

$$10. \quad \Delta = \frac{1}{3} \sqrt{[(k_1 + k_2 + k_3)(k_1 + k_2 - k_3)(k_1 - k_2 + k_3)(k_2 + k_3 - k_1)]};$$

welches der obige zweite Ausdruck von  $\Delta$  ist.

## 178.

**Lehrsatz.** Wenn man die vier Seiten eines nach den Ecken centrischen Vierecks durch  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , den Inhalt des Vierecks durch  $F$  und den Halbmesser der Ecken durch  $r$  bezeichnet, so ist

$$1. \quad F = \frac{1}{4} \sqrt{[(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(b + c + d - a)]}$$

und

$$2. \quad r = \sqrt{\frac{abcd \left( (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + abcd \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \right) \right)}{(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(b + c + d - a)}}.$$

Ist das Viereck centrisch nach den Ecken und zugleich centrisch nach den Seiten, so ist sein Inhalt

$$3. \quad F_r = \sqrt{abcd}.$$

**Beweis.** I. Das Viereck  $ABCD$  (Fig. 108.) sey centrisch nach den Ecken und  $BE$  auf  $AD$ ,  $BF$  auf  $DC$  senkrecht, so ist nach (§. 123.) in dem Dreieck  $ABD$ ,

$$4. \quad BD^2 = a^2 + d^2 + 2AE \cdot d,$$

und in dem Dreieck  $CBD$ ,

$$5. \quad BD^2 = c^2 + b^2 - 2CF \cdot c.$$

Also ist

$$6. \quad a^2 + d^2 + 2d \cdot AE = b^2 + c^2 - 2c \cdot CF.$$

Nun ist die Summe gegenüberliegender Winkel des Vierecks, z. B. die Summe  $A + C$ , gleich zwei rechten, weil das Viereck cen-



trisch nach den Ecken seyn soll: also ist der Winkel  $BAE$  dem Winkel  $C$  gleich. Folglich sind die rechtwinkligen Dreiecke  $BAE$  und  $BCF$  gleichwinklig, und folglich ist nach (§. 169. I.)

$$7. \frac{CF}{AE} = \frac{b}{a}, \text{ also } AE = \frac{a}{b} CF.$$

Setzt man dieses in (6.), so findet man

$$a^2 + d^2 + 2d \cdot \frac{a}{b} \cdot CF = c^2 + b^2 - 2c \cdot CF,$$

woraus

$$8. CF = \frac{1}{2} b \cdot \frac{c^2 + b^2 - a^2 - d^2}{ad + bc}$$

folgt.

Nun ist  $BF = \sqrt{(b^2 - CF^2)}$ , also

$$9. BF = b \sqrt{\left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2 - d^2}{ad + bc}\right)^2\right]},$$

und weil die rechtwinkligen Dreiecke  $BAE$  und  $BCF$  gleichwinklig sind,  $\frac{BF}{BE} = \frac{b}{a}$ , also  $BE = \frac{a}{b} \cdot BF$ , folglich aus (9.)

$$10. BE = a \sqrt{\left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2 - d^2}{ad + bc}\right)^2\right]}.$$

Der Inhalt des Vierecks  $ABCD$  ist aber dem Inhalt der beiden Dreiecke  $CBD$  und  $ABD$  gleich, also gleich  $\frac{1}{2} c \cdot BF + \frac{1}{2} d \cdot BE$ , folglich ist aus (9. und 10.)

$$F = \frac{1}{2} (bc + ad) \sqrt{\left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2 - d^2}{ad + bc}\right)^2\right]}, \text{ oder}$$

$$11. F = \frac{1}{4} \sqrt{[4(bc + ad)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2]}, \text{ oder}$$

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{[(2bc + 2ad + b^2 + c^2 - a^2 - d^2)(2bc + 2ad - b^2 - c^2 + a^2 + d^2)]},$$

$$\text{oder } F = \frac{1}{4} \sqrt{[(b + c)^2 - (a - d)^2][(a + d)^2 - (b - c)^2]}, \text{ oder}$$

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{[(b + c + a - d)(b + c - a + d)(a + d + b - c)(a + d - b + c)]}, \text{ oder}$$

$$12. F = \frac{1}{4} \sqrt{[(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(b + c + d - a)]};$$

welches der Ausdruck (1.) im Lehrsatz ist.

II. Setzt man den Ausdruck von  $CF$  aus (8.) in (5.), so erhält man

$$BD^2 = c^2 + b^2 - bc \frac{c^2 + b^2 - a^2 - d^2}{ad + bc}, \text{ oder}$$

$$BD^2 = \frac{(c^2 + b^2)(ad + bc) - bc(c^2 + b^2) + bc(a^2 + d^2)}{ad + bc}, \text{ oder}$$

$$13. BD^2 = \frac{ad(b^2 + c^2) + bc(a^2 + d^2)}{ad + bc}.$$

Nun ist der Halbmesser der Ecken des Vierecks  $r$  zugleich der Halbmesser der Ecken der Dreiecke  $ABD$  und  $CBD$ ; also läßt sich der Inhalt dieser Dreiecke nach (§. 175. 1.) auch durch

$$14. \frac{ad \cdot BD}{4r} \text{ und } \frac{bc \cdot BD}{4r}$$

ausdrücken. Die Summe dieser Flächen ist der Inhalt des Vierecks  $F$ . Also ist

$$15. F = \frac{(ad + bc) BD}{4r},$$

und folglich.

$$16. r = \frac{(ad + bc) BD}{4F}.$$

Setzt man hierin den Ausdruck von  $BD$  aus (13.), so findet man

$$17. \quad r = \sqrt{\frac{[(ad+bc)((ad(b^2+c^2)+bc(a^2+d^2)))]}{4F}}, \text{ oder}$$

$$r = \sqrt{\frac{[a^2d^2b^2+a^2d^2c^2+ab^2cd+abc^2d+a^2bcd+abed^2+a^2b^2c^2+b^2c^2d^2]}{4F}}$$

oder

$$18. \quad r = \sqrt{\frac{[abcd((a^2+b^2+c^2+d^2)+abcd(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}))]}{4F}}.$$

Setzt man hierin noch den Ausdruck von  $4F$  aus (1.), so findet man den Ausdruck (2.) des Lehrsatzes.

III. Ist das Viereck zugleich centrisc nach den Seiten, so sind die Summen gegenüberliegender Seiten gleich (§. 88, I.). Also ist alsdann  $a+c=b+d$ . Setzt man nun in den Ausdruck des Inhalts (1.)  $b+d$  statt  $a+c$  und  $a+c$  statt  $b+d$ , so erhält man

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{[(b+b+d-d)(a+a-c+c)(b-b+d+d)(a+c+c-a)]},$$

oder  $F = \frac{1}{4} \sqrt{[2b \cdot 2a \cdot 2d \cdot 2c]},$  oder

$$19. \quad F = \sqrt{[abcd]};$$

welches der Ausdruck (3.) des Lehrsatzes ist.

### 179.

*Lehrsatz.* Wenn man die vier Seiten eines Trapezes durch  $a, b, c, d$  und den Inhalt durch  $F$  bezeichnet, und  $a$  und  $c$  sind die parallelen Seiten, so ist

$$F = \frac{1}{4} \frac{a+c}{a-c} \sqrt{[(a+b+d-c)(b+c+d-a)(a-b-c+d)(a+b-c-d)]}.$$

*Beweis.* Das Viereck  $ABCD$  (Fig. 109.) sey ein Trapez und  $BC$  sey mit  $AD$  parallel,  $BE$  und  $CF$  auf  $AD$  senkrecht und gleich  $p$ , so ist in den rechtwinkligen Dreiecken  $ABE$  und  $DCF$ ,

$$AE = \sqrt{(b^2 - p^2)} \text{ und } DF = \sqrt{(d^2 - p^2)}.$$

Es ist aber  $AE + BC + DF = a$ ; also ist  $a = c + \sqrt{(b^2 - p^2)} + \sqrt{(d^2 - p^2)}$ , oder  $a - c = \sqrt{(b^2 - p^2)} + \sqrt{(d^2 - p^2)}$ .

Multipliziert man diesen Ausdruck zu beiden Seiten mit sich selbst, so findet man

$$(a-c)^2 = 2(a-c)\sqrt{(b^2 - p^2)} + b^2 - p^2 = d^2 - p^2, \text{ oder}$$

$$(a-c)^2 + b^2 - d^2 = 2(a-c)\sqrt{(b^2 - p^2)}.$$

Multipliziert man abermals mit sich selbst, so erhält man

$$((a-c)^2 + b^2 - d^2)^2 = 4(a-c)^2(b^2 - p^2), \text{ oder}$$

$$4(a-c)^2 p^2 = 4(a-c)^2 b^2 - ((a-c)^2 + b^2 - d^2)^2, \text{ oder}$$

$$4(a-c)^2 p^2 = (2(a-c)b + (a-c)^2 + b^2 - d^2)(2(a-c)b - (a-c)^2 - b^2 + d^2),$$

oder  $4(a-c)^2 p^2 = ((a-c+b)^2 - d^2)(d^2 - (a-c-b)^2),$  oder

$$4(a-c)^2 p^2 = (a-c+b+d)(a-c+b-d)(d+a-c-b)(d-a+c+b),$$

also

$$p = \frac{\sqrt{[(a+b+d-c)(b+c+d-a)(a-b-c+d)(a+b-c-d)]}}{2(a-c)}.$$

Nun ist der Inhalt des Trapezes gleich  $\frac{(a+c)p}{2}$ . Also ist

$$F = \frac{1}{4} \frac{a+c}{a-c} \sqrt{[(a+b+d-c)(b+c+d-a)(a-b-c+d)(a+b-c-d)]};$$

wie im Lehrsatz.

180.

**Lehrsatz.** I. Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke  $ABC$  (Fig. 110. I.) einer der spitzen Winkel z. B.  $C$ ,  $m$ mal so groß ist, als der Winkel  $F$  in einem andern rechtwinkligen Dreiecke  $DEF$  (Fig. 110. II.), die Hypothenuse  $AC$  aber in dem ersten Dreiecke eben so groß ist, als die Hypothenuse  $DE$  in dem andern, so ist die dem spitzen Winkel  $C$  gegenüberliegende Cathete  $AB$  in dem ersten Dreiecke weniger als  $m$ mal so groß als die Cathete  $DE$ , dem Winkel  $F$  gegenüber im anderen Dreiecke.  $m$  kann jede beliebige ganze, gebrochene oder irrationale Zahl seyn.

**Beweis.** I.  $\alpha$ ) In (Fig. 110. III.) sey  $AMB$  ein beliebiger Winkel. Die Winkel  $BMC, CMD, DME, EMF, FMG$  etc. sollen ihm gleich seyn. Desgleichen sollen alle die Linien  $AM, BM, CM, DM$  etc. einander gleich seyn. Alsdann sind alle die gleichschenkligen Dreiecke  $AMB, BMC, CMD, DME$  etc. einander gleich. Folglich ist  $AB = BC = CD = DE = EF = FG$  etc., und alle Winkel dieser Dreiecke an der Grundlinie, wie  $MAB, MBA, MBC$  etc. sind kleiner als rechte (§. 45. I.). Nun sollen  $BB_1, CC_1, DD_1$  etc. Perpendikel aus  $B, C, D$  etc. auf  $AM$  seyn. Alsdann ist  $BB_1$  kleiner als  $BA$ , weil das Perpendikel  $BB_1$  kürzer ist als die schräge Linie  $BA$  (§. 63. IV.). Es sollen ferner  $Bb_1, Cc_1, Dd_1$  etc. Parallelen mit  $AM$  seyn. Alsdann sind die Wechselwinkel  $MBb_1$  und  $BMA, MCc_1$  und  $CMA, MDd_1$  und  $DMA$  etc. zwischen den Parallelen gleich. Folglich ist z. B. der Winkel  $MCc_1$  zweimal so groß als der Winkel  $MBb_1$ , oder  $BMA$ , der Winkel  $MDd_1$  ist dreimal so groß als  $BMA$ , der Winkel  $MEe_1$  viermal so groß; u. s. w. Folglich nehmen die Winkel  $MBb_1, MCc_1, MDd_1, MEE_1$  etc. immerfort zu, und mithin, weil die Winkel  $CBM, DCM, EDM, FEM$  etc. alle gleich groß sind, die Winkel  $CBb_1, DCc_1, EDd_1, FEE_1$  etc. immerfort ab. Also nehmen die Linien  $BB_1, Cb_1, Dc_1, Ed_1, Fe_1$  immerfort ab (§. 48. II.); denn alle die Linien  $AB, BC, CD$  etc. sind einander gleich. Mithin ist  $Cb_1$  kleiner als  $BB_1$ ;  $Dc_1$  ist kleiner als die Hälfte von  $CC_1$ , denn  $Dc_1$  ist kleiner als  $Cb_1$  und noch mehr kleiner als  $BB_1$ ;  $Ed_1$  ist kleiner als ein Drittheil von  $DD_1$ , denn es ist kleiner als  $Dc_1$ , noch mehr kleiner als  $Cb_1$  und noch mehr kleiner als  $BB_1$  u. s. w.

Wenn also  $m$  eine beliebige ganze Zahl ist, so ist in zwei rechtwinkligen Dreiecken  $GMG_1$  und  $BMB_1$  (Fig. III.), oder  $ACB$  und  $DFE$  (Fig. I. II.) von gleichen Hypothenusen  $GM = BM$  oder  $AC = DF$ , in welchen der Winkel  $GMG_1$  ein beliebiges Vielfache, z. B. das  $m$ -fache des Winkels  $BMB_1$  ist, die Cathete  $GG_1$ , jenem Winkel im ersten Dreieck gegenüber, kleiner als das  $m$ -fache der Cathete  $BB_1$ , dem Winkel im andern Dreieck gegenüber.

$\beta$ . Es sey ferner in (Fig. III.) der Winkel  $GMA = p \cdot BMA$  wo  $p$  eine beliebige ganze Zahl ist, so ist wie vorhin bewiesen  $Gf_1$  kleiner als der  $p-1$ -ste Theil von  $FF_1$ , und folglich  $GG_1 < FF_1 + \frac{FF_1}{p-1} < \frac{p-1+1}{p-1} FF_1 < \frac{p}{p-1} FF_1$ . Eben so ist  $FF_1 < \frac{p-1}{p-2} EE_1$ , also um so mehr  $GG_1 < \frac{p}{p-1} \cdot \frac{p-1}{p-2} EE_1$ , oder  $GG_1 < \frac{p}{p-2} EE_1$ .

Aus demselben Grunde ist um so mehr  $GG_1 < \frac{p}{p-3} DD_1$ ; u. s. w. Geht man so fort, bis zu einer beliebigen ganzen Zahl  $p-n$  und setzt dieselbe gleich  $q$ , das zugehörige Perpendikel aber z. B. gleich  $CC_1$ , so folgt, daß

$$GG_1 < \frac{p}{q} CC_1,$$

oder, wenn man den Bruch  $\frac{p}{q}$ , in welchem Zähler und Nenner beliebige ganze Zahlen sind, durch  $m$  bezeichnet,

$$GG_1 < m CC_1$$

ist, wo nun  $GMA = m \cdot CMA$ .

Wenn also  $m$  ein beliebiger Bruch ist, so ist in zwei rechtwinkligen Dreiecken wie  $GMG_1$  und  $CMC_1$  (Fig. III.) oder  $ACB$  und  $DFE$  (Fig. I. und II.), deren Hypothenusen  $GM$ ,  $CM$ , oder  $AC$ ,  $DF$ , gleich groß sind, in welchen aber der Winkel  $GMG_1$  gleich  $m \cdot CMC_1$ , oder der Winkel  $C = m \cdot F$  ist, wo  $m$  einen beliebigen Bruch bedeutet, die Cathete  $GG_1$  (Fig. III.), dem Winkel gegenüber, kleiner als  $m \cdot CC_1$ , oder  $AB$  (Fig. II.) kleiner als  $m \cdot DE$  (Fig. I.).

$\gamma$ . Es sey endlich  $m$  eine irrationale Zahl, so ist dennoch  $AB$  kleiner als  $m \cdot DE$  (Fig. I. und II.), wenn

$C = mF$  und  $AC = DF$  ist. Denn man setze, es sey der Winkel  $A, CB,$  irgend ein Vielfaches von  $DFE$ , oder irgend ein Vielfaches eines Theils des Winkels  $DFE$ , so ist, wenn man  $A, CB, = \mu . DFE$  setzt, wo  $\mu$  irgend eine ganze Zahl oder einen Bruch bedeutet, wie vorhin bewiesen,  $A, B,$  kleiner als  $\mu . DE$ .

Man setze  $A, B,$  gleich  $\mu . DE - xDE$ , wo  $x$  von dem Winkel  $F$  abhängen wird. Man setze ferner  $\mu = m + k$ , wo  $k$  nur von dem Winkel  $ACA,$  abhängt, und folglich willkührlich ist; weil man  $A, C$  so nahe an  $AC$  legen kann, als man will, so wäre  $A, B, = mDE + kDE - xDE = (m + k - x) . DE$ . Es kann also, wenn man  $k$  klein genug, das heisst,  $A, C$  nahe genug an  $AC$  annimmt,  $A, B,$  auch gleich  $mDE$  und kleiner als  $mDE$  seyn, ersteres wenn man  $k = x$ , letzteres wenn man  $k < x$  setzt. Daraus folgt, daß  $AB$  nie gleich oder gröfser als  $m . DE$  seyn kann, was auch  $m$  seyn mag. Denn da in dem rechtwinkligen Dreieck  $ACB$  der Winkel  $ACB$  kleiner als in dem Dreiecke  $A, CB,$  der Winkel  $A, CB,$  seyn soll, die Hypothenusen  $AC$  und  $A, C$  aber gleich sind, so ist nothwendig  $AB$  immer kleiner als  $A, B,$  (§. 48. II.). Also kann  $AB$  nicht gleich oder gröfser als  $m . DE$  seyn, weil  $A, B,$  auch gleich  $m . DE$  und kleiner als  $m . DE$  seyn kann. Folglich kann  $AB$  nur kleiner seyn als  $m . DE$ .

Mithin ist in allen Fällen  $AB < m . DE$  (Fig. I. und II.), sobald  $C = mF$  und  $AC = DF$  ist,  $m$  mag eine ganze Zahl oder ein Bruch oder irrational seyn.

II. Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke  $ABC$  (Fig. 110. I.) einer der spitzen Winkel, z. B.  $C$ ,  $m$ mal so grofs ist, als in einem andern rechtwinkligen Dreiecke  $DEF$  (Fig. II.) der Winkel  $F$ , die Cathete  $BC$  aber in dem ersten Dreieck ist so grofs, als die Cathete  $EF$  in dem andern, so ist die dem benannten spitzen Winkel gegenüber liegende andere Cathete  $AB$  in dem ersten Dreiecke mehr als  $m$ mal so grofs, als die Cathete  $DE$  in dem andern.  $m$  kann jede beliebige ganze, gebrochene, oder irrationale Zahl seyn.

Beweis. In (Fig. 110. IV.) sey  $AMB$  ein beliebiger Winkel. Alle die Winkel  $BMC, CMD, DME$  etc. sollen dem Winkel  $AMB$  gleich seyn. Desgleichen soll  $B, M = AM$ , und  $MAE$  und  $MB, E,$  sollen rechte Winkel seyn. Alsdann ist das Dreieck  $C, MB,$  dem Dreieck  $BMA$  gleich, weil zwei Winkel und eine Seite

in dem einen so groß sind, als in dem andern. Also ist  $B_1C_1 = AB$ . Es sey  $Bc$  mit  $B_1C_1$  und  $c_1C_1$  mit  $BM$  parallel, so ist  $Bc_1 = B_1C_1$ , also  $Bc > B_1C_1 > AB$  und weil  $BcC$  ein stumpfer Winkel ist,  $BC > Bc$ , also um so mehr  $BC > AB$ . Ferner sind die Dreiecke  $AMC$  und  $B_1MD_1$  einander gleich, weil die Winkel  $A$  und  $B_1$ ,  $AMC$  und  $B_1MD_1$  und die Seiten  $AM$  und  $B_1M$  gleich sind. Also ist  $B_1D_1 = AC$  und weil  $B_1C_1 = AB$  war,  $C_1D_1 = BC$ . Es sey  $Cd$  mit  $C_1D_1$  und  $d_1D_1$  mit  $CM$  parallel, so ist  $Cd_1 = C_1D_1$ , also  $Cd > C_1D_1 > BC$ , und weil  $CdD$  ein stumpfer Winkel ist,  $CD > Cd$ , also um so mehr  $CD > BC$  u. s. w. Es ist also

$$BC > AB, CD > BC, DE > CD \text{ etc.}$$

Hieraus folgt zunächst, daß, wenn in einem rechtwinkligen Dreieck  $AME$  (Fig. IV.) eine Cathete  $AM$  so groß ist, als in einem andern  $AMB$ , der Winkel  $AME$  aber ein beliebiges Vielfache von  $AMB$  ist, daß dann die andere Cathete  $AE$  größer ist als das nemliche Vielfache von  $AB$ . Aber es folgt auch, auf ähnliche Art wie oben, daß, wenn  $AME = p \cdot AMB$  ist,

$$AE > AD + \frac{AD}{p-1} > \frac{p-1+1}{p-1} AD > \frac{p}{p-1} AD, \text{ desgleichen}$$

$$AD > \frac{p-1}{p-2} AC, \text{ also um so mehr } AE > \frac{p}{p-1} \cdot \frac{p-1}{p-2} AC$$

$$> \frac{p}{p-2} AC \text{ ist u. s. w.; überhaupt, daß, wenn } m \text{ einen}$$

beliebigen Bruch  $\frac{p}{q}$  bedeutet und in (Fig. I. und

II.)  $C = mF$ ,  $BC = EF$  ist, daß dann  $AB > mDE$  ist. Auf ähnliche Weise wie in (I.) wird bewiesen, daß der Satz auch gilt, wenn  $m$  eine irrationale Zahl ist.

Also ist in allen Fällen  $AB > m \cdot DE$ , sobald  $C = mF$  und  $BC = EF$  ist,  $m$  mag eine ganze Zahl, oder ein Bruch, oder irrational seyn.

Es ist übrigens zu bemerken, daß in beiden Lehrsätzen (I. u. II.) nur von einem rechtwinkligen Dreiecke, also nur von dem Falle die Rede ist, wenn die Winkel  $C$  und  $F$  (Fig. I. und II.) kleiner als rechte sind.

**Lehrsatz. I.** Wenn zwei regelmässige Vielecke gleiche Halbmesser der Ecken haben, so ist

der Umfang desjenigen der grössere, welches die meisten Seiten hat.

*Beweis.* Es sey in (Fig. 65.)  $AMB$  eines der Dreiecke am Mittelpunkt eines regelmässigen Vielecks von  $p$  Seiten, und  $AMB_1$  eines der Dreiecke am Mittelpunkte eines regelmässigen Vielecks von  $q$  Seiten, wo  $q > p$  seyn wird, wenn der Winkel  $AMB$  grösser ist als der Winkel  $AMB_1$ . Es sey ferner  $MP$  auf  $AB$  und  $MP_1$  auf  $AB_1$  senkrecht, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $AMP$ ,  $BMP$  und  $AMP_1$ ,  $B_1MP_1$  gleich, weil zwei Winkel und eine Seite in dem einen so gross sind als in dem andern, nemlich  $MAP = MBP$ ,  $APM = BPM = 90^\circ$  und  $AM = BM$ , desgleichen  $MAP_1 = MB_1P_1$ ,  $MP_1A = MP_1B_1 = 90^\circ$  und  $AM = B_1M$ . Also sind  $AMP$  und  $AMP_1$  die Hälften der Winkel  $AMB$  und  $AMB_1$ , folglich ist, weil  $AMB = \frac{49}{p}$  und  $AMB_1 = \frac{49}{q}$  (§. 109.),

$$AMP = \frac{29}{p} \text{ und } AMP_1 = \frac{29}{q}. \text{ Daraus folgt}$$

$$AMP = \frac{q}{p} AMP_1.$$

Nun sind in den Dreiecken  $AMP$  und  $AMP_1$  die Hypothenusen  $AM$  gleich gross. Also ist nach (§. 180.

I.)  $AP < \frac{p}{q} AP_1$ , folglich ist auch, weil  $AB = 2AP$

und  $AB_1 = 2AP_1$ ,  $AB < \frac{q}{p} AB_1$ . Nun hat das Vieleck, dessen Seiten  $AB$  sind,  $p$  solcher Seiten; also ist sein Umfang  $p \cdot AB$ . Das Vieleck dessen Seiten  $AB_1$  sind hat  $q$  solcher Seiten; also ist sein Umfang  $q \cdot AB_1$ .

Es war aber  $AB < \frac{q}{p} AB_1$ , also ist  $p \cdot AB < p \cdot \frac{q}{p} AB_1$ , oder  $p \cdot AB < q \cdot AB_1$ , oder  $q \cdot AB_1 > p \cdot AB$ . Das heisst: der Umfang des regelmässigen Vielecks mit der grössern Zahl Seiten ist grösser als der Umfang des regelmässigen Vielecks, von gleichem Halbmesser der Ecken, mit der kleinern Seiten-Zahl.

II. Wenn zwei regelmässige Vielecke gleiche Halbmesser der Seiten haben, so ist der Umfang desjenigen der kleinere, welches die meisten Seiten hat.

*Beweis.* Es sey in (Fig. 65.)  $AMB$  eines der Dreiecke am Mittel-Punkte eines regelmässigen Vielecks von  $p$  Seiten, und  $A_1MB_1$  eines der Dreiecke am Mit-

tel-Puncto eines regelmässigen Vielecks von  $q$  Seiten, wo  $q > p$  seyn wird, wenn der Winkel  $AMB$  grösser als der Winkel  $A_2MB_2$  ist.  $MP$  sey der Halbmesser beider Vielecke; so sind die Dreiecke  $MPA$ ,  $MPB$  und  $MPA_2$ ,  $MPB_2$  einander gleich, weil die Dreiecke  $AMB$  und  $A_2MB_2$  gleichschenkelig und  $MP$  Perpendikel auf die Grundlinien sind. Also sind  $AMP$  und  $A_2MP$  die Hälften der Winkel  $AMB$  und  $A_2MB_2$ , folglich ist, weil  $AMB = \frac{4\varrho}{p}$  und  $A_2MB_2 = \frac{4\varrho}{q}$  (§. 109.),

$$AMP = \frac{2\varrho}{p} \text{ und } A_2MP = \frac{2\varrho}{q}. \text{ Daraus folgt}$$

$$AMP = \frac{q}{p} A_2MP.$$

Nun sind in den Dreiecken  $AMP$  und  $A_2MP$  die Catheten  $MP$  gleich gross. Also ist nach (§. 180. II.)

$$AP > \frac{q}{p} A_2P, \text{ folglich ist auch, weil } AB = 2AP \text{ und } A_2B_2 = 2A_2P,$$

$$AB > \frac{q}{p} A_2B_2.$$

Nun hat das Vieleck, dessen Seiten  $AB$  sind,  $p$  solcher Seiten; also ist sein Umfang  $p \cdot AB$ . Das Vieleck, dessen Seiten  $A_2B_2$  sind, hat  $q$  solcher Seiten; also ist sein Umfang  $q \cdot A_2B_2$ . Es war aber  $AB > \frac{q}{p} A_2B_2$ , also ist  $p \cdot AB > q \cdot A_2B_2$ , oder  $q \cdot A_2B_2 < p \cdot AB$ . Das heisst, der Umfang des regelmässigen Vielecks mit mehr Seiten ist kleiner, als der Umfang des regelmässigen Vielecks von gleichem Halbmesser der Seiten, mit weniger Seiten.

## 182.

**Lehrsatz.** Wenn zwei regelmässige Vielecke gleich viele Seiten haben, so ist dasjenige das grössere, welches den grössten Halbmesser der Ecken oder den grössten Halbmesser der Seiten hat; und umgekehrt: wenn das eine grösser ist, so hat es einen grössern Halbmesser der Ecken und einen grössern Halbmesser der Seiten, als das andere.

**Beweis.** Wenn ein regelmässiges Vieleck (Fig. 66.)  $n$  Seiten hat, so ist der Inhalt jedes Dreiecks über einer einzelnen Seite, wie z. B.  $AMB$ , der  $n$ te Theil der



Fläche des Vielecks; denn alle die Dreiecke *AMB*, *BMC*, *CMD* etc. sind einander gleich.

Hat nun ein anderes regelmässiges Vieleck gleich viel Seiten, aber einen grössern Halbmesser der Ecken, oder einen grössern Halbmesser der Seiten; so sind zwar die Winkel der Dreiecke über den Seiten noch die nemlichen, weil die Dreiecke gleichschenklige sind und also der Winkel am Mittel-Punct immer  $\frac{40}{n}$  ist, allein die Seiten der Dreiecke, wie *A, M* und *B, M*, oder die Perpendikel, wie *P, M*, aus *M* auf die neuen Seiten, sind grösser. Folglich sind die Dreiecke grösser und folglich auch die ganzen Vielecke.

Sind umgekehrt die Vielecke grösser, so sind auch jedes der *n* gleichwinkligen und gleichschenkligen Dreiecke über den Seiten und mithin die Seiten und das Perpendikel dieser Dreiecke, das heisst, die Halbmesser der Seiten und die Halbmesser der Ecken, grösser.

## 183.

**Lehrsatz. I.** Wenn zwei regelmässige Vielecke gleiche Halbmesser der Ecken haben, so ist der Halbmesser der Seiten desjenigen der grössere, welches die meisten Seiten hat.

**Beweis.** Der Halbmesser der Seiten eines regelmässigen Vielecks ist das Perpendikel aus dem Mittel-Punct auf die Seiten der gleichschenkligen Dreiecke, aus welchen das Vieleck besteht. Dieses Perpendikel ist in demjenigen Vieleck von gleichem Halbmesser der Ecken das grössere, welches die meisten Seiten hat, weil in demselben die Winkel der gleichschenkligen Dreiecke am Mittel-Punct die kleinern sind (§. 109. und §. 48. II.).

**II.** Wenn zwei regelmässige Vielecke gleiche Halbmesser der Seiten haben, so ist der Halbmesser der Ecken desjenigen der kleinere, welches die meisten Seiten hat.

**Beweis.** Die Halbmesser der Ecken sind schräge Linien aus dem Mittel-Puncte der Vielecke nach den Seiten, und diese schrägen Linien sind um so kleiner, je kleiner die Seiten sind; die Seiten aber sind um so kleiner, je mehr das Vieleck ihrer bei gleichem Halbmesser der Seiten hat, weil alsdann die Winkel am Mittel-Punct über den Seiten um so kleiner sind.

## 184.

**Lehrsatz.** Der Inhalt eines regelmässigen Vielecks ist gleich der Hälfte des Products seines Umfangs in den Halbmesser seiner Seiten, und das halbe Product des Umfangs eines regelmässigen Vielecks in seinen Halbmesser der Ecken ist gleich dem Inhalt eines Vielecks von der doppelten Seiten-Zahl.

Wenn z. B. der Umfang des regelmässigen Vielecks  $ABCD \dots$  (Fig. 65.) durch  $p$ , der Halbmesser der Seiten  $PM$  durch  $r$  und der Halbmesser der Ecken  $AM$  durch  $R$  bezeichnet wird, so ist der Inhalt des Vielecks  $ABCD \dots = \frac{1}{2}pr$  und der Inhalt des Vielecks  $AP_4BQC \dots$ , von der doppelten Seiten-Zahl, gleich  $\frac{1}{2}pR$ .

**Beweis.** Der Inhalt jedes Dreiecks über einer Seite des Vielecks, z. B. des Dreiecks  $AMB$ , ist  $\frac{1}{2}AB \cdot PM = \frac{1}{2}AB \cdot r$ . Nun ist der Umfang  $p = n \cdot AB$  und der Inhalt gleich  $n(\frac{1}{2}AB \cdot r)$ , weil er aus  $n$  gleichen Dreiecken, jedes wie  $AMB$ , besteht; also ist der Inhalt des Vielecks gleich  $\frac{1}{2}nAB \cdot r = \frac{1}{2}pr$ ; welches das Erste war.

Ferner ist der Inhalt der beiden Dreiecke  $P_4MA$  und  $P_4MB$  gleich  $\frac{1}{2}P_4M \cdot AB$ , oder, weil  $P_4M = AM = R$  ist, gleich  $\frac{1}{2}R \cdot AB$ . Nun ist der Umfang des Vielecks  $ABCD \dots$  gleich  $n \cdot AB = p$ , der Inhalt des Vielecks  $AP_4BQC \dots$  von der doppelten Seitenzahl aber ist gleich  $n(\frac{1}{2}R \cdot AB) = \frac{1}{2}R \cdot nAB$ , weil er aus  $n$  Paaren von Dreiecken, wie  $P_4MA$  und  $P_4MB$  besteht. Also ist der Inhalt dieses Vielecks gleich  $\frac{1}{2}R \cdot p = \frac{1}{2}pR$ ; welches das Zweite war.

## 185.

**Lehrsatz. I.** Wenn zwei regelmässige Vielecke gleiche Halbmesser den Ecken haben, so ist der Inhalt desjenigen der grössere, welches die meisten Seiten hat.

**Beweis.** Denn sein Umfang ist nach (§. 181. I.) und sein Halbmesser der Seiten nach (§. 183. I.) der grössere, und das halbe Product des Umfangs in den Halbmesser der Seiten ist der Inhalt (§. 184.).

**II.** Wenn zwei regelmässige Vielecke gleiche Halbmesser der Seiten haben, so ist der Inhalt desjenigen der kleinere, welches die meisten Seiten hat.

**Beweis.** Denn sein Umfang ist der kleinere (§. 181. II.), der Halbmesser der Seiten ist in beiden der nemliche und das halbe Product des Umfangs in den Halbmesser der Seiten ist der Inhalt (§. 184.).

## 186.

**Lehrsatz.** Unter allen regelmässigen Vielecken von gleichem Umfange ist dasjenige das grösste, welches die meisten Seiten hat.

**Beweis.** Man nehme zwei regelmässige Vielecke  $V_1$  und  $V_2$  von gleichem Halbmesser der Seiten  $r$  an. Das Vieleck  $V_1$  habe  $m$  und  $V_2$ ,  $n$  Seiten, so ist nach (§. 181. II.) der Umfang desjenigen, welches die meisten Seiten hat, der kleinere; dasselbe sey  $V_1$ . Bezeichnet man diesen kleinern Umfang, also den Umfang von  $V_1$  durch  $p$  und den grössern Umfang des andern Vielecks  $V_2$ , mit weniger Seiten, durch  $P$ , so ist nach (§. 184.) der Inhalt von  $V_1$  gleich  $pr$  und von  $V_2$  gleich  $Pr$ .

Nun nehme man ein drittes regelmässiges Vieleck  $V_3$ , mit der nemlichen grösseren Seiten Zahl, also mit  $m$  Seiten an wie  $V_1$ , aber von eben so grossem Umfange  $P$  wie das Vieleck  $V_2$ , so ist der Halbmesser der Seiten von  $V_3$ , nach (§. 182.), nothwendig grösser als der Halbmesser  $r$  der beiden vorigen Vielecke, z. B. gleich  $R$ . Der Inhalt des Vielecks  $V_3$  ist also gleich

$$P \cdot R,$$

und dieser Inhalt ist grösser als der Inhalt  $P \cdot r$  von  $V_2$ , weil  $R$  grösser ist als  $r$ . Also ist der Inhalt des Vielecks  $V_3$ , welches denselben Umfang, wie das Vieleck  $V_2$ , aber mehr Seiten hat, grösser.

## 187.

**Lehrsatz.** Wenn der Inhalt eines beliebigen regelmässigen Vielecks durch  $a$ , der Inhalt eines andern regelmässigen Vielecks von eben so vielen Seiten, dessen Halbmesser der Seiten aber dem Halbmesser der Ecken des vorigen gleich ist, durch  $b$ , der Inhalt eines dritten regelmässigen Vielecks von doppelt so vielen Seiten als das erste und mit dem nemlichen Halbmesser der Ecken, durch  $\alpha$ , und der Inhalt eines vierten Vielecks von eben so vielen, also ebenfalls doppelt so vielen Seiten als das erste und zweite, und mit dem nemlichen Halbmesser der Seiten wie das zweite, durch  $\beta$  bezeichnet wird, so ist

$$\alpha = \sqrt{ab} \text{ und } \beta = \frac{2ab}{a + \alpha}.$$

**Beweis.** Es sey  $C$  (Fig. 111.) der gemeinschaftliche Mittelpunkt der vier verschiedenen Vielecke.  $AB$  sey eine Seite des ersten Vielecks, die Zahl seiner Seiten  $n$ , also  $ACB$  eines der  $n$  gleichen gleichschenkligen Dreiecke, aus welchen das Vieleck zusammengesetzt ist; so ist die Fläche dieses Dreiecks gleich  $\frac{a}{n}$ , oder

$$1. \triangle ACB = \frac{a}{n}.$$

Ferner sey  $MC = AC$  und  $EF$  mit  $AB$  parallel, so ist  $ECF$  eines der  $n$  gleichen gleichschenkligen Dreiecke, aus welchen das zweite Vieleck zusammengesetzt ist. Also ist die Fläche dieses Dreiecks gleich  $\frac{b}{n}$ , oder

$$2. \triangle ECF = \frac{b}{n}.$$

Nun halbirt das Perpendikel  $MC$  auf  $AB$  und  $EF$  den Winkel  $ACB$  (§. 59. III.); also sind  $ACM$  und  $BCM$  zwei von den gleichen gleichschenkligen  $2n$  Dreiecken, aus welchen das dritte Vieleck von doppelt so vielen Seiten und gleichem Halbmesser der Ecken, wie das erste, zusammengesetzt ist. Mithin ist die Fläche jedes dieser Dreiecke gleich  $\frac{a}{2n}$ , folglich

$$3. \triangle ACM = \frac{a}{2n}.$$

Endlich halbire  $PC$  den Winkel  $ECM$  und  $QC$  den Winkel  $FOM$ , so daß  $PCQ$  die Hälfte des Winkels  $ECF$  ist, so ist  $PCQ$  eines von den  $2n$  gleichen gleichschenkligen Dreiecken, aus welchen das vierte Vieleck von doppelt so vielen Seiten und gleichem Halbmesser der Seiten, wie das zweite, besteht. Mithin ist die Fläche dieses Dreiecks gleich  $\frac{\beta}{2n}$ , folglich ist

$$4. \triangle PCQ = \frac{\beta}{2n}.$$

Nun haben die Dreiecke  $ACD$  und  $ACM$  über den Grundlinien  $CD$  und  $CM$  gleiche Höhe  $AD$ , also ist

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle ACM} = \frac{CD}{CM}.$$

Aber  $ACD$  ist die Hälfte des Dreiecks  $ACB$ , und folglich seine Fläche gleich  $\frac{a}{2n}$  (1.). Also ist (1. und 3.)

$$5. \frac{a}{2n} : \frac{a}{2n} = \frac{CD}{CM}, \text{ oder } \frac{a}{a} = \frac{CD}{CM}.$$

Die Dreiecke  $ACM$  und  $ECM$  haben ebenfalls über den Grundlinien  $AC$  und  $EC$  gleiche Höhe; denn sie haben  $M$  zum gemeinschaftlichen Scheitel. Also ist

$$\frac{\triangle ACM}{\triangle ECM} = \frac{AC}{EC}.$$

Aber  $ECM$  ist die Hälfte des Dreiecks  $ECF$ , und folglich seine Fläche gleich  $\frac{b}{2n}$  (2.). Also ist (3. und 2.)

$$6. \frac{a}{2n} : \frac{b}{2n} = \frac{AC}{EC}, \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{AC}{EC}.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke  $ADC$  und  $EMC$  sind aber, wegen der Parallelen  $AD$  und  $EM$ , gleichwinklig. Also ist  $\frac{CD}{CM} = \frac{AC}{EC}$ , folglich ist vermöge (5. und 6.)

$$7. \frac{a}{a} = \frac{a}{b}.$$

woraus  $ab = \alpha^2$  und mithin

$$8. \alpha = \sqrt{ab}$$

folgt; welches das Erste war.

Die Dreiecke  $CMP$  und  $CPE$  haben über den Grundlinien  $MP$  und  $PE$  gleiche Höhe  $CM$ . Also ist

$$9. \frac{\Delta CMP}{\Delta CPE} = \frac{MP}{PE}.$$

Nun halbir die Linie  $CP$  den Winkel  $MCE$ , also ist vermöge (§. 143. I.)  $CE \cdot MP = PE \cdot CM$ , oder

$$\frac{MP}{PE} = \frac{CM}{CE}.$$

Wegen der Gleichwinkligkeit der Dreiecke  $ADC$  und  $EMC$  ist aber  $\frac{CM}{CE} = \frac{CD}{CA}$ , oder, weil  $CA = CM$ ,  $\frac{CM}{CE} = \frac{CD}{CM}$ . Also ist

$$\frac{MP}{PE} = \frac{CD}{CM},$$

und folglich vermöge (9.)

$$10. \frac{\Delta CMP}{\Delta CPE} = \frac{CD}{CM}.$$

Da aber in (5.)  $\frac{CD}{CM} = \frac{a}{\alpha}$  war, so ist

$$\frac{\Delta CMP}{\Delta CPE} = \frac{a}{\alpha}, \text{ oder } \frac{\Delta CPE}{\Delta CMP} = \frac{\alpha}{a},$$

oder auch  $1 + \frac{\Delta CPE}{\Delta CMP} = 1 + \frac{\alpha}{a}$ , oder

$$11. \frac{\Delta CMP + \Delta CPE}{\Delta CMP} = \frac{a + \alpha}{a}.$$

Nun ist  $\Delta CMP + \Delta CPE = \Delta ECM = \frac{1}{2} \Delta ECF = \frac{b}{2n}$  (2.) und

$\Delta CMP = \frac{1}{2} \Delta PCQ = \frac{\beta}{4n}$  (4.). Also ist

$$\frac{b}{2n} : \frac{\beta}{4n} = \frac{a + \alpha}{a},$$

oder  $\frac{2b}{\beta} = \frac{a + \alpha}{a}$ , oder

$$12. \beta = \frac{2ab}{a + \alpha};$$

welches das Zweite war.

### Berechnung des Inhalts beliebiger gradliniger Figuren.

188.

*Anmerkung.* Den Inhalt beliebiger vielseitiger Figuren findet man häufig am besten, wenn man erst die Figuren in andere theilt, deren Inhalt sich leicht berechnen läßt. Am natürlichsten ist die Eintheilung in Dreiecke, etwa durch Diagonalen die sich nicht kreuzen, z. B. wie (Fig. 112.), in die Dreiecke  $IHG$ ,  $IGL$ ,  $IKL$ ,  $GLF$ ,  $FLC$  etc. Man kann alsdann den Inhalt je

zweier Dreiecke, die eine gemeinschaftliche Grundlinie haben, zugleich berechnen, wodurch man immer für zwei Dreiecke eine Multiplication erspart. Z. B. den Inhalt der beiden Dreiecke  $ABL$  und  $BLC$  findet man, wenn man etwa die halbe Diagonal  $LB$  mit der Summe der Perpendikel  $AX$  und  $CY$  aus  $A$  und  $C$  auf  $LB$ , multiplicirt. Den Inhalt von  $CFD$  und  $EFD$  findet man, wenn man die halbe Diagonal  $FD$  mit der Summe der Perpendikel  $EW$  und  $CZ$  aus  $E$  und  $C$  auf  $FD$ , multiplicirt; den Inhalt von  $LFC$  und  $GLF$ , wenn man die halbe Diagonale  $LF$  mit der Summe der Perpendikel  $GM$  und  $CN$  aus  $G$  und  $C$  auf  $LF$ , multiplicirt; u. s. w. Die Summe aller dieser Producte ist der Inhalt der Figur. Ist die Zahl der Dreiecke, in welche man die Figur getheilt hat, ungerade, so bleibt zuletzt ein einzelnes Dreieck übrig, welches man für sich berechnen muß.

Man kann auch vielseitige Figuren, um ihren Inhalt zu finden, durch Parallelen mit irgend einer Seite, die durch die Ecken gehen, in Trapeze theilen und die Trapeze nach (§. 167.) berechnen. Z. B. man kann in der obigen Figur die Linien  $PCQ$ ,  $OLR$ ,  $IS$ ,  $TFU$ ,  $HV$  durch die Ecken  $C$ ,  $L$ ,  $I$ ,  $F$  und  $H$  legen, und die dadurch entstehenden Trapeze, nebst den übrig bleibenden Dreiecken  $CQD$ ,  $OKL$ ,  $FEU$  und  $HGV$  berechnen. Da aber der Inhalt eines Trapezes nicht weniger Rechnung erfordert, als der Inhalt zweier an einander liegender Dreiecke, so ist bei dieser Rechnung gegen die vorige kein wesentlicher Vortheil, im Gegentheil Nachtheil, weil in der Ausübung nicht so leicht zwei Parallelen gezogen, als gegebene Punkte mit einander durch grade Linien verbunden werden können.

Weiterhin werden sich Mittel zeigen, den Inhalt einer Figur aus den Seiten und Winkeln zu berechnen.

Ist eine Figur durch die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Ecken gegeben (§. 64.), so läßt sich die Berechnung des Inhalts der Figur aus den Coordinaten mittelst folgenden Lehrsatzes abkürzen.

189.

**Lehrsatz.** Wenn die rechtwinkligen Coordinaten der Ecken einer beliebigen Figur gegeben sind, so findet man den Inhalt der Figur, wo auch der Anfangs-Punct der Coordinaten liegen mag, wenn man die Ordinate jeder Ecke auf eine der Axen, von der Ordinate der dritten

darauf folgenden Ecke abzieht, den Rest mit der Ordinate auf der andern Axe der dazwischen liegenden Ecke multiplicirt, alle diese Producte zusammenrechnet und von der Summe die Hälfte nimmt.

Es ist gleichviel ob die Ordinaten und die durch das Abziehen gefundenen Factoren positiv oder negativ sind, nur muß man die allgemeine Rechnungs-Regeln der Zeichen überall richtig beobachten.

Z. B. der Inhalt der Figur  $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_9$  (Fig. 113.) ist

$$\begin{aligned} & C_1C_3 \cdot B_2C_2 + C_2C_4 \cdot B_3C_3 + C_3C_5 \cdot B_4C_4 \\ & + C_4C_6 \cdot B_5C_5 + C_5C_7 \cdot B_6C_6 - C_6C_8 \cdot B_7C_7 \\ & - C_7C_9 \cdot B_8C_8 - C_8C_1 \cdot B_9C_9 - C_9C_2 \cdot B_1C_1, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & - D_1D_3 \cdot B_2D_2 - D_2D_4 \cdot B_3D_3 + D_3D_5 \cdot B_4D_4 \\ & + D_4D_6 \cdot B_5D_5 + D_5D_7 \cdot B_6D_6 + D_6D_8 \cdot B_7D_7 \\ & - D_7D_9 \cdot B_8D_8 - D_8D_1 \cdot B_9D_9 - D_9D_2 \cdot B_1D_1. \end{aligned}$$

*Beweis.* Wenn  $AP$  und  $AQ$  die rechtwinkligen Coordinaten-Axen und  $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3$  etc. Perpendikel aus den auf einander folgenden Ecken der Figur auf  $AP$  sind, so sey

$$\begin{aligned} AC_1 &= p_1, & C_1B_1 &= q_1, \\ AC_2 &= p_2, & C_2B_2 &= q_2, \\ AC_3 &= p_3, & C_3B_3 &= q_3, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

Nun ist der Inhalt des Trapezes  $B_1B_2C_1C_2$  nach (§. 167.) gleich  $\frac{1}{2}(p_2 - p_1)(q_2 + q_1)$ ; denn  $\frac{1}{2}(q_2 + q_1)$  ist die halbe Summe der parallelen Seiten  $B_1C_1$  und  $B_2C_2$ , und  $p_2 - p_1$  ist die Höhe  $C_1C_2$ . Ferner ist der Inhalt des Trapezes  $B_2B_3C_2C_3$ , auf dieselbe Weise, gleich  $\frac{1}{2}(p_3 - p_2)(q_3 + q_2)$ , und es ist leicht zu sehen, daß man ihn aus dem Inhalt des vorigen Trapezes  $\frac{1}{2}(p_2 - p_1)(q_2 + q_1)$  findet, wenn man die Zeiger aller Buchstaben um 1 weiter rückt. Nimmt man diese beiden Trapeze zusammen, so erhält man den Inhalt der Figur  $B_1B_2B_3C_3C_1$ . Der Inhalt des Trapezes  $B_3B_4C_3C_4$  ist nach derselben Regel gleich  $\frac{1}{2}(p_4 - p_3)(q_4 + q_3)$ . Man findet ihn wieder aus dem vorigen  $\frac{1}{2}(p_3 - p_2)(q_3 + q_2)$ , wenn man die Zeiger aller Buchstaben um 1 weiter rückt. Thut man den Inhalt zu dem vorigen hinzu, so erhält man die Figur  $B_1B_2B_3B_4C_4C_1$ . Nimmt man den Inhalt des folgenden Trapezes nach derselben Regel, nemlich durch Weiterrücken der Zeiger der Buchstaben, so erhält man  $\frac{1}{2}(p_5 - p_4)(q_5 + q_4)$ , welches  
aber

aber der Inhalt negativ ist, weil  $p_4$  gröfser ist als  $p_3$ . Man thue diesen negativen Inhalt hinzu, so ist es soviel, als wenn man ihn von der vorigen Figur abzieht. Man bekommt also die Figur  $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 C_5 C_1$ . Der Inhalt des folgenden Trapezes  $B_5 B_6 C_6 C_5$ , immer nach derselben Regel genommen, ist wieder positiv, und wenn man ihn hinzuthut, so bekommt man die Figur  $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 C_6 C_1$ . Der Inhalt des hierauf folgenden Trapezes  $B_6 B_7 C_7 C_6$ , nach derselben Regel genommen, ist negativ. Thut man ihn als negativ hinzu, welches soviel ist, als dafs man ihn abzieht, so bekommt man die Figur  $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 C_7 C_1$ . Der Inhalt des folgenden Trapezes  $B_7 B_8 C_8 C_7$  ist wieder negativ, und wenn man ihn hinzuthut, so bekommt man die Figur  $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 C_8 C_1$ . Der Inhalt des folgenden Trapezes  $B_8 B_9 C_9 C_8$  ist wieder positiv und man bekommt, wenn man ihn hinzuthut, die Figur  $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 C_9 C_1$ . Der Inhalt des letzten Trapezes  $B_9 B_1 C_1 C_9$  endlich ist negativ, und man bekommt, wenn man ihn hinzuthut, die Figur  $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9$ , das heifst: die Figur selbst, deren Inhalt man verlangt. Alles was auferhalb derselben liegt, hat sich von selbst aufgehoben und es bleibt nur die Figur allein übrig. Es ist leicht zu sehen, dafs das Verfahren immer das nemliche bleibt, wie viel Seiten auch die gegebene Figur haben mag und wie auch die Winkel aus- oder einspringen mögen.

Man findet also den Inhalt der ganzen Figur, wenn man die folgenden, nach einer und derselben Regel, nemlich durch Weiterrücken der Zeiger der Buchstaben, ausgedrückten Inhalte der einzelnen Trapeze zusammennimmt, nemlich:

$$\text{Trapez } B_1 B_2 C_1 C_2 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(q_2 + q_1) = \frac{1}{2}(p_2 q_2 + p_2 q_1 - p_1 q_2 - p_1 q_1)$$

$$\text{Trapez } B_2 B_3 C_2 C_3 = \frac{1}{2}(p_3 - p_2)(q_3 + q_2) = \frac{1}{2}(p_3 q_3 + p_3 q_2 - p_2 q_3 - p_2 q_2)$$

$$\text{Trapez } B_3 B_4 C_3 C_4 = \frac{1}{2}(p_4 - p_3)(q_4 + q_3) = \frac{1}{2}(p_4 q_4 + p_4 q_3 - p_3 q_4 - p_3 q_3)$$

$$\text{Trapez } B_4 B_5 C_4 C_5 = \frac{1}{2}(p_5 - p_4)(q_5 + q_4) = \frac{1}{2}(p_5 q_5 + p_5 q_4 - p_4 q_5 - p_4 q_4)$$

$$\text{Trapez } B_5 B_6 C_5 C_6 = \frac{1}{2}(p_6 - p_5)(q_6 + q_5) = \frac{1}{2}(p_6 q_6 + p_6 q_5 - p_5 q_6 - p_5 q_5)$$

$$\text{Trapez } B_6 B_7 C_6 C_7 = \frac{1}{2}(p_7 - p_6)(q_7 + q_6) = \frac{1}{2}(p_7 q_7 + p_7 q_6 - p_6 q_7 - p_6 q_6)$$

$$\text{Trapez } B_7 B_8 C_7 C_8 = \frac{1}{2}(p_8 - p_7)(q_8 + q_7) = \frac{1}{2}(p_8 q_8 + p_8 q_7 - p_7 q_8 - p_7 q_7)$$

$$\text{Trapez } B_8 B_9 C_8 C_9 = \frac{1}{2}(p_9 - p_8)(q_9 + q_8) = \frac{1}{2}(p_9 q_9 + p_9 q_8 - p_8 q_9 - p_8 q_8)$$

$$\text{Trapez } B_9 B_1 C_9 C_1 = \frac{1}{2}(p_1 - p_9)(q_1 + q_9) = \frac{1}{2}(p_1 q_1 + p_1 q_9 - p_9 q_1 - p_9 q_9)$$

Nun ist leicht zu sehen, dafs, wenn man die, rechter hand, durch wirkliches in einander multipliciren ent-



wickelten Ausdrücke der einzelnen Trapeze zusammenrechnet, alle vorderen Glieder mit den hinteren sich aufheben und nur die mittleren Glieder übrig bleiben, deren Summe, wie ebenfalls leicht zu sehen,

$$\frac{1}{2}[(p_1 - p_2)q_2 + (p_2 - p_3)q_3 + (p_3 - p_4)q_4 + (p_4 - p_5)q_5 + (p_5 - p_6)q_6 + (p_6 - p_7)q_7 + (p_7 - p_8)q_8 + (p_8 - p_1)q_1]$$

oder auch

$$\frac{1}{2}[(q_1 - q_2)p_2 + (q_2 - q_3)p_3 + (q_3 - q_4)p_4 + (q_4 - q_5)p_5 + (q_5 - q_6)p_6 + (q_6 - q_7)p_7 + (q_7 - q_8)p_8 + (q_8 - q_1)p_1]$$

ist.

In dem ersten Ausdruck ist  $p_3 - p_2$  die Grundlinie  $C_1 C_2$  und  $q_2$  ist die Höhe  $B_2 C_2$ ,  $p_4 - p_3$  ist die Grundlinie  $C_2 C_3$  und  $q_3$  ist die Höhe  $B_3 C_3$  u. s. w.

In dem zweiten Ausdruck ist  $q_1 - q_2$  die Grundlinie  $D_1 D_2$  und  $p_2$  ist die Höhe  $B_2 D_2$ ,  $q_2 - q_3$  ist die Grundlinie  $D_2 D_3$  und  $p_3$  ist die Höhe  $B_3 D_3$  u. s. w.: welches der Satz ist.

Es ist ganz gleichgültig, wo der Anfangs-Punct der Coordinaten liegt, sey es in  $A$  oder vielleicht in einer der Ecken der Figur, z. B. in  $B_1$ , oder vielleicht innerhalb der Figur, z. B. in  $A_1$  u. s. w. Man darf nur Acht haben, daß man die Coordinaten, welche rechterhand und oberhalb der Axen fallen, positiv, und die Coordinaten, welche linkerhand und unterhalb der Axen fallen, negativ nimmt, und beim Abziehen der, nach der Aufeinanderfolge der Zeiger, das heist, nach der Aufeinanderfolge der Ecken der Figur geordneten Abscissen und Ordinaten, die allgemeinen Rechnungs-Regeln für die Zeichen richtig beobachtet.

190.

*Zusatz.* Die obigen Ausdrücke des Inhalts eines Vielecks haben so viele Glieder, als das Vieleck Ecken oder Seiten. Hat daher die Figur nur drei Seiten und ist also ein Dreieck, so ist der Inhalt

$$\Delta = p_1(q_1 - q_2) + p_2(q_2 - q_3) + p_3(q_3 - q_1),$$

oder

$$\Delta = q_1(p_1 - p_2) + q_2(p_2 - p_3) + q_3(p_3 - p_1),$$

wo  $q$  und  $p$  die rechtwinkligen Coordinaten für beliebige aufeinander senkrechte Axen sind.

## Dritter Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit umschlossener Figuren  
und dem was sich darauf bezieht.

## Von der Möglichkeit ähnlicher Figuren.

191.

**Lehrsatz.** Es sind unzählige Dreiecke von verschiedener Grösse möglich, deren Winkel die nemlichen, und deren Seiten von einander Gleichvielfache sind.

**Beweis.** In (§. 169.) ist bewiesen worden, daß, wenn z. B. die Seiten eines beliebigen Dreiecks Gleichvielfache von den Seiten eines andern sind, die Winkel beider Dreiecke nothwendig gleich sein müssen (§. 169. IV.). Nun kann man nicht allein mit beliebigen Seiten, sondern mit beliebigen, vielfach längern oder kürzern Seiten Dreiecke einschließen. Also sind unzählige Dreiecke möglich, welche alle die nemlichen Winkel haben, und deren Seiten von einander Gleichvielfache sind.

192.

**Lehrsatz.** Es sind unzählige Figuren von verschiedener Grösse möglich, deren Winkel die nemlichen und deren Seiten von einander Gleichvielfache sind.

**Beweis.** Denn setzt man Figuren aus Dreiecken zusammen, deren Winkel die nemlichen und deren Seiten von einander Gleichvielfache sind, wie dergleichen nach (§. 191.) allemal statt finden, so haben sie diese Eigenschaft.

Wenn z. B. die Seiten der Dreiecke  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$ ,  $AEF$  und  $AFG$  (Fig. 114. I.) Gleichvielfache von den Seiten der Dreiecke  $abc$ ,  $acd$ ,  $ade$ ,  $aef$  und  $afg$  (Fig. 114. II.) sind, welches allemal möglich ist, so sind alle Seiten der Figur  $ABCDEFG$  Gleichvielfache von den Seiten der Figur  $abcdefg$ . Die Winkel der einzelnen Dreiecke sind aber, nach (§. 169. IV.) in beiden Figuren die nemlichen; also sind auch die Winkel  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , . . . .  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , . . . . der beiden Figuren selbst, weil sie Summen der Winkel der einzelnen Dreiecke sind, in

beiden Figuren die nemlichen. Folglich sind die Seiten der beiden Figuren Gleichvielfache und ihre Winkel die nemlichen. Und da man nun die Seiten beliebig vielfach annehmen kann, so sind unzählige Figuren möglich, welche alle die nemlichen Winkel haben und deren Seiten von einander Gleichvielfache sind.

### Erklärung der Aehnlichkeit

193.

*Erklärung.* Wenn die Winkel einer ebenen Figur den Winkeln einer andern ebenen Figur, in derselben Aufeinanderfolge, gleich, und die Seiten der ersten Figur, in eben, der Aufeinanderfolge, Gleichvielfache von den Seiten der andern sind, welches zwischen unzähligen Figuren möglich ist (§. 192.), so sollen die Figuren gleichgestaltet oder ähnlich heißen \*).

### Von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

194.

*Lehrsatz.* Dreiecke sind ähnlich, wenn von ihren bestimmenden Stücken (§. 56.) die Winkel die nemlichen und die Seiten Gleichvielfache sind.

Die bestimmenden Stücke sind:

Eine Seite und zwei oder drei Winkel,

Zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel.

Zwei Seiten und der der grösseren gegenüberliegende Winkel.

Alle drei Seiten (§. 56.).

Also sind Dreiecke ähnlich:

1. - Wenn sie gleichwinklig sind. Denn die eine Seite in einem Dreiecke kann ein beliebiges Vielfache von der einen Seite im Andern seyn.

---

\*) Man giebt diese Erklärung der Aehnlichkeit der Figuren zuweilen, ohne daß die Möglichkeit solcher Figuren vorher gezeigt wird. Die Möglichkeit von Dingen, von welchen Dieses oder Jenes, wovon die Möglichkeit abhängt, behauptet wird, läßt sich zwar allerdings auch voraussetzen; allein dann muß wenigstens bemerkt werden, daß man die Möglichkeit voraussetze. Besser möchte es seyn, hier vorher die Möglichkeit, wie oben, zu beweisen.

2. Wenn ein Winkel in dem einen so groß ist, als in dem andern, und die Seiten, welche diesen Winkel einschließen sind in dem einen Dreieck Gleichvielfache von den, den nemlichen Winkel einschließenden Seiten im andern.
3. Wenn zwei Seiten des einen Dreiecks Gleichvielfache von zwei Seiten des andern sind, und der, der größern Seite gegenüber liegende Winkel ist in dem einen Dreieck so groß, als in dem andern.
4. Wenn die drei Seiten des einen Dreiecks Gleichvielfache sind von den drei Seiten des andern.

*Beweis.*

In (§. 169. I.) ist bewiesen, daß, wenn zwei Dreiecke gleichwinklig sind, die Seiten des einen Gleichvielfache sind von den Seiten des andern.

In (§. 169. II.) ist bewiesen, daß, wenn ein Winkel eines Dreiecks so groß ist, als ein Winkel eines andern, und die Seiten, welche diesen Winkel im ersten Dreieck einschließen, sind Gleichvielfache von den Seiten, welche den gleichen Winkel im andern einschließen, daß dann auch die beiden andern Winkel im ersten Dreieck so groß sind, als im andern, und daß auch die anderen Seiten in beiden Dreiecken Gleichvielfache sind.

In (§. 169. III.) ist bewiesen, daß, wenn zwei Seiten eines Dreiecks Gleichvielfache von zwei Seiten eines andern sind, und der der größern gegenüberliegende Winkel ist im ersten Dreieck so groß als im zweiten, daß auch die übrigen Winkel in beiden Dreiecken die nemlichen und die übrigen Seiten in dem einen, Gleichvielfache von den übrigen Seiten im andern sind.

In (§. 169. IV.) ist bewiesen, daß, wenn die drei Seiten eines Dreiecks Gleichvielfache von den drei Seiten eines andern sind, daß dann die beiden Dreiecke die nemlichen Winkel haben.

In allen vier Fällen haben also die Dreiecke die nemlichen Winkel und gleichvielfache Seiten und sind folglich ähnlich.

*Zusatz.* Es sind auch Dreiecke ähnlich, wenn die Seiten des einen mit den Seiten des andern gleiche Win-

kel machen. Denn die Dreiecke sind alsdann gleichwinklig (§. 57.) \*).

### Von der Aehnlichkeit beliebiger Figuren.

196.

**Lehrsatz.** Vielecke sind ähnlich, wenn von ihren bestimmenden Stücken (§. 96. II.) die Winkel die nemlichen und die Seiten Gleichvielfache sind.

**Beweis.** Wenn z. B.  $P_1$  und  $P_2$  zwei Vielecke bezeichnen, von deren bestimmenden Stücken die Winkel die nemlichen und die Seiten Gleichvielfache sind, so soll bewiesen werden, daß  $P_1$  und  $P_2$  ähnlich sind, daß heißt, daß nicht bloß die bestimmenden Winkel von  $P_1$  und  $P_2$  gleich groß und die bestimmenden Seiten von  $P_1$  Gleichvielfache von den bestimmenden Seiten von  $P_2$  sind, sondern daß alle Winkel von  $P_1$  und  $P_2$  gleich groß, und alle Seiten von  $P_1$  und  $P_2$  Gleichvielfache sind.

Man nehme ein drittes Vieleck  $P_3$  an, von der Art, daß alle Winkel von  $P_1$  und  $P_3$  gleich und alle Seiten von  $P_1$  Gleichvielfache von den Seiten des Vielecks  $P_3$ , und zwar die nemlichen Gleichvielfachen sind, wie die bestimmenden Seiten in  $P_1$  von denen in  $P_3$ , welches allemal möglich ist (§. 191.). Alsdann sind die Vielecke  $P_1$  und  $P_3$  ähnlich (§. 193.). Nun sind aber unter allen Winkeln und allen Seiten auch die bestimmenden Winkel und Seiten mit enthalten. Also sind die bestimmenden Winkel und die bestimmenden Seiten von  $P_2$  denen von  $P_3$  gleich; denn die bestimmenden Winkel sind in allen drei Vielecken die nemlichen; die bestimmenden Seiten des Vielecks  $P_1$  aber sind, nach der Voraussetzung, die nemlichen Gleichvielfachen von  $P_3$  wie von  $P_2$ . Also sind die Vielecke  $P_2$  und  $P_3$  einander gleich. Nun sind  $P_1$  und  $P_3$  ähnlich; also sind auch  $P_1$  und  $P_2$  ähnlich; was zu beweisen war.

197.

**Erklärung.** Aehnlichliegende Linien in ähnlichen Figuren sollen diejenigen heißen, welche mit

---

\*) Man findet diesen Fall zuweilen, als einen besondern fünften Fall der Aehnlichkeit aufgeführt. Er ist aber kein neuer Fall, da er bloß auf der Aehnlichkeit gleichwinkliger Dreiecke beruht.

ähnlichliegenden Seiten oder Diagonalen, oder auch mit andern ähnlichliegenden Linien ähnliche Vielecke einschließen.

Z. B.  $BE$  und  $\beta\epsilon$  (Fig. 115. I. und II.) sind ähnlichliegende Diagonalen, wenn die Vielecke  $BAFE$  und  $\beta\alpha\phi\epsilon$ , welche sie mit den Seiten  $AB$ ,  $\alpha\beta$  etc. der gegebenen Vielecke einschließen, einander ähnlich sind. Eben so sind  $KL$  und  $\kappa\lambda$  ähnlichliegende Linien, wenn z. B. die Vielecke  $KAFEL$  und  $\kappa\alpha\phi\epsilon\lambda$  ähnlich sind, woraus sich auch, nach den Sätzen von den bestimmenden Seiten und Winkeln der Vielecke (§. 96.), findet, in wie fern die Abstände  $AK$ ,  $\alpha\kappa$ ,  $EL$  und  $\epsilon\lambda$ , oder die Winkel bei  $K$ ,  $L$ ,  $\kappa$  und  $\lambda$ , von welchen die Lage der Linien  $KL$  und  $\kappa\lambda$  abhängen würde, unter den bestimmenden Stücken der von ihnen abgeschnittenen Vielecke seyn können und müssen.

Eben so, wenn ähnlichliegende Linien nicht blos mit Seiten der gegebenen Figuren, sondern vielleicht mit einander oder mit Diagonalen zusammentreffen, wie z. B. die Linien  $MNSTE$  und  $\mu\nu\sigma\tau\epsilon$ . Sie heißen ähnlichliegend, wenn die Figuren  $AMNSTEF$  und  $\alpha\mu\nu\sigma\tau\epsilon\phi$ , welche sie abschneiden, einander ähnlich sind.

## 198.

**Lehrsatz.** In ähnlichen Vielecken sind auch alle ähnlichliegenden Diagonalen und alle andere beliebige ähnlichliegende Linien Gleichvielfache und die ähnlichliegenden Winkel, welche sie mit den Seiten der Vielecke und mit einander einschließen, sind gleich groß.

**Beweis.** Ähnlichliegende Diagonalen und andere beliebige ähnlichliegende Linien sind diejenigen, welche mit den Seiten der gegebenen Vielecke und mit einander ähnliche Vielecke einschließen (§. 197.). Also sind sie Seiten, und die Winkel zwischen ihnen Winkel ähnlicher Vielecke und die ersten sind Gleichvielfache, die letzten einander gleich (§. 193.).

## 199.

**Anmerkung.** Es ist nicht nöthig die Fälle der Ähnlichkeit von Vielecken besonders aufzuzählen. Da unter bestimmenden Stücken von Figuren mit mehr als

drei Seiten, wenigstens zwei Seiten seyn müssen, weil nur zwei Seiten fehlen können, so findet man die Fälle ähnlicher Vielecke unmittelbar aus den Fällen gleicher Vielecke, wenn man blos statt gleiche Seiten, gleichvielfache Seiten setzt.

Sind die Seiten von einander Einfache, also einander gleich, so geht die Ähnlichkeit in die Gleichheit über und die Figuren decken sich alsdann.

## 200.

**Lehrsatz.** Regelmässige Vielecke von beliebigen Halbmessern, wenn sie gleich viele Seiten haben, sind ähnliche Figuren.

**Beweis.** Die Winkel regelmässiger Vielecke richten sich nur allein nach der Zahl der Seiten und sind unter einander gleich. Also sind die Winkel regelmässiger Vielecke von ungleichen Halbmessern, aber gleich vielen Seiten, gleich groß.

Die Seiten regelmässiger Vielecke sind unter einander gleich. Das nemliche Vielfache also, welches eine Seite eines regelmässigen Vielecks von einer Seite eines andern ist, ist jede andere Seite von jeder im andern Vieleck. Also sind die Seiten in zwei regelmässigen Vielecken von einander Gleichvielfache.

Folglich sind in zwei regelmässigen Vielecken von gleich vielen Seiten die Winkel gleich und die Seiten Gleichvielfache. Mithin sind die Vielecke ähnlich (§. 193.).

## Vom Inhalte ähnlicher Figuren.

## 201.

**Lehrsatz.** Die Inhalte von Dreiecken, welche einen gleich grossen Winkel haben, und die Producte aus den Seiten, welche die gleichen Winkel einschliessen, oder die Rechtecke unter denselben, sind Gleichvielfache.

Z. B. es ist in (Fig. 116.)

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$$

**Beweis.** Die Dreiecke  $ADE$  und  $ABE$  sind, über den Grundlinien  $AD$  und  $AB$ , gleich hoch; also sind ihre Inhalte und ihre Grundlinien Gleichvielfache (§. 164.) d. h., es ist

$$1. \quad \frac{\triangle ABE}{\triangle ADE} = \frac{AB}{AD}$$

Eben so verhält es sich mit den Dreiecken  $ABC$  und  $ABE$ . Sie sind, über den Grundlinien  $AC$  und  $AE$ , gleich hoch. Also ist

$$2. \frac{\Delta ABC}{\Delta ABE} = \frac{AC}{AE}.$$

Multipliziert man die Gleichungen (1 und 2.) mit einander, so erhält man

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta ADE} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE};$$

wie behauptet wird.

202.

**Lehrsatz.** Die Inhalte ähnlicher Dreiecke und die Quadrate über ähnlichliegenden Seiten derselben sind Gleichvielfache.

Z. B. wenn  $ABC$  und  $\alpha\beta\gamma$  (Fig. 117.) ähnliche Dreiecke sind, so ist

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta \alpha\beta\gamma} = \frac{AB^2}{\alpha\beta^2} = \frac{BC^2}{\beta\gamma^2} = \frac{CA^2}{\gamma\alpha^2}.$$

**Beweis.** Es sey  $BD = \beta\alpha$ , und  $BE = \beta\gamma$ . Es ist  $\beta = B$ , indem ähnliche Dreiecke gleichwinklig sind; also sind die Dreiecke  $BDE$  und  $\beta\alpha\gamma$  gleich. Nun ist nach (§. 201.)

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta DBE} = \frac{AB \cdot CB}{DB \cdot EB},$$

also ist auch

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta \alpha\beta\gamma} = \frac{AB \cdot CB}{\alpha\beta \cdot \gamma\beta} = \frac{AB}{\alpha\beta} \cdot \frac{CB}{\gamma\beta}.$$

In ähnlichen Dreiecken aber ist  $\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{CB}{\gamma\beta}$ ; also ist

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta \alpha\beta\gamma} = \frac{AB}{\alpha\beta} \cdot \frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{AB^2}{\alpha\beta^2},$$

und auch, weil in gleichwinkligen Dreiecken

$$\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{BC}{\beta\gamma} = \frac{CA}{\gamma\alpha} \text{ ist,}$$

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta \alpha\beta\gamma} = \frac{AB^2}{\alpha\beta^2} = \frac{BC^2}{\beta\gamma^2} = \frac{CA^2}{\gamma\alpha^2};$$

wie behauptet wird.

203.

**Lehrsatz.** Wenn ein rechtwinkliges Dreieck mit einem gleichschenkligen den Winkel zwischen den gleichen Seiten des letzten gemein hat, und die beiden Dreiecke sind gleich groß, so sind die Produkte der Seiten um den gleichen



**Winkel** in beiden Dreiecken gleich, und das doppelte Quadrat des Perpendikels im gleichschenkligen Dreieck, zwischen den gleichen Seiten, ist so groß, als das Product der Summe der Seiten, welche im rechtwinkligen Dreiecke den gemeinschaftlichen Winkel einschließen und der an demselben liegenden Cathete.

Z. B. wenn das in  $A$  rechtwinklige Dreieck  $BAC$  (Fig. 118.) so groß ist, als das um  $C$  gleichschenklige Dreieck  $DCE$ , so ist

$$AC \cdot BC = DC \cdot EC;$$

und wenn  $CF$  auf  $DE$  senkrecht ist, so ist

$$2CF^2 = AC(AC + CB).$$

**Beweis.** Zufolge (§. 201.) ist

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta DCE} = \frac{AC \cdot BC}{DC \cdot EC}.$$

Nun soll aber  $\Delta ABC = \Delta DCE$  seyn, also ist

$$1 = \frac{AC \cdot BC}{DC \cdot EC}, \text{ oder}$$

$$1. \quad AC \cdot BC = DC \cdot EC;$$

welches das Erste war.

Ferner ist, weil der Perpendikel  $CF$  den Winkel  $DCE$ , also die Linie  $CG$  den Winkel  $ACB$  halbt, vermöge (§. 143. I.),  $AG \cdot CB = BG \cdot CA$ , oder auch

$$AG \cdot CB + AG \cdot CA = BG \cdot CA + AG \cdot CA, \text{ oder}$$

$$AG(CB + CA) = CA(BG + AG),$$

oder, weil  $BG + AG = AB$  ist,

$$2. \quad AG \cdot (CB + CA) = AC \cdot AB.$$

Nun ist für die Dreiecke  $ACG$  und  $ACB$  über der Grundlinie  $AC$

$$\frac{AB}{AG} = \frac{\Delta ACB}{\Delta ACG},$$

oder, weil  $\Delta ACB = \Delta DCE = 2 \Delta CDF$  ist,

$$3. \quad \frac{AB}{AG} = \frac{2 \Delta CDF}{\Delta ACG}.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke  $CDF$  und  $ACG$  sind aber, weil sie den Winkel  $C$  gemein haben, ähnlich. Also ist zu Folge (§. 202.),

$$\frac{\Delta CDF}{\Delta ACG} = \frac{CF^2}{AC^2}. \text{ Also ist in (3.)}$$

$$4. \quad \frac{AB}{AG} = \frac{2CF^2}{AC^2}.$$

Es folgt aber aus (2.)  $\frac{AB}{AG} = \frac{CB + CA}{AC}$ . Also ist aus (4.)

$$\frac{AC + CB}{AC} = \frac{2CF^2}{AC^2}, \text{ oder}$$

$$5. \quad 2CF^2 = AC(AC + CB);$$

welches das Zweite war.

## 204.

**Lehrsatz.** Wenn zwei regelmäßige Vielecke gleich groß sind und das zweite hat doppelt so viel Seiten als das erste, so ist das Quadrat des Halbmessers der Ecken des zweiten, gleich dem Producte der Halbmesser der Ecken

und der Seiten des ersten, und das doppelte Quadrat des Halbmessers der Seiten des zweiten gleich dem Producte des Halbmessers der Seiten des ersten und der Summe seiner Halbmesser der Seiten und der Ecken.

Z. B. Wenn die Halbmesser der Ecken und Seiten eines regelmäßigen Vielecks von  $n$  Seiten,  $a$  und  $b$ , und die Halbmesser der Ecken und Seiten eines gleich großen regelmäßigen Vielecks von  $2n$  Seiten,  $\alpha$  und  $\beta$  sind, so ist

$$\alpha^2 = ab \text{ und } 2\beta^2 = b(a+b), \text{ oder}$$

$$\alpha = \sqrt{ab} \text{ und } \beta = \sqrt{\frac{b(a+b)}{2}}.$$

*Beweis.* Man stelle sich vor, das rechtwinklige Dreieck  $ACB$  (Fig. 118.) sey die Hälfte eines der  $n$  gleichschenkligen Dreiecke, aus welchen das erste regelmäßige Vieleck von  $n$  Seiten zusammengesetzt ist, so daß  $C$  der Mittel-Punct des Vielecks, und folglich  $ACB$  der halbe Winkel über den Seiten des  $n$  Ecks am Mittelpuncte ist, so ist das gleich große, gleichschenklige Dreieck  $DCE$  ein ganzes von den  $2n$  Dreiecken, aus welchen das zweite regelmäßige Vieleck besteht. Da die Dreiecke  $ACB$  und  $DCE$  gleich groß sind, so sind auch die ganzen Vielecke gleich groß, denn auf das erste gehen  $2n$  Dreiecke wie  $ACB$  und auf das zweite  $2n$  Dreiecke wie  $DCE$ . Nun ist aber zu Folge (§. 203.)

$$AC \cdot BC = DC \cdot EC \text{ und}$$

$$2CF^2 = AC(AC + CB)$$

und  $BC$  und  $AC$  sind die Halbmesser  $a$  und  $b$  der Ecken und Seiten des  $n$  Ecks,  $DC = EC$  und  $CF$  hingegen sind die Halbmesser  $\alpha$  und  $\beta$  der Ecken und Seiten des  $2n$  Ecks. Also ist  $b \cdot a = \alpha \cdot \alpha$  und  $2\beta^2 = b(b + a)$ , oder

$$\alpha^2 = ab \text{ und } 2\beta^2 = b(a + b),$$

wie behauptet wurde.

**Lehrsatz.** Die Inhalte ähnlicher Vielecke und die Quadrate über ähnlich-liegenden Seiten, Diagonalen oder andern ähnlich-liegenden Linien in denselben, sind Gleichvielfache.

*Beweis.* Die ähnlichen Vielecke sind aus ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt. Die Inhalte dieser Dreiecke, und die Quadrate ihrer ähnlichliegenden Seiten sind nach (§. 202.) Gleichvielfache. Die ähnlichliegende Seiten, oder Diagonalen, oder andere ähnlichliegende Linien sind aber von einander Gleichvielfache (§. 198.). Also sind die Inhalte aller einzelnen Dreiecke und die Quadrate zweier beliebigen, ähnlichliegenden Seiten, Diagonalen oder anderer ähnlichliegenden Seiten, Gleichvielfache, folglich auch die Summen der Inhalte der Dreiecke, d. h. die Inhalte der Vielecke selbst.

Wenn z. B.  $ABCDE$  und  $\alpha\beta\gamma\delta$  (Fig. 119.) ähnliche Vielecke sind, so sind die Dreiecke  $ABC$  und  $\alpha\beta\gamma$ ,  $ACD$

und  $\alpha\gamma\delta$  und  $ADE$  und  $\alpha\delta\epsilon$  ähnlich; folglich ist nach (§. 202.) z. B.

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle \alpha\beta\gamma} = \frac{AB^2}{\alpha\beta^2}, \quad \frac{\triangle ACD}{\triangle \alpha\gamma\delta} = \frac{AC^2}{\alpha\gamma^2}, \quad \frac{\triangle ADE}{\triangle \alpha\delta\epsilon} = \frac{AD^2}{\alpha\delta^2}.$$

Da aber  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  und  $\alpha\beta$ ,  $\alpha\gamma$ ,  $\alpha\delta$  ähnlichliegende Seiten und Diagonalen sind, so ist

$$\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{AC}{\alpha\gamma} = \frac{AD}{\alpha\delta},$$

und folglich

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle \alpha\beta\gamma} = \frac{\triangle ACD}{\triangle \alpha\gamma\delta} = \frac{\triangle ADE}{\triangle \alpha\delta\epsilon} = \frac{AB^2}{\alpha\beta^2}.$$

Also ist

$$\triangle ABC = \triangle \alpha\beta\gamma \cdot \frac{AB^2}{\alpha\beta^2},$$

$$\triangle ACD = \triangle \alpha\gamma\delta \cdot \frac{AB^2}{\alpha\beta^2},$$

$$\triangle ADE = \triangle \alpha\delta\epsilon \cdot \frac{AB^2}{\alpha\beta^2};$$

folglich auch

$$\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE = (\triangle \alpha\beta\gamma + \triangle \alpha\gamma\delta + \triangle \alpha\delta\epsilon) \frac{AB^2}{\alpha\beta^2},$$

oder

$$\frac{\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE}{\triangle \alpha\beta\gamma + \triangle \alpha\gamma\delta + \triangle \alpha\delta\epsilon} = \frac{AB^2}{\alpha\beta^2}.$$

Eben so verhält es sich, wenn mehrere Dreiecke vorhanden sind, oder die Quadrate von andern ähnlichliegenden Seiten oder Diagonalen, oder beliebigen, ähnlichliegenden Linien genommen werden.

206.

**Lehrsatz.** Die Inhalte von Quadraten über gleichvielfachen graden Linien sind Gleichvielfache.

**Beweis.** Wenn zwei beliebige grade Linien  $a$  und  $b$ , und die Gleichvielfachen davon  $ma$  und  $mb$  sind, so sind die Inhalte der Quadrate über diesen vier Linien  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $m^2a^2$  und  $m^2b^2$ . Es ist aber

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{m^2a^2}{m^2b^2}.$$

Also sind die Quadrate über  $ma$  und  $mb$  und die Quadrate über  $a$  und  $b$  selbst, folglich die Quadrate über den gleichvielfachen Linien  $a$ ,  $b$ ,  $ma$  und  $mb$  Gleichvielfache.

## 207.

**Lehrsatz.** Die Inhalte zweier beliebigen ähnlichen Figuren und die Inhalte zweier beliebigen anderen ähnlichen Figuren, wenn auch die ersten den zweiten nicht ähnlich sind, sind Gleichvielfache, in so fern ähnlichliegende Linien der beiden ersten und der beiden andern Gleichvielfache sind.

Z. B. wenn  $A$  und  $B$  (Fig. 120.) zwei einander ähnliche Figuren sind, und  $C$  und  $D$  sind zwei andere ähnliche Figuren, die aber vielleicht den vorigen nicht ähnlich sind; wenn ferner  $P$  und  $p$  zwei ähnlichliegende Linien in  $A$  und  $B$ ,  $Q$  und  $q$  zwei ähnlichliegende Linien in  $C$  und  $D$  sind und man bezeichnet die Inhalte der vier Figuren durch  $A, B, C, D$ , so ist, im Fall  $\frac{P}{p} = \frac{Q}{q}$  ist,  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ .

**Beweis.** Es ist

$$\frac{A}{B} = \frac{P^2}{p^2} \text{ und } \frac{C}{D} = \frac{Q^2}{q^2} \text{ (§. 206.).}$$

Da nun nach der Voraussetzung  $\frac{P}{p} = \frac{Q}{q}$  ist, so ist auch

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D};$$

wie behauptet wird.

## 208.

**Anmerkung.** Der Lehrsatz (§. 207.) drückt die Vergleichung der Inhalte ähnlicher Figuren am allgemeinsten aus.

Ist irgend eine Linie in  $A$  (Fig. 120.) einer Linie in  $C$ , also die ähnlichliegende Linie in  $B$  auch der ähnlichliegenden Linie in  $D$  gleich, so ist der Satz schon weniger allgemein. Er heißt alsdann:

Die Inhalte beliebiger ähnlicher Figuren über ähnlichliegenden Linien (z. B. Seiten) sind Gleichvielfache.

Sind zwei von den ähnlichen Figuren Quadrate, so entsteht der noch mehr besondere Satz (§. 206.).

## 209.

**Lehrsatz.** Die Umfänge ähnlicher Figuren und ähnlichliegende Linien in den Figuren sind Gleichvielfache.

**Beweis.** Alle Seiten und die ähnlichliegenden Linien in den beiden Figuren sind Gleichvielfache. Also

sind es auch die Summen der Seiten, oder die Umfänge der Figuren.

Wenn z. B.  $ABCDE$  und  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$  (Fig. 119.) ähnliche Figuren sind, und irgend eine Linie in  $ABCDE$  ist das  $m$ -fache von einer ähnlichliegenden Linie in  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ , so ist auch  $AB = m \cdot \alpha\beta$ ,  $BC = m \cdot \beta\gamma$ ,  $CD = m \cdot \gamma\delta$ ,  $DE = m \cdot \delta\epsilon$  und  $EA = m \cdot \epsilon\alpha$ , folglich auch  $AB + BC + CD + DE + EA = m(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\epsilon + \epsilon\alpha)$ ; welches den Satz ausdrückt.

210.

**Lehrsatz.** Die Umfänge zweier einander ungleichen und unähnlichen Figuren und die Umfänge zweier ihnen ähnlichen Figuren, sind Gleichvielfache, in so fern es ähnlichliegende Linien in den ähnlichen Figuren sind.

Wenn z. B.  $A$  und  $C$  (Fig. 120.) zwei ungleiche und unähnliche,  $B$  und  $D$  aber zwei den vorigen ähnliche Figuren sind: wenn ferner  $P$  und  $p$  zwei ähnlichliegende Linien in  $A$  und  $B$ , und  $Q$  und  $q$  zwei ähnlichliegende Linien in  $C$  und  $D$  sind, und man bezeichnet die Umfänge von  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  durch  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , so ist, im Fall  $\frac{P}{p} = \frac{Q}{q}$  ist,  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ .

**Beweis.** Es ist

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{P}{p} \text{ und } \frac{\gamma}{\delta} = \frac{Q}{q} \text{ (§. 209.)}$$

Also ist  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ , folglich auch

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta};$$

wie behauptet wird.

### Von den Transversalen.

211.

**Lehrsatz.** Die Stücke, welche Parallelen und beliebige grade Linien aus einem Punkte von einander abschneiden, sind Gleichvielfache.

Z. B. Wenn sämtliche Linien in (Fig. 121.) grade und  $BO$ ,  $CP$  und  $DQ$  Parallelen sind, so ist

$$\frac{BC}{DC} = \frac{EF}{GF} = \frac{HI}{KI} = \frac{LM}{NM} \text{ etc. und}$$

$$\frac{CF}{BE} = \frac{FI}{EH} = \frac{IM}{HL} = \frac{MP}{LO} \text{ etc.}$$

**Beweis.** Wegen der Parallelen sind die Dreiecke  $ABE$ ,  $ACF$  und  $ADG$ , die Dreiecke  $AEH$ ,  $AFI$  und  $AGK$ , die Dreiecke  $AHL$ ,  $AIM$  und  $AKN$  etc. gleichwinklig und folglich ähnlich.

Also ist z. B. in den Dreiecken  $ABE$ ,  $ACF$  und  $ADG$ ,  $\frac{DA}{CA} = \frac{GA}{FA}$ , oder, weil  $DA = CA + DC$  und  $GA = FA + GF$ ,  $\frac{CA + DC}{CA} = \frac{FA + GF}{FA}$ , oder

$$1 + \frac{DC}{CA} = 1 + \frac{GF}{FA}; \text{ also}$$

$$1. \quad \frac{DC}{CA} = \frac{GF}{FA}.$$

In den nemlichen drei Dreiecken ist  $\frac{BA}{CA} = \frac{EA}{FA}$ , oder, weil  $BA = CA - BC$  und  $EA = FA - EF$ ,  $\frac{CA - BC}{CA} = \frac{FA - EF}{FA}$ , oder  $1 - \frac{BC}{CA} = 1 - \frac{EF}{FA}$ ; also

$$2. \quad \frac{BC}{CA} = \frac{EF}{FA}.$$

Dividirt man (2.) durch (1.), so erhält man

$$3. \quad \frac{BC}{DC} = \frac{EF}{GF}.$$

Auf dieselbe Weise ist in den drei Dreiecken  $AEH$ ,  $AFI$  und  $AGK$ ,

$$4. \quad \frac{EF}{GF} = \frac{HI}{KI};$$

und so fort, in den folgenden Dreiecken. Also ist überhaupt

$$5. \quad \frac{BC}{DC} = \frac{EF}{GF} = \frac{HI}{KI} = \frac{LM}{NM} \text{ etc.};$$

welches der erste Theil der Behauptung ist.

Ferner ist in den beiden ähnlichen Dreiecken  $ABE$  und  $ACF$ ,  $\frac{AF}{AE} = \frac{CF}{BE}$ . Hingegen in den beiden ähnlichen Dreiecken  $AEH$  und  $AFI$  ist  $\frac{AF}{AE} = \frac{FI}{EH}$ . Also

ist  $\frac{CF}{BE} = \frac{FI}{EH}$ . Eben so ist für die an der Linie  $AHL$

grenzenden Dreiecke  $\frac{FI}{FH} = \frac{IM}{HL}$  u. s. w. Also ist überhaupt

$$6. \frac{CF}{BE} = \frac{FI}{EH} = \frac{IM}{HL} = \frac{MP}{LO} \text{ etc.};$$

welches der zweite Theil der Behauptung ist.

212.

**Lehrsatz. I.** Die Producte der Stücke, welche nicht parallele grade Linien von einander abschneiden, zu dreien und viere, sind gleich.

Z. B. Wenn sämtliche Linien in (Fig. 122.) grade sind, so ist

1.  $AD \cdot BE \cdot CF = AF \cdot BD \cdot CE$ ,
2.  $AF \cdot BC \cdot DE = AC \cdot BE \cdot DF$  und
3.  $AC \cdot BD \cdot FE = AB \cdot DE \cdot CF$ ;

desgleichen

4.  $AD \cdot CF \cdot BC \cdot DE = AC \cdot BD \cdot CE \cdot DF$ ,
5.  $AD \cdot BE \cdot AC \cdot FE = AF \cdot AB \cdot CE \cdot DE$ ,
6.  $AF \cdot BC \cdot BD \cdot FE = BE \cdot CF \cdot DE \cdot DF$ .

**Beweis.**  $\alpha$ ) Es sey  $BP$  mit  $AF$  parallel, so sind die Dreiecke  $DBP$  und  $DAF$  und die Dreiecke  $ECF$  und  $EBP$  gleichwinklig und folglich ähnlich. Also ist

$$\frac{BP}{DB} = \frac{AF}{AD} \text{ und } \frac{BE}{BP} = \frac{CE}{CF}.$$

Multiplirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{BE}{DB} = \frac{AF \cdot CE}{AD \cdot CF}, \text{ also}$$

$$1. \quad AD \cdot BE \cdot CF = AF \cdot BD \cdot CE.$$

$\beta$ ) Es sey  $CS$  mit  $ED$  parallel, so sind die Dreiecke  $ASC$  und  $ADF$  und die Dreiecke  $BSC$  und  $BDE$  gleichwinklig und folglich ähnlich. Also ist

$$\frac{CS}{CB} = \frac{DE}{BE} \text{ und } \frac{AC}{CS} = \frac{AF}{DF}.$$

Multiplirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DE \cdot AF}{BE \cdot DF}, \text{ also}$$

$$2. \quad AF \cdot BC \cdot DE = AC \cdot BE \cdot DF.$$

$\gamma$ ) Es sey  $FW$  mit  $AD$  parallel, so sind die Dreiecke  $EFW$  und  $EDB$  und die Dreiecke  $CFW$  und  $CAB$  gleichwinklig und folglich ähnlich. Also ist

$$\frac{FW}{FE} = \frac{BD}{DE} \text{ und } \frac{FC}{FW} = \frac{AC}{AB}.$$

Multiplirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{FC}{FE} = \frac{AC \cdot BD}{AB \cdot DE}, \text{ also}$$

$$3. \quad AC \cdot BD \cdot FE = AB \cdot DE \cdot CF.$$

δ) Es sey  $DT$  mit  $BE$  parallel, so sind die Dreiecke  $ADT$  und  $ABC$  und die Dreiecke  $DFT$  und  $EFC$  gleichwinklig und folglich ähnlich. Also ist

$$\frac{DT}{DA} = \frac{BC}{AB} \text{ und } \frac{DF}{DT} = \frac{FE}{CE}.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{DF}{DA} = \frac{BC \cdot FE}{AB \cdot CE}, \text{ also}$$

$$4. \quad AD \cdot BC \cdot FE = AB \cdot CE \cdot DF.$$

ε) Man kann auch noch  $CH$  mit  $AD$ ,  $FQ$  mit  $BE$ ,  $DV$  mit  $AF$  und  $BU$  mit  $DE$  parallel ziehen; allein die Gleichungen, welche man daraus findet sind nur die vorigen. Die Linien  $CH$  und  $BF$ ,  $FQ$  und  $CS$ ,  $DV$  und  $FW$  und  $BU$  und  $DT$  geben die nemlichen Gleichungen, weil die Dreiecke  $RCF$  und  $DBF$ ,  $DQF$  und  $SBC$ ,  $VDB$  und  $CFW$  und  $BCU$  und  $DTF$  ähnlich sind.

ζ) Die obigen vier Gleichungen (1. 2. 3. 4.) nemlich

$$AD \cdot BE \cdot CF = AF \cdot BD \cdot CE$$

$$AF \cdot BC \cdot DE = AC \cdot BE \cdot DF$$

$$AC \cdot BD \cdot FE = AB \cdot DE \cdot CF$$

$$AD \cdot BC \cdot FE = AB \cdot CE \cdot DF$$

sind übrigens nur so viel als drei. Denn man multiplicire z. B. die drei ersten in einander, so erhält man

$$AD \cdot BE \cdot CF \cdot AF \cdot BC \cdot DE \cdot AC \cdot BD \cdot FE = AF \cdot BD \cdot CE \cdot AC \cdot BE \cdot DF \cdot AB \cdot DE \cdot CF,$$

oder

$$AD \cdot BC \cdot FE = AB \cdot CE \cdot DF,$$

welches die vierte Gleichung ist, so daß also drei Gleichungen die vierte einschließlic schon mit enthalten. Daher giebt es nur die drei wesentlich verschiedenen Gleichungen des Lehrsatzes.

η) Multipliziert man diese drei wesentlich verschiedenen Gleichungen Paarweise mit einander, so erhält man

$$AD \cdot BE \cdot CF \cdot AF \cdot BC \cdot DE = AF \cdot BD \cdot CE \cdot AC \cdot BE \cdot DF,$$

$$AD \cdot BE \cdot CF \cdot AC \cdot BD \cdot FE = AF \cdot BD \cdot CE \cdot AB \cdot DE \cdot CF,$$

$$AF \cdot BC \cdot DE \cdot AC \cdot BD \cdot FE = AC \cdot BE \cdot DF \cdot AB \cdot DE \cdot CF;$$

oder

$$AD \cdot CF \cdot BC \cdot DE = AC \cdot BD \cdot CE \cdot DF,$$

$$AD \cdot BE \cdot AC \cdot FE = AF \cdot AB \cdot CE \cdot DE,$$

$$AF \cdot BC \cdot BD \cdot FE = BE \cdot CF \cdot DE \cdot DF;$$

wie im Lehrsatz\*).

II. Wenn die im Lehrsatz genannten Producte gleich sind, so sind die Linien, welche sich schneiden, nothwendig grad.

Beweis. Es liege z. B., wenn es möglich ist, den Punkt  $F$  nicht in grader Linie mit  $D$  und  $E$ , sondern z. B. in  $G$ , so daß statt  $AF$ ,  $AF + FG$  und statt  $CF$ ,  $CF + FG$  vorausgesetzt wird. Alsdann müßte, der ersten Gleichung (1.) zu Folge,

$$AD \cdot BE \cdot (CF + FG) = (AF + FG) \cdot BD \cdot CE, \text{ oder}$$

$$AD \cdot BE \cdot CF + AD \cdot BE \cdot FG = AF \cdot BD \cdot CE + FG \cdot BD \cdot CE$$

seyn. Es ist aber für die grade Linie  $DFE$ , nach (1.)

\*) Von diesem Lehrsatz geht die sogenannte Theorie der Transversalen aus, welche eine Menge merkwürdiger Sätze enthält. Man sehe darüber auch Carnot: Memoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points etc. 4. 1806. und Einiges hier weiter unten.



$$AD \cdot BE \cdot CF = AF \cdot BD \cdot CE;$$

es müßte also auch

$$AD \cdot BE \cdot FG = FG \cdot BD \cdot CE,$$

oder

$$AD \cdot BE = BD \cdot CE$$

seyn, welches nicht nothwendig der Fall ist. Also gilt die Gleichung (1.) nur für die grade Linie  $DFE$ , nicht für die Linie  $DGE$ . Und so für die andern Linien.

Die sich schneidenden Linien sind also nothwendig grade, wenn die Gleichungen des Lehrsatzes (1.) Statt finden.

## 213.

**Lehrsatz.** Grade Linien durch die drei Scheitel-Puncte eines Dreiecks, schneiden sich in einem und demselben Puncte, wenn von den Stücken, welche sie von den gegenüber liegenden Seiten abschneiden, das Product derjenigen drei, die nicht zusammenstoßsen, dem Producte der andern drei Stücke gleich ist.

Z. B. die graden Linien  $AD$ ,  $BE$  und  $CF$  (Fig. 123. I. und II.) schneiden sich in einem und demselben Puncte  $M$ , wenn

$$AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE$$

ist.

**Beweis.** Die Gleichung (3. §. 212.) giebt für das von  $CF$  geschnittene Dreieck  $ABD$ ,

$$AM \cdot BF \cdot CD = AF \cdot BC \cdot DM,$$

und für das von  $BE$  geschnittene Dreieck  $ACD$ ,

$$AM \cdot CE \cdot BD = AE \cdot BC \cdot DM.$$

Dividirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{BF \cdot CD}{CE \cdot BD} = \frac{AF}{AE}, \text{ oder}$$

$$AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE;$$

wie behauptet wird.

## 214.

**Zusatz.** Aus (§. 213.) folgt, daß für alle die Stücke, welche die unzähligen, durch die Scheitel eines Dreiecks gehenden graden Linien, die in einem und demselben Puncte sich treffen können, von den gegenüber. liegenden Seiten abschneiden, eine und dieselbe Bedingung Statt findet. Diese Bedingung enthält also eine große Menge verschiedener Sätze.

Wenn z. B.

I. Die Scheitel-Linien  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  (Fig. 123. I.) auf den gegenüber liegenden Seiten eines Dreiecks senkrecht stehen, so sind die Winkel bei  $D$ ,  $E$  und  $F$  rechte und folglich sind z. B. die rechtwinkligen Dreiecke  $BEC$  und  $ADC$  ähnlich; denn sie haben außer dem rechten Winkel noch einen gleichen Winkel, nemlich den gemeinschaftlichen Winkel  $C$ . Also

ist alsdann  $\frac{BC}{EC} = \frac{AC}{DC}$ , und eben so

$$\frac{CA}{FA} = \frac{BA}{EA} \text{ und } \frac{AB}{DB} = \frac{CB}{FB}.$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen in einander, so erhält man

$$\frac{BC \cdot CA \cdot AB}{EC \cdot FA \cdot DB} = \frac{AC \cdot BA \cdot CB}{DC \cdot EA \cdot FB},$$

oder

$$AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE;$$

welches die Bedingungs-Gleichung für das Zusammentreffen der Scheitel-Linien in einem Punkte ist.

Die Perpendikel aus den Ecken eines Dreiecks auf die gegenüber liegenden Seiten erfüllen also die allgemeine Bedingung des Zusammentreffens in einem und demselben Punkt. Folglich schneiden sie sich an einem und demselben Orte; welches mit (§. 71.) übereinstimmt.

II. Halbiren die Scheitel-Linien die Winkel des Dreiecks,  $A$ ,  $B$  und  $C$ , so sey z. B.  $BH$  und  $CG$  auf  $AD$  senkrecht. Alsdann sind die rechtwinkligen Dreiecke  $AGC$ ,  $AHB$  ähnlich; denn, ausser dem rechten Winkel, sind die Winkel bei  $A$  in dem einen so groß, als in dem andern. Also ist  $\frac{GC}{BH} = \frac{AC}{AB}$ . Es sind aber auch die rechtwinkligen Dreiecke  $DGC$  und  $DHB$ , wegen der Scheitel-Winkel bei  $D$ , ähnlich; also ist  $\frac{GC}{BH} = \frac{DC}{DB}$ , folglich

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}.$$

Eben so ist

$$\frac{BA}{BC} = \frac{EA}{EC} \text{ und } \frac{CB}{CA} = \frac{FB}{FA}.$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{AC \cdot BA \cdot CB}{AB \cdot BC \cdot CA} = \frac{DC \cdot EA \cdot FB}{DB \cdot EC \cdot FA}, \text{ oder}$$

$$AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE;$$

welches wiederum die Bedingung des Zusammentreffens der Scheitel-Linien in einem Punkte ist.

Die Scheitel-Linien, welche die Winkel eines beliebigen Dreiecks halbiren, schneiden sich also ebenfalls in einem und demselben Punkte; welches mit (§. 75. I.) übereinstimmt.

III. Halbiren die Scheitel-Linien die gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks, so dass  $AF = BF$ ,  $BD = CD$  und  $CE = AE$  ist, so folgt unmittelbar, dass auch in diesem Fall die Bedingungs-Gleichung des Schneidens erfüllt wird; denn die Factoren sind alsdann gleich.

Also auch die Scheitel-Linien, welche die Seiten eines Dreiecks halbiren, treffen sich in einem und demselben Orte.

Die drei Scheitel-Linien, welche die Seiten eines Dreiecks halbiren schneiden den dritten Theil von einander ab. Denn wenn in (Fig. 123. I.)  $AF = \frac{1}{2} AB$  und  $AE = \frac{1}{2} AC$ , so ist  $FE$  mit  $BC$  parallel,  $AL = \frac{1}{2} AD$  und  $FL = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} DC$ . Ferner sind z. B. die Dreiecke  $FML$  und  $CMD$ , wegen der gleichen Scheitel- und Wechselwinkel bei  $M$ ,  $F$  und  $C$  ähnlich. Also ist  $LM = \frac{1}{2} DM$ , weil  $FL = \frac{1}{2} DC$  war; folglich ist auch  $LM = \frac{1}{2} LA = \frac{1}{2} MA$  und folglich  $MA = 2 MD$ , oder  $MD = \frac{1}{3} AD$ . Eben so ist  $ME = \frac{1}{3} BE$  und  $MC = \frac{1}{3} CF$ .

Es giebt dergleichen Sätze von Scheitel-Linien noch mehrere\*).

\*) Weiteres über diesen Gegenstand findet man in einer kleinen Schrift des Verfassers, unter dem Titel: Ueber einige Eigenschaften des gradlinigen Dreiecks etc. Berlin, bei Matthes, 1816. Auch noch Einiges hier weiter unten.

## 215.

**Lehrsatz.** Die Durchschnitte-Puncte je zweier Seiten eines beliebigen, nach den Ecken centrischen Sechsecks, verlängert, wenn es nöthig ist, und zwar diejenigen, zwischen welchen immer zwei andere liegen, sind in grader Linie.

Wenn z. B. das Sechseck  $ABCDEF$  (Fig. 124.) centrisch nach den Ecken ist, so schneiden sich  $ABM$  und  $EDM$ ,  $BCN$  und  $FEN$ ,  $CDP$  und  $AFP$  in einer und derselben graden Linie  $MNP$ .

**Beweis.**  $\alpha$ ) Es sey  $K$  der Mittelpunkt der Ecken des Sechsecks  $ABCDEF$ , und  $EKL$  ein Durchmesser desselben, also  $KL = KE$ . Da  $K$  der Mittelpunkt der Ecken der beiden Dreiecke  $EAL$  und  $EAB$ , über derselben Grundlinie  $EA$  ist, so sind die Winkel  $ELA$  und  $EBA$  gleich (§. 70. II.). Nun sey  $ES$  auf  $AB$  senkrecht, so ist das Dreieck  $ESB$  in  $S$  rechtwinklig. Aber auch das Dreieck  $EAL$  ist in  $A$  rechtwinklig, weil  $EL$  ein Durchmesser ist (§. 69. I.). Folglich sind zwei Winkel der beiden Dreiecke  $ESB$  und  $EAL$  gleich, nemlich  $L = B$  und  $A = S = 90^\circ$ ; folglich sind diese Dreiecke ähnlich.

Nun ist  $\frac{BE}{ME}$  eben so viel als  $\frac{ES}{ME} : \frac{ES}{BE}$ ,  $\frac{ES}{BE}$  aber ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke  $ESB$  und  $EAL$ , gleich  $\frac{EA}{EL}$ . Also ist

$$\frac{BE}{ME} = \frac{ES}{ME} : \frac{EA}{EL}, \text{ oder}$$

$$1. \quad \frac{BE}{ME} = \frac{ES \cdot EL}{ME \cdot EA}.$$

$\beta$ ) Es sey ferner  $DKU$  ein Durchmesser, oder  $KU = KD$ . Da  $K$  der Mittelpunkt der Ecken der beiden Dreiecke  $DBU$  und  $DBA$ , über derselben Grundlinie  $DB$  ist, so sind, wie in (I.) die Winkel  $DAB$  und  $DUB$  gleich. Nun sey  $DT$  auf  $AM$  senkrecht, so ist das Dreieck  $DAT$  in  $T$  rechtwinklig. Aber auch das Dreieck  $DUB$  ist in  $B$  rechtwinklig, weil  $DU$  ein Durchmesser ist. Also sind zwei Winkel der beiden Dreiecke  $DAT$  und  $DUB$  gleich, nemlich  $A = U$  und  $T = B = 90^\circ$ ; folglich sind die Dreiecke ähnlich.

Nun ist  $\frac{MD}{AD}$  so viel als  $\frac{DT}{AD} : \frac{DT}{MD}$ . Aber  $\frac{DT}{AD}$  ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke  $DAB$  und  $DUB$ , gleich  $\frac{DB}{DU}$ , oder, weil die Durchmesser  $DU$  und  $EL$  gleich sind, gleich  $\frac{DB}{EL}$ . Also ist  $\frac{MD}{AD} = \frac{DB}{EL} : \frac{DT}{MD}$ , oder

$$\frac{MD}{AD} = \frac{DB \cdot MD}{EL \cdot DT}.$$

Da die Perpendikel  $DT$  und  $ES$  auf  $AM$ , parallel und folglich die Dreiecke  $MDT$  und  $MES$  ähnlich sind, so ist auch  $\frac{MD}{DT} = \frac{ME}{ES}$ , also auch

$$2. \quad \frac{MD}{AD} = \frac{DB \cdot ME}{EL \cdot ES}.$$

$\gamma$ ) Die Dreiecke  $EBC$  und  $ELC$  haben einenlei Mittelpunkt der Ecken; folglich sind die Winkel  $EBC$  und  $ELC$ , über der gemeinschaftlichen Grundlinie  $EC$ , einander gleich. Nun sey  $EQ$  auf  $BN$

senkrecht, so ist das Dreieck  $EBQ$  in  $Q$  rechtwinklig. Aber auch das Dreieck  $ELC$  ist in  $C$  rechtwinklig, weil  $EL$  ein Durchmesser ist. Also sind zwei Winkel der Dreiecke  $EBQ$  und  $ELC$  gleich, nemlich  $L = B$  und  $C = Q = 90^\circ$ ; folglich sind die Dreiecke ähnlich.

Nun ist  $\frac{NE}{BE}$  so viel als  $\frac{EQ}{BE} : \frac{EQ}{NE}$ . Aber  $\frac{EQ}{BE}$  ist, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $EBQ$  und  $ELC$ , gleich  $\frac{EC}{EL}$ . Also ist  $\frac{NE}{BE} = \frac{EC}{EL} : \frac{EQ}{NE}$ , oder

$$3. \quad \frac{NE}{BE} = \frac{EC \cdot NE}{EL \cdot EQ}.$$

d) Wenn, wie vorhin,  $DKU$  ein Durchmesser ist, so ist das Viereck  $BCDU$  contrisch nach den Ecken. Also ist der Winkel  $DUB$  das Supplement des Winkels  $DCB$  (§. 86. L) und folglich dem Winkel  $RCV$  gleich. Ist nun  $RV$  auf  $NC$  senkrecht, so ist das Dreieck  $RCV$  bei  $V$  rechtwinklig. Aber auch das Dreieck  $DUB$  ist bei  $B$  rechtwinklig, weil  $DU$  ein Durchmesser ist. Also sind zwei Winkel der Dreiecke  $RCV$  und  $DUB$  gleich, nemlich  $U = C$  und  $B = V = 90^\circ$ , und folglich sind die Dreiecke ähnlich.

Nun ist  $\frac{CR}{NR}$  so viel als  $\frac{RV}{NR} : \frac{RV}{CR}$ , und  $\frac{RV}{CR}$  ist, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $RCV$  und  $DUB$ , gleich  $\frac{DB}{DU}$ , oder, weil die Durchmesser  $DU$  und  $EL$  gleich sind, gleich  $\frac{DB}{EL}$ . Also ist  $\frac{CR}{NR} = \frac{RV}{NR} : \frac{DB}{EL}$ , oder

$$\frac{CR}{NR} = \frac{RV \cdot EL}{NR \cdot DB}.$$

Da die Perpendikel  $RV$  und  $EQ$  auf  $BN$ , parallel, und folglich die Dreiecke  $NRV$  und  $NEQ$  ähnlich sind, so ist auch  $\frac{RV}{NR} = \frac{EQ}{NE}$ , also

$$4. \quad \frac{CR}{NR} = \frac{EQ \cdot EL}{NE \cdot DB}.$$

e) Die Dreiecke  $DFA$  und  $DFU$  haben einenlei Mittelpunkt der Ecken, folglich sind die Winkel  $DAF$  und  $DUF$ , über der gemeinschaftlichen Grundlinie  $DF$ , einander gleich. Nun sey  $DW$  auf  $AP$  senkrecht, so ist das Dreieck  $DWA$  in  $W$  rechtwinklig. Aber auch das Dreieck  $DFU$  ist in  $F$  rechtwinklig, weil  $DU$  ein Durchmesser ist. Also sind zwei Winkel der Dreiecke  $DWA$  und  $DFU$  gleich, nemlich  $A = U$  und  $W = F = 90^\circ$ ; folglich sind die Dreiecke ähnlich.

Nun ist  $\frac{AD}{DP}$  so viel als  $\frac{DW}{DP} : \frac{DW}{AD}$ . Aber  $\frac{DW}{AD}$  ist, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $DWA$  und  $DFU$ , gleich  $\frac{DF}{DU}$ , oder, weil die Durchmesser  $DU$  und  $EL$  gleich sind, gleich  $\frac{DF}{EL}$ . Also ist

$$\frac{AD}{DP} = \frac{DW}{DP} : \frac{DF}{EL}, \text{ oder}$$

$$5. \quad \frac{AD}{DP} = \frac{DW \cdot EL}{DP \cdot DF}.$$

5) Wenn wie vorhin  $EKL$  ein Durchmesser ist, so ist das Viereck  $EFAL$  centrisch nach den Ecken. Also ist der Winkel  $ALE$  das Supplement des Winkels  $EFA$ , und folglich dem Winkel  $RFP$  gleich. Ist nun  $RX$  auf  $FP$  senkrecht, so ist das Dreieck  $RXF$  bei  $X$  rechtwinklig. Aber auch das Dreieck  $EAL$  ist bei  $A$  rechtwinklig, weil  $EL$  ein Durchmesser ist. Folglich sind zwei Winkel der Dreiecke  $RXF$  und  $EAL$  gleich, nemlich  $F = L$  und  $X = A = 90^\circ$ , und folglich sind die Dreiecke ähnlich.

Nun ist  $\frac{RP}{RF}$  so viel als  $\frac{RX}{RF} : \frac{RX}{RP}$ . Aber  $\frac{RX}{RF}$  ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke  $RXF$  und  $EAL$ , gleich  $\frac{EA}{EL}$ . Also ist

$$\frac{RP}{RF} = \frac{EA}{EL} \cdot \frac{RX}{RP}, \text{ oder}$$

$$\frac{RP}{RF} = \frac{EA \cdot RP}{EL \cdot RX}.$$

Da die Perpendikel  $RX$  und  $DW$  auf  $AP$ , parallel, und folglich die Dreiecke  $RPX$  und  $DPW$  ähnlich sind, so ist auch  $\frac{RP}{RX} = \frac{DP}{DW}$ , und folglich

$$6. \frac{RP}{RF} = \frac{EA \cdot DP}{EL \cdot DW}.$$

7) Man multiplicire die 6 Gleichungen (1. 2. 3. 4. 5. 6.) in einander, so erhält man,

$$\frac{BE \cdot MD \cdot NE \cdot CR \cdot AD \cdot RP}{ME \cdot AD \cdot BE \cdot NR \cdot DP \cdot RF} = \frac{ES \cdot EL \cdot DB \cdot ME \cdot EC \cdot NE \cdot EQ \cdot EL \cdot DW \cdot EL \cdot EA \cdot DP}{ME \cdot EA \cdot EL \cdot ES \cdot EL \cdot EQ \cdot NE \cdot DB \cdot DP \cdot DF \cdot EL \cdot DW},$$

oder

$$7. \frac{MD \cdot NE \cdot CR \cdot RP}{ME \cdot NR \cdot DP \cdot RF} = \frac{EC}{DF}.$$

8) Nun haben die Dreiecke  $EFC$  und  $ELC$  einerlei Mittelpunkte der Ecken. Folglich sind die Winkel  $EFC$  oder  $RFC$  und  $ELC$ , über der gemeinschaftlichen Grundlinie  $EC$ , gleich. Es sey  $RZ$  auf  $FC$  senkrecht, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $RFZ$  und  $ELC$  ähnlich, weil die Winkel  $EFC$  oder  $RFZ$  und  $ELC$  gleich sind. Also ist

$$8. \frac{RZ}{RF} = \frac{EC}{EL}.$$

Eben so haben die Dreiecke  $DCF$  und  $DUF$  einerlei Mittelpunkte der Ecken. Folglich sind die Winkel  $DCF$  oder  $RCF$ , und  $DUF$ , über der gemeinschaftlichen Grundlinie  $DF$ , gleich. Also sind die rechtwinkligen Dreiecke  $RCZ$  und  $DUF$  ähnlich, weil die Winkel  $RCF$  und  $DUF$  gleich sind. Also ist  $\frac{CR}{RZ} = \frac{DU}{DF}$ , oder, weil die Durchmesser  $DU$  und  $EL$  gleich sind,

$$9. \frac{CR}{RZ} = \frac{EL}{DF}.$$

9) Multiplicirt man die Gleichungen (8. und 9.), so erhält man

$$\frac{RZ \cdot CR}{RF \cdot RZ} = \frac{EC \cdot EL}{EL \cdot DF}, \text{ oder}$$

$$10. \frac{CR}{RF} = \frac{EC}{DF}.$$

Dieses in (7.) gesetzt giebt

$$\frac{MD \cdot NE \cdot CR \cdot RP}{ME \cdot NR \cdot DP \cdot RF} = \frac{CR}{RF}, \text{ oder}$$

$$\frac{MD \cdot NE \cdot RP}{ME \cdot NR \cdot DP} = 1, \text{ oder}$$

$$11. MD \cdot NE \cdot PR = ME \cdot NR \cdot DP.$$

\*) Dieses ist nach (§. 212. II) die Bedingung, unter welcher *MNP* eine gerade Linie ist. Denn es sey *DY* mit *RN* parallel, so ist in den ähnlichen Dreiecken *MDY*, *MEN* und *PDY*, *PRN*,

$$\frac{MD}{DY} = \frac{ME}{NE} \text{ und } \frac{DY}{DP} = \frac{NR}{RP}.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{MD}{DP} = \frac{ME \cdot NR}{NE \cdot RP}, \text{ oder}$$

$$12. MD \cdot NE \cdot PR = ME \cdot NR \cdot DP;$$

wie (11.).

Also schneiden sich die graden Linien *ABM* und *EDM*, *BCN* und *FEN*, *CDP* und *AFP* in einer und derselben graden Linie *MNP*; wie behauptet wurde.

## 216.

*Erklärung.* Wenn die gegenüber liegenden Seiten eines Vierecks *FGHL* (Fig. 125.) nicht parallel sind, so können nicht allein die anliegenden, sondern auch die gegenüber liegenden Seiten, verlängert, außerhalb des Vierecks sich schneiden; z. B. in *P* und *Q*. Versteht man nun unter Diagonalen im allgemeinen Sinne, die graden Linien, welche die Durchschnittspuncte der Seiten einer Figur verbinden, so ist noch die Diagonal *PQ* möglich, und das Viereck hat also dann eigentlich drei Diagonalen: *FH*, *GL* und *PQ*.

Ein Viereck auf diese Weise, also als die Figur *FQHP* betrachtet, heisst vollständiges Viereck.

## 217.

*Lehrsatz.* Die Stücke, welche die drei Diagonalen eines vollständigen Vierecks von einander abschneiden, sind Gleichvielfache.

Z. B. in dem Viereck *FGHL* (Fig. 125.), nachdem es durch Verlängerung der Seiten bis *Q* und *P* vervollständigt worden, ist

$$1. \frac{FK}{HK} = \frac{FN}{HN},$$

$$2. \frac{LK}{GK} = \frac{LM}{GM} \text{ und}$$

$$3. \frac{QM}{PM} = \frac{QN}{PN}.$$

*Beweis.* Man nehme zu dem Puncte, in welchem sich die drei graden Linien *GL*, *QHL* und *FLP* durch die drei Scheitel *G*, *H*, *F*, des Dreiecks *FGH* schneiden, den Punct *L*, so sind die Stücke, welche sie von den Seiten abschneiden:

für die Seite  $FG: FQ$  und  $GQ$ ,  
 für die Seite  $GH: GP$  und  $HP$ ,  
 für die Seite  $FH: HK$  und  $EK$ ;

also ist zu Folge (§. 212.)

$$1. GQ \cdot HP \cdot FK = FQ \cdot GP \cdot HK.$$

Nun sey  $GR$  mit  $FN$  parallel, so sind die Dreiecke  $QGR$ ,  $QFN$  und  $PGR$ ,  $PHN$  ähnlich. Also ist

$$\frac{FQ}{GQ} = \frac{FN}{GR} \text{ und } \frac{GP}{HP} = \frac{GR}{HN}.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{FQ \cdot GP}{GQ \cdot HP} = \frac{FN}{HN}, \text{ oder}$$

$$2. FQ \cdot GP \cdot HN = FN \cdot GQ \cdot HP.$$

Multipliziert man die Gleichungen (1. und 2.) mit einander, so erhält man

$$GQ \cdot HP \cdot FK \cdot FQ \cdot GP \cdot HN = FQ \cdot GP \cdot HK \cdot FN \cdot GQ \cdot HP,$$

oder

$$FK \cdot HN = HK \cdot FN,$$

oder

$$3. \frac{FK}{HK} = \frac{FN}{HN};$$

welches die erste Gleichung des Lehrsatzes ist.

Diese Gleichung bezieht sich auf den Durchschnitt der Diagonalen  $EKN$  und  $LGM$  in  $K$ , und auf den Durchschnitt der Diagonalen  $FN$  und  $PNM$  in  $N$ .

Nun gilt aber von je zwei andern Diagonalen, wie sich auf dieselbe Art beweisen läßt, das Nemliche. Also ist auch für die Durchschnitte der Diagonalen  $LGM$  und  $FHN$  in  $K$ , und  $LGM$  und  $PQM$  in  $M$ , auf dieselbe Weise,

$$4. \frac{LK}{GK} = \frac{LM}{GM},$$

und für die Durchschnitte der Diagonalen  $PQM$  und  $LGM$  in  $M$ , und  $PQM$  und  $FHN$  in  $N$ ,

$$5. \frac{QM}{PM} = \frac{QN}{PN};$$

welches die andern beiden Gleichungen des Lehrsatzes sind.

218.

**Lehrsatz.** Wenn sich beliebige grade Linien aus einem Punkte, mit beliebigen andern geraden Linien aus einem andern Punkte, schneiden, so liegen die Durchschnitte derjenigen graden Linien, welche die Durchschnitte der sich schneidenden verbinden, sämmtlich in einer graden Linie.

Z. B. wenn die graden Linien  $FQ$  und  $FP$  (Fig. 125.) von beliebigen graden Linien  $MP$ ,  $ML$ ,  $ML_1$ ,  $ML_2$  etc. geschnitten werden, so liegen die Durchschnitte  $H$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  etc. der graden Linien  $GP$  und  $LQ$ ;  $G_1P$  und  $L_1Q$ ;  $G_2P$  und  $L_2Q$  etc., welche die Durchschnitte  $Q$ ,  $G$ ,  $G_1$  etc.  $P$ ,  $L$ ,  $L_1$  ... der schneidenden Linien aus  $F$  und  $M$  verbinden, in einer und derselben graden Linie  $FH_2H_1HN$ .

**Beweis.** Wenn  $FHN$  die grade Linie ist, welche durch  $F$  und durch den Durchschnitts-Punct  $H$  der Linien  $GP$  und  $LQ$  geht,

die die Durchschnitte  $G$ ,  $Q$  und  $P$  der Linien  $FQ$ ,  $FP$ ,  $ML$ ,  $MP$  verbinden, so ist, zu Folge (§. 217. 3.),

$$\frac{QM}{PM} = \frac{QN}{PN},$$

oder

$$\frac{QM}{PM} = \frac{QP - PN}{PN} = \frac{QP}{PN} - 1.$$

Nun sey  $FH_1N_1$  die grade Linie, welche durch  $F$  und den Durchschnittpunct  $H_1$  der Linien  $G_1P$  und  $L_1Q$ , für eine andere schneidende  $MG_1L_1$ , geht, so ist, nach dem nemlichen Satze,

$$\frac{QM}{PM} = \frac{QN_1}{PN_1},$$

oder

$$\frac{QM}{PM} = \frac{QP - PN_1}{PN_1} = \frac{QP}{PN_1} - 1.$$

Es war aber worhin

$$\frac{QM}{PM} = \frac{QP}{PN} - 1;$$

Also ist  $\frac{QP}{PN_1} - 1 = \frac{QP}{PN} - 1$ , oder  $\frac{QP}{PN_1} = \frac{QP}{PN}$ , und folglich  $PN_1 = PN$ .

Also fällt  $N_1$  in  $N$  und mithin die Linie  $FH_1N_1$  in die Linie  $FHN$ ; und folglich liegen  $F$ ,  $H_1$ ,  $H$  und  $N$  in grader Linie. Das Nemliche gilt für jede andere schneidende  $MG_1L_1$ , und für beliebige andere geschnittene  $FQ_1$ ,  $FP_1$  etc.

So wie aber die Durchschnittpuncte  $H$  und  $H_1$  von  $CP$ ,  $LQ$  und  $G_1P$ ,  $L_1Q$ , bewiesenermaassen mit  $F$  in grader Linie liegen, so liegen auch nothwendig, wenn man  $L_1G_1M$  statt  $PQM$  zur untersten Linie nimmt, die Durchschnittpuncte  $H_3$  und  $H_1$  von  $L_1G_1$ ,  $G_1L$  und  $L_1Q$ ,  $G_1P$  mit  $F$  in grader Linie. Also liegen  $H_1$  und  $H_3$  beide in der graden Linie  $FH$ , folglich liegen alle vier Puncte  $F$ ,  $H_3$ ,  $H_1$  und  $H$  in einer graden Linie; und eben so für beliebige, mehrere, sich schneidende Linien.

## Von dem Mittelpuncte der Entfernungen.

219.

**Lehrsatz.** Wenn die senkrechten Coordinaten beliebiger Puncte, z. B. der Ecken eines beliebigen Vielecks  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , etc. (Fig. 113.), oder die Entfernungen der Puncte  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , etc. von zwei beliebigen, auf einander senkrechten Axen  $AP$  und  $AQ$ , wie in (§. 189.) durch  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  ...  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  ... bezeichnet werden, so dass z. B.

$$\begin{aligned} AC_1 &= p_1, & C_1B_1 &= q_1, \\ AC_2 &= p_2, & C_2B_2 &= q_2, \\ AC_3 &= p_3, & C_3B_3 &= q_3, \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & \end{aligned}$$

ist, und man nimmt zwei beliebige andere, auf einander senkrechte Axen  $AU$  und  $AV$  an, die sich aber in dem nemlichen Puncte  $A$  schneiden, und bezeichnet die Coordinaten der Ecken der Figur für diese neue Axen durch  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  ... und  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  ... so dass



$$\begin{aligned} AF_1 &= u_1, & F_1B_1 &= v_1, \\ AF_2 &= u_2, & F_2B_2 &= v_2, \\ AF_3 &= u_3, & F_3B_3 &= v_3, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

ist, so können  $u_1, u_2, u_3, \dots, v_1, v_2, v_3, \dots$  wie folgt durch  $p_1, p_2, p_3, \dots, q_1, q_2, q_3, \dots$  ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} u_1 &= mp_1 - nq_1, & v_1 &= mq_1 + np_1, \\ u_2 &= mp_2 - nq_2, & v_2 &= mq_2 + np_2, \\ u_3 &= mp_3 - nq_3, & v_3 &= mq_3 + np_3, \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

wo  $m$  und  $n$  Zahlen sind, welche von dem Winkel  $PAU = QAV$  zwischen den neuen und den vorigen Axen abhängen. Diese Zahlen  $m$  und  $n$  sind für alle  $u$  und für alle  $v$  die nemlichen, und es ist  $m^2 + n^2 = 1$ .

Die Lage der Coordinaten-Axen und ihres Durchschnits gegen die Figur ist ganz willkührlich.

*Beweis.* Es mögen  $C_1G_1, C_2G_2, C_3G_3$  etc. auf  $AV$  senkrecht seyn, so sind die Winkel  $G_1C_1A, G_2C_2A, G_3C_3A$  etc. unter einander und den Winkeln  $QAV$  und  $PAU$  gleich.

Nun setze man

$$\begin{aligned} 1. & G_1C_1 = m \cdot AC_1 = mp_1 \text{ und} \\ 2. & AG_1 = n \cdot AC_1 = np_1, \end{aligned}$$

wo  $m$  und  $n$  auf irgend eine Weise von den Winkeln  $G_1C_1A = QAV = PAU$  abhängen werden, so ist auch, weil die rechtwinkligen Dreiecke  $AC_1G_1$  und  $C_1H_1B_1$  ähnlich sind,

$$\begin{aligned} 3. & B_1H_1 = m \cdot B_1C_1 = mq_1 \text{ und} \\ 4. & H_1C_1 = n \cdot B_1C_1 = nq_1. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} AF_1 \text{ oder } u_1 &\text{ gleich } G_1C_1 - H_1C_1 \text{ und} \\ F_1B_1 \text{ oder } v_1 &\text{ gleich } B_1H_1 + AG_1, \end{aligned}$$

also ist vermöge (1. und 4.) für den Punct  $B_1$ ,

$$5. u_1 = mp_1 - nq_1 \text{ und}$$

vermöge (2. und 3.)

$$6. v_1 = mq_1 + np_1.$$

Es sind aber auch, für einen andern Punct des Vielecks, z. B. für  $B_2$ , auf dieselbe Weise, und zwar, weil die rechtwinkligen Dreiecke  $G_2C_2A, G_1C_1A$  und  $C_2H_2B_2$  ähnlich, also ihre Seiten von einander Gleichvielfache sind, mit den nemlichen  $m$  und  $n$ ,

$$\begin{aligned} 7. & G_2C_2 = m \cdot AC_2 = mp_2, \\ 8. & AG_2 = n \cdot AC_2 = np_2, \\ 9. & B_2H_2 = m \cdot B_2C_2 = mq_2, \\ 10. & H_2C_2 = n \cdot B_2C_2 = nq_2. \end{aligned}$$

Also ist auch, weil

$$\begin{aligned} AF_2, \text{ oder } u_2, &\text{ gleich } G_2C_2 - H_2C_2 \text{ und} \\ F_2B_2, \text{ oder } v_2, &\text{ gleich } B_2H_2 + AG_2 \end{aligned}$$

ist,

$$11. u_2 = mp_2 - nq_2,$$

$$12. v_2 = mq_2 + np_2.$$

So verhält es sich für jeden andern Eck-Punct  $B_3, B_4$  etc. des Vielecks, und es ist also zusammengekommen:

$$\begin{aligned} u_1 &= mp_1 - nq_1, & v_1 &= mq_1 + np_1, \\ u_2 &= mp_2 - nq_2, & v_2 &= mq_2 + np_2, \\ u_3 &= mp_3 - nq_3, & v_3 &= mq_3 + np_3; \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

wie behauptet wurde.

Da ferner  $G_1 C_1 = mp_1$  und  $AG_1 = np_1$  gesetzt wurde, und in dem rechtwinkligen Dreieck  $AC_1 G_1$ ,  
 $G_1 C_1^2 + AG_1^2 = AC_1^2 = p_1^2$  ist, so ist  $m^2 p_1^2 + n^2 p_1^2 = p_1^2$ , also  
 $m^2 + n^2 = 1$ .

## 220.

*Zusatz.* Also wenn die Summen der Entfernungen beliebiger Punkte, z. B. der Ecken eines Vielecks von zwei aufeinander senkrechten Axen durch

$$s = p_1 + p_2 + p_3 + \dots \text{ und}$$

$$t = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$$

bezeichnet werden, so sind die Summen der Entfernungen der nemlichen Punkte von zwei beliebigen andern, auf einander senkrechten Axen, die sich aber in dem nemlichen Punkte schneiden, nemlich:

$$s_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \text{ und}$$

$$t_1 = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

zu Folge (§. 219.)

$$s_1 = m(p_1 + p_2 + p_3 + \dots) - n(q_1 + q_2 + q_3 + \dots) \text{ und}$$

$$t_1 = m(q_1 + q_2 + q_3 + \dots) + n(p_1 + p_2 + p_3 + \dots),$$

oder

$$s_1 = ms - nt \text{ und}$$

$$t_1 = mt + ns.$$

## 221.

*Lehrsatz.* Wenn die rechtwinkligen Coordinaten beliebiger Punkte, z. B. der Ecken eines Vielecks, wie vorhin, durch  $P_1, P_2, P_3, \dots, Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ , ferner, die Entfernungen der Eck-Punkte der Figur von dem Anfangspunct der Coordinaten durch  $r_1, r_2, r_3, \dots$ , also z. B.  $AB_1$  (Fig. 113.) durch  $r_1$ ,  $AB_2$  durch  $r_2$ ,  $AB_3$  durch  $r_3$ , etc. bezeichnet werden, und man nimmt in den Axen willkürlich zwei andere Punkte Y und Z an, in den Entfernungen

$$AY = x \text{ und } AZ = \lambda$$

von dem Anfangspunct der Coordinaten A, so sind die Entfernungen der Eck-Punkte der Figur  $B_1, B_2, B_3, \dots$  von diesen Punkten Y und Z, der Reihe nach,

$$B_1 Y = \sqrt{(r_1^2 + x^2 - 2p_1 x)}, \quad B_1 Z = \sqrt{(r_1^2 + \lambda^2 - 2q_1 \lambda)},$$

$$B_2 Y = \sqrt{(r_2^2 + x^2 - 2p_2 x)}, \quad B_2 Z = \sqrt{(r_2^2 + \lambda^2 - 2q_2 \lambda)},$$

$$B_3 Y = \sqrt{(r_3^2 + x^2 - 2p_3 x)}, \quad B_3 Z = \sqrt{(r_3^2 + \lambda^2 - 2q_3 \lambda)},$$

etc.

etc.

die Axen mögen liegen wie man will: neben der Figur hin, oder durch die Figur hindurch.

*Beweis.* In dem Dreieck  $B_1 AY$  z. B. ist die Seite  $B_1 A = r_1$ , die Seite  $AY = x$ , die Entfernung des Perpendikels  $B_1 C_1$  auf  $AY$  von A gleich  $p_1$  und der Winkel  $B_1 AY$ , in dem Falle der Figur, kleiner als ein rechter. Also ist zu Folge (§. 125. I.)

$$B_1 Y^2 = r_1^2 + x^2 - 2p_1 x,$$

und folglich

$$B_1 Y = \sqrt{(r_1^2 + x^2 - 2p_1 x)}.$$

In dem Dreieck  $B_1 AZ$  ist die Seite  $B_1 A = r_1$ , die Seite  $AZ = \lambda$

die Entfernung des Perpendikels  $B_1 D_1$  auf  $AZ$  von  $A$ , gleich  $r_1$  und der Winkel  $B_1 A Z$  kleiner als ein rechter. Also ist zu Folge (§. 123. I.)

$$B_1 Z^2 = r_1^2 + \lambda^2 - 2q_1 \lambda,$$

und folglich

$$B_1 Z = \sqrt{r_1^2 + \lambda^2 - 2q_1 \lambda}.$$

Ganz auf dieselbe Weise verhält es sich mit den andern Eck-Puncten der Figur  $B_2, B_3, \dots$ , wenn man der Reihe nach  $r_2, r_3, \dots$  statt  $r_1$ ;  $p_2, p_3, \dots$  statt  $p_1$ ; und  $q_2, q_3, \dots$  statt  $q_1$  setzt. Also ist

$$B_2 Y = \sqrt{r_2^2 + x^2 - 2p_2 x} \text{ und } B_2 Z = \sqrt{r_2^2 + \lambda^2 - 2q_2 \lambda}$$

u. s. w.; wie behauptet wurde.

So lange die Figur  $B_1, B_2, B_3, \dots$  ganz auf der rechten Seite der Axe  $AQ$  und über der Axe  $AP$  liegt, sind die Winkel  $B_1 AY, B_2 AY, B_3 AY$  etc. und  $B_1 AZ, B_2 AZ, B_3 AZ$  etc. sämmtlich kleiner als rechte. Also ist das dritte Glied der Ausdrücke von  $B_1 Y, B_2 Y$  etc.  $B_1 Z, B_2 Z$  etc. negativ. Gesetzt, die Figur  $B_1, B_2, B_3, \dots$  fiel nun zwar noch oberhalb der Axe  $AP$ , aber irgend einer oder mehrere Eck-Puncte der Figur fielen linkerhand der andern Axe  $QA$ , oder mit andern Worten: es werde statt der Axe  $QA$  eine Axe, welche durch die Figur geht, wie z. B.  $Q_1 S_1$  angenommen, so sind zwar die Winkel zwischen den Linien aus denjenigen Puncten, welche linkerhand der neuen Axe fallen und dieser Axe, z. B. die Winkel  $B_1 A_1 Y_1, B_2 A_1 Y_1$  etc. größer als rechte, und das dritte Glied der Ausdrücke von  $B_1 Y_1, B_2 Y_1$  etc. ist alsdann positiv (§. 123. II.). Allein auch die Abstände  $C_1 A_1 = p_1, C_2 A_1 = p_2$  etc. der Puncte  $B_1, B_2, \dots$  von der neuen Axe wechseln das Zeichen, weil die Puncte  $B_1, B_2, \dots$  nunmehr auf die andere Seite der Axe fallen. Also bleibt das Zeichen des dritten Gliedes der Ausdrücke. Eben so verhält es sich mit den Ausdrücken, wenn etwa auch die andere Axe durch die Figur geht. Also gelten die Ausdrücke des Lehrsatzes für alle Fälle, die Axen mögen neben die Figur hin, oder durch die Figur gehen, und folglich liegen wie man will.

## 222.

**Lehrsatz.** Für beliebige Puncte in der Ebene, also, wenn man will, für die Eck-Puncte jedes beliebigen Vielecks, gibt es unzählige Paare aufeinander senkrechter, durch die Figur hindurchgehender, nicht-paralleler Axen, welche die Eigenschaft haben, dass die Summe der Entfernungen der Eck-Puncte der Figur von ihnen, auf jeder Seite jeder Axe gleich groß, oder, was das nemliche ist, dass die Summe der Entfernungen aller Eck-Puncte zusammen, von jeder Axe, nach der Lage der Puncte positiv und negativ genommen, gleich Null ist.

Alle diese Axen aber schneiden sich in einem und demselben Puncte.

**Beweis.** Die Summe der Entfernungen aller Eck-Puncte der Figur  $B_1 B_2 B_3, \dots$  (Fig. 113.) z. B. von der Axe  $QS$  ist

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4, \dots$$

Nun sey irgend eine andere Axe  $Q_1 S_1$  mit der vorigen parallel, und von derselben um  $AA_1 = e$  entfernt, so ist offenbar jeder Abstand von der neuen Axe um  $e$  kleiner; also ist die Summe der Abstände der Eck-Puncte der Figur, wenn ihrer z. B.  $n$  sind, von

der neuen Axe, um  $ne$  kleiner. Man kann aber  $e$  so groß annehmen als man will, also auch so groß, daß gerade

$$ne \text{ gleich } p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \dots$$

ist. Alsdann ist die Summe der Abstände von der neuen Axe, gegen die Summe der Abstände von der vorigen, gerade um so viel kleiner, als sie selbst beträgt und folglich ist die Summe der neuen Abstände gleich Null. Eben so verhält es sich mit irgend einer andern, auf der vorigen senkrechten Axe. Folglich sind zunächst zwei auf einander senkrechte Axen möglich, für welche die Summe der Abstände der Eck-Puncte der Figur Null ist.

Aber keine anderen, damit parallelen Axen sind mehr möglich; denn für jede parallele Axe ist die Summe der Abstände nothwendig um den  $n$ -fachen Abstand der parallelen Axen von einander größer oder kleiner, und folglich nicht mehr gleich Null.

Wenn nun  $AU$  und  $AV$  zwei andere Axen sind, die mit den Axen  $AP$  und  $AQ$  durch einen und denselben Punct  $A$  gehen und mit demselben einen beliebigen Winkel machen, so können zu Folge (§. 220.) die Summen der Abstände der Eck-Puncte der Figur von den neuen Axen durch

$$s_1 = ms - nt \text{ und}$$

$$t_1 = ns + mt$$

ausgedrückt werden, wenn  $s$  und  $t$  die Summen der Abstände von den anfänglichen Axen bezeichnen. Sind nun die anfänglichen Axen solche, für welche die Summen der Abstände der Eck-Puncte der Figur von ihnen Null sind, dergleichen es, wie vorhin bewiesen, immer giebt, so sind  $s$  und  $t$  gleich Null. Da nun  $s_1 = ms - nt$  und  $t_1 = ns + mt$  ist, so sind, wenn  $s$  und  $t$  Null sind, auch  $s_1$  und  $t_1$  gleich Null, das heißt: auch die Summen der Abstände der Eck-Puncte der Figur von den neuen Axen sind gleich Null, wenn die neuen Axen in demselben Punct sich schneiden, wie die vorigen, sie mögen übrigens mit ihnen einen Winkel machen, welchen man will. Und da es nun parallele Axen, wie vorhin bewiesen, nicht giebt, für welche außerdem die Summe der Abstände Null wäre, so giebt es unter gleichem Winkel mit den vorigen Axen nur ein Axen-Paar, für welches die Summe der Abstände Null ist. Eben so für jeden andern Winkel nur eins; und folglich sind zwar unzählige Paare von Axen möglich, für welche die Summen der Abstände der Eck-Puncte Null sind, aber alle schneiden sich in einem und demselben Puncte.

## 223.

*Erklärung.* Alle auf einander senkrechte Axen, welche die Eigenschaft haben; daß die Summen der Entfernungen beliebiger Puncte in der Ebene von ihnen, z. B. der Eck-Puncte einer beliebigen vielseitigen Figur, Null sind, heißen Axen der mittleren Entfernung der Puncte, oder der Ecken der Figur.

Der Punct, in welchem sich, wie in (§. 222.) bewiesen, alle diese verschiedenen Paare von Axen der mittleren Entfernung, für ein und dasselbe System von Puncten, oder für die Ecken einer und derselben Figur schneiden, heißt Mittel-Punct der Entfernungen der gegebenen Puncte, oder der Ecken der gegebenen Figur.

der um  $x$  vom Anfang-Puncte der Coordinaten  $A$  entfernt liegt, zu Folge (§. 221.)

$$B_1 Y^2 = r_1^2 + x^2 - 2p_1 x,$$

$$B_2 Y^2 = r_2^2 + x^2 - 2p_2 x,$$

$$B_3 Y^2 = r_3^2 + x^2 - 2p_3 x,$$

etc.

Die Summe dieser Quadrate ist, wenn  $n$  Puncte  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  vorhanden sind,

$$B_1 Y^2 + B_2 Y^2 + B_3 Y^2 + \dots + B_n Y^2 \\ = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2) + nx^2 - 2x(p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n).$$

Nun lege man den Anfangs-Punct der Coordinaten  $A$  in den Mittel-Punct der Entfernungen der  $n$  Puncte  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ , so daß  $AP$  nunmehr eine Axe der mittleren Entfernung ist, so ist vermöge der Eigenschaft dieser Axen (§. 222.) die Summe der Abstände  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  gleich Null. Also ist alsdann die Summe der Quadrate der Entfernungen der Puncte  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  von dem Puncte  $Y$ , in der Axe  $AP$ , nur noch

$$(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2) + nx^2.$$

In dieser Summe mag die Entfernung  $x$  des Puncts  $Y$  von dem Mittel-Puncte der Entfernung seyn was man will, positiv oder negativ: immer ist die Summe größer als  $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2$ , oder größer als die Summe der Quadrate der Entfernungen der Puncte  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  von dem Mittel-Puncte der Entfernungen, weil das Quadrat  $x^2$  immer positiv ist. Der Punct  $Y$  liegt zwar grade in der Axe der mittleren Entfernung  $AP$ , allein da diese Axe durch den Mittel-Punct der Entfernungen jede beliebige Richtung haben kann (§. 222.), so kann der Punct  $Y$  überall liegen, wo man will.

Es folgt also, daß die Summe der Quadrate der Entfernungen beliebiger Puncte von ihrem Mittel-Puncte der Entfernungen kleiner ist, als die Summe der Quadrate der Entfernungen der nemlichen Puncte von jedem andern Puncte; wie behauptet wurde \*).

Von

\*) Der Mittel-Punct der Entfernungen beliebiger Puncte ist der nemliche, welcher in der Mechanik Schwer-Punct von Puncten, oder Mittel-Punct gleicher, auf die Puncte, mit einander parallel wirkender Kräfte heisst.

Es giebt auch bekanntlich, wie von Puncten, so von Linien, Flächen und Körpern, Schwerpuncte, und man hält zuweilen dafür, daß auch die Lehre vom Schwerpuncte der Linien, Flächen und Körper in die Geometrie gehöre. Es scheint aber, daß sich, ohne den Begriff des Moments zu Hülfe zu nehmen, von dem Schwerpuncte der Linien, Flächen und Körper kein deutlicher Begriff gehen lasse. Der Begriff des Moments aber beruht wesentlich auf dem Principe des Hebels oder der virtuellen Geschwindigkeiten und findet daher ohne rein mechanische Vorstellungen, nemlich ohne die Vorstellung von Kräften und ihren Wirkungen nicht Statt. Aus diesem Grunde scheint die Lehre von dem Schwerpuncte der Linien, Flächen und Körpern nicht wohl in die Geo-

**Von dem Puncte kleinster Entfernung.**

227.

**Erklärung.** Je nachdem ein Punct gegen beliebige andere Puncte, z. B. gegen die Eck-Puncte einer beliebigen vielseitigen Figur, diese oder jene Lage hat, werden seine Entfernungen von den andern Puncten, folglich auch die Summen der Entfernungen, verschieden seyn.

Es läßt sich also voraussetzen, daß es einen oder mehrere Puncte giebt, deren Entfernungen von den gegebenen Puncten zusammengenommen kleiner sind, als die Summen der Entfernungen aller andern, um sie herum liegenden Puncte, von den gegebenen.

Dergleichen Puncte sollen Puncte der kleinsten Entfernung für gegebene Puncte heißen.

228.

**Lehrsatz.** Jeder Punct kleinster Entfernung hat die Eigenschaft, daß er von allen Puncten, die in graden Linien durch ihn und die gegebenen Puncte liegen und gleich weit von ihm entfernt sind, der Mittel-Punct der Entfernungen (§. 223.) ist, und umgekehrt.

---

Geometrie, sondern wirklich, sammt ihrem geometrischen Theile, in die Mechanik zu gehören. Mit der Lehre vom Schwerpuncte von Puncten, oder von dem Mittel-Puncte der Entfernungen, von welcher das Obige die Elemente enthält, ist es anders. Diese Lehre ist rein-geometrisch, weil die, auf Puncte, in parallelen Richtungen wirkenden Kräfte gleich groß angenommen werden und deshalb nicht selbst weiter in Betracht kommen, daher denn auch der Schwer-Punct von Puncten als Mittel-Punct der Entfernungen betrachtet werden kann und als solcher ein rein-geometrischer Gegenstand ist.

Der Fall ist ein anderer, wie bei Gegenständen, die sonst wohl zuweilen die Geometrie unrichtigerweise der Analysis abnimmt, z. B. den sogenannten Winkel-Functionen. Diese sogenannten Winkel-Functionen sind wesentlich unmögliche Logarithmen, und können ohne alle geometrische Vorstellungen, rein analytisch erklärt und abgehandelt werden. (Man sehe in der Rechenkunst, den zehnten Abschnitt.) Sie finden sich in der Geometrie deshalb wieder, weil daselbst Anwendungen davon auf geometrische Gegenstände gemacht werden, nicht aber haben sie etwa aus diesen Anwendungen ihren Ursprung. Die Lehre vom Schwer-Puncte der Linien, Flächen und Körper dagegen beruht wesentlich auf mechanischen Vorstellungen, und daher nimmt nicht etwa die Mechanik diesen Gegenstand der Geometrie ab, wie z. B. die Geometrie der Analysis die Winkel-Functionen, sondern die Lehre vom Schwer-Puncte der Linien, Flächen und Körper ist wirklich der Mechanik eigen, weil diese Schwer-Puncte ohne sie keine bestimmte geometrische Bedeutung haben.

(Diese Anmerkung ist nicht für die Lernenden bestimmt, sondern für Diejenigen, welche den Gegenstand schon kennen.)

Wenn z. B.  $M$  der Punkt der kleinsten Entfernung für die Punkte  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  (Fig. 128.) ist und man nimmt auf den graden Linien  $MB_1, MB_2, MB_3$  etc., in beliebigen gleichen Entfernungen,  $ME_1 = ME_2 = ME_3$  etc. die Punkte  $E_1, E_2, E_3$  etc., so ist  $M$  zugleich der Mittel-Punkt der Entfernungen der Punkte  $E_1, E_2, E_3$  etc. /

*Beweis.* Wenn  $AP$  und  $AQ$  zwei beliebige, auf einander senkrechte Coordinaten-Axen sind, und man bezeichnet, wie in (§. 219.), die Coordinaten der Punkte  $B_1, B_2, B_3$  etc., nemlich  $B_1 D_1, B_2 D_2, B_3 D_3, \dots$  und  $B_1 C_1, B_2 C_2, B_3 C_3, \dots$  durch  $p_1, p_2, p_3, \dots$  und  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , ihre Entfernungen  $AB_1, AB_2, AB_3, \dots$  vom Anfangs-Punkte der Coordinaten  $A$ , durch  $r_1, r_2, r_3, \dots$  und die Entfernung  $AY$  irgend eines Punktes  $Y$  in der Axe  $AP$  von  $A$ , durch  $x$ , so sind zu Folge (§. 221.) die Ausdrücke der Entfernungen der Punkte  $B_1, B_2, B_3, \dots$  von dem Punkte  $Y$  folgende:

$$1. \begin{cases} B_1 Y = \sqrt{(r_1^2 + x^2 - 2p_1 x)}, \\ B_2 Y = \sqrt{(r_2^2 + x^2 - 2p_2 x)}, \\ B_3 Y = \sqrt{(r_3^2 + x^2 - 2p_3 x)}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

oder

$$\begin{aligned} B_1 Y &= r_1 \sqrt{\left(1 - \frac{x(2p_1 - x)}{r_1^2}\right)}, \\ B_2 Y &= r_2 \sqrt{\left(1 - \frac{x(2p_2 - x)}{r_2^2}\right)}, \\ B_3 Y &= r_3 \sqrt{\left(1 - \frac{x(2p_3 - x)}{r_3^2}\right)}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$2. \begin{cases} \frac{x(2p_1 - x)}{r_1^2} = e_1, \\ \frac{x(2p_2 - x)}{r_2^2} = e_2, \\ \frac{x(2p_3 - x)}{r_3^2} = e_3, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

setzt,

$$3. \begin{cases} B_1 Y = r_1 \sqrt{(1 - e_1)} = r_1 (1 - e_1)^{\frac{1}{2}}, \\ B_2 Y = r_2 \sqrt{(1 - e_2)} = r_2 (1 - e_2)^{\frac{1}{2}}, \\ B_3 Y = r_3 \sqrt{(1 - e_3)} = r_3 (1 - e_3)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Entwickelt man die Wurzel-Größen  $(1 - e_1)^{\frac{1}{2}}, (1 - e_2)^{\frac{1}{2}}, (1 - e_3)^{\frac{1}{2}}$  etc. nach dem binomischen Lehrsatz (Rechenkunst, §. 224.), so erhält man

$$4. \begin{cases} B_1 Y = r_1 \left(1 - \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{8}e_1^2 - \frac{1}{16}e_1^3 - \frac{5}{128}e_1^4 - \dots\right), \\ B_2 Y = r_2 \left(1 - \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{8}e_2^2 - \frac{1}{16}e_2^3 - \frac{5}{128}e_2^4 - \dots\right), \\ B_3 Y = r_3 \left(1 - \frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{8}e_3^2 - \frac{1}{16}e_3^3 - \frac{5}{128}e_3^4 - \dots\right), \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Setzt man hierin wieder die Werthe von  $e_1, e_2, e_3$  etc. (2.), so erhält man

$$5. \begin{cases} B_1 Y = r_1 \left( 1 - \frac{x(2p_1 - x)}{2r_1^2} - \frac{x^2(2p_1 - x)^2}{8r_1^4} - \dots \right), \\ B_2 Y = r_2 \left( 1 - \frac{x(2p_2 - x)}{2r_2^2} - \frac{x^2(2p_2 - x)^2}{8r_2^4} - \dots \right), \\ B_3 Y = r_3 \left( 1 - \frac{x(2p_3 - x)}{2r_3^2} - \frac{x^2(2p_3 - x)^2}{8r_3^4} - \dots \right), \\ \text{etc.} \end{cases}$$

oder, wenn man die Glieder welche gleiche Potestäten von  $x$  enthalten zusammennimmt,

$$\begin{aligned} B_1 Y &= r_1 \left( 1 - x \frac{p_1}{r_1^2} + x^2 \left( \frac{1}{2r_1^2} - \frac{p_1^2}{2r_1^4} \right) - \dots \right), \\ B_2 Y &= r_2 \left( 1 - x \frac{p_2}{r_2^2} + x^2 \left( \frac{1}{2r_2^2} - \frac{p_2^2}{2r_2^4} \right) - \dots \right), \\ B_3 Y &= r_3 \left( 1 - x \frac{p_3}{r_3^2} + x^2 \left( \frac{1}{2r_3^2} - \frac{p_3^2}{2r_3^4} \right) - \dots \right), \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

etc., oder auch

$$6. \begin{cases} B_1 Y = r_1 - x \frac{p_1}{r_1} + x^2 \left( 1 - \frac{p_1^2}{r_1^2} \right) \frac{1}{2r_1} + x^3 (\dots) - \dots, \\ B_2 Y = r_2 - x \frac{p_2}{r_2} + x^2 \left( 1 - \frac{p_2^2}{r_2^2} \right) \frac{1}{2r_2} + x^3 (\dots) - \dots, \\ B_3 Y = r_3 - x \frac{p_3}{r_3} + x^2 \left( 1 - \frac{p_3^2}{r_3^2} \right) \frac{1}{2r_3} + x^3 (\dots) - \dots, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

oder, weil z. B.  $AB_1^2 = AC_1^2 + C_1B_1^2$ , das heißt,  $r_1^2 = p_1^2 + q_1^2$ , und eben so  $r_2^2 = p_2^2 + q_2^2$ ,  $r_3^2 = p_3^2 + q_3^2$  etc., also  $1 - \frac{p_1^2}{r_1^2} = 1 - \frac{p_1^2}{p_1^2 + q_1^2} = \frac{q_1^2}{p_1^2 + q_1^2} = \frac{q_1^2}{r_1^2}$  und eben so  $1 - \frac{p_2^2}{r_2^2} = \frac{q_2^2}{r_2^2}$ ,  $1 - \frac{p_3^2}{r_3^2} = \frac{q_3^2}{r_3^2}$  etc. ist,

$$\begin{aligned} B_1 Y &= r_1 - x \frac{p_1}{r_1} + x^2 \frac{q_1^2}{r_1^2} \cdot \frac{1}{2r_1} + x^3 (\dots) - \dots, \\ B_2 Y &= r_2 - x \frac{p_2}{r_2} + x^2 \frac{q_2^2}{r_2^2} \cdot \frac{1}{2r_2} + x^3 (\dots) - \dots, \\ B_3 Y &= r_3 - x \frac{p_3}{r_3} + x^2 \frac{q_3^2}{r_3^2} \cdot \frac{1}{2r_3} + x^3 (\dots) - \dots, \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Dieses sind die Ausdrücke der Entfernungen der Punkte  $B_1, B_2, B_3, \dots$  von einem beliebigen Punkte  $Y$ , in Reihen nach den steigenden Potestäten von  $x = AY$  entwickelt. Aus (5.) ist leicht zu sehen, daß in diesen Reihen die folgenden Glieder immer höhere Potestäten von  $x$  enthalten.

Die Summe der Entfernungen  $B_1 Y, B_2 Y, B_3 Y$  etc. ist also, weil  $r_1 = B_1 A, r_2 = B_2 A, r_3 = B_3 A$  etc. ist,

$$7. \begin{cases} B_1 Y + B_2 Y + B_3 Y + \dots \\ = B_1 A + B_2 A + B_3 A + \dots \\ - x \left( \frac{p_1}{r_1} + \frac{p_2}{r_2} + \frac{p_3}{r_3} + \dots \right) \\ + x^2 \left( \frac{1}{2r_1} \cdot \frac{q_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2} \cdot \frac{q_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3} \cdot \frac{q_3^2}{r_3^2} + \dots \right) \\ \text{etc.} \end{cases}$$



Soll nun  $A$  ein Punct seyn, dessen Entfernungen von den Puncten  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , zusammengenommen kleiner sind, als die Summe der Entfernungen  $B_1 Y, B_2 Y, B_3 Y$  etc. jedes andern Puncts  $Y$  von  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , so muß für jede Entfernung  $x$  des Puncts  $Y$  von  $A$ ,

8.  $B_1 Y + B_2 Y + B_3 Y, \dots$  größer als  $B_1 A + B_2 A + B_3 A, \dots$  und folglich

$$9. \begin{cases} -x \left( \frac{p_1}{r_1} + \frac{p_2}{r_2} + \frac{p_3}{r_3} \dots \right) \\ + x^2 \left( \frac{1}{2r_1} \cdot \frac{q_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2} \cdot \frac{q_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3} \cdot \frac{q_3^2}{r_3^2} \dots \right) \\ + x^3 (\dots) \dots \end{cases}$$

immer positiv seyn, was auch  $x$  seyn mag.

Da man nun aber  $x$  allemal so klein annehmen kann, daß das erste Glied  $-x \left( \frac{p_1}{r_1} + \frac{p_2}{r_2} + \frac{p_3}{r_3} \dots \right)$  größer ist als alle übrigen zusammengenommen, so ist es nicht anders möglich, daß die GröÙe (9.) immer positiv ist, als wenn der Coefficient  $\frac{p_1}{r_1} + \frac{p_2}{r_2} + \frac{p_3}{r_3} \dots$  von  $x$  Null ist. Alsdann kann die GröÙe (9.) für jedes beliebige positive und negative  $x$  positiv seyn; denn  $x^2$  im zweiten Gliede ist, als Quadrat, immer positiv, die Quadrate  $q_1^2, q_2^2, q_3^2, \dots, r_1^2, r_2^2, r_3^2, \dots$  sind ebenfalls immer positiv und alle die Entfernungen  $r_1, r_2, r_3, \dots$  können positiv angenommen werden, so daß der Coefficient von  $x^2$ , nemlich  $\frac{1}{2r_1} \cdot \frac{q_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2} \cdot \frac{q_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3} \cdot \frac{q_3^2}{r_3^2} \dots$  immer positiv ist. Also kann die GröÙe (9.) für jedes beliebige positive und negative  $x$ , wenn es nur klein genug ist, immer positiv seyn; denn man kann  $x$  wiederum immer so klein annehmen, daß das zweite positive Glied  $x^2 (\dots)$  größer ist, als alle übrigen zusammengenommen. Es ist also nunmehr möglich, daß die Entfernungen des Punctes  $A$  von den Puncten  $B_1, B_2, B_3, \dots$  zusammengenommen kleiner sind als die Summe der Entfernungen aller andern Puncte  $Y$ , die dem Puncte  $A$  nahe genug liegen, denn obgleich  $Y$  grade in der Axe  $AP$  liegt, so ist doch die Lage dieser Axe willkürlich und  $x$  drückt eben sowohl die Entfernung jedes andern Puncts  $Y$  von  $A$ , rund um  $A$ , aus. Zwar kann für größere  $x$ , die nach dem Verschwinden des ersten Gliedes übrig bleibende GröÙe (9.) wiederum negativ, und folglich können weiter von  $A$  entfernte Puncte  $Y$  wiederum den Puncten  $B_1, B_2, B_3, \dots$  zusammen genommen näher seyn, als der Punct  $A$ , weil theils für negative  $x$  das dritte, fünfte etc. Glied mit  $x^3, x^5, \dots$  zusammen genommen größer seyn können, als das zweite, vierte etc. Glied mit  $x^2, x^4, \dots$ , wenn auch alle Coefficienten von  $x^3, x^4, x^5$  etc. positiv sind, theils weil die Coefficienten von  $x^3, x^4, x^5$  etc. selbst negativ seyn können; indessen wird es doch unter den weiter von  $A$  entfernten Puncten  $Y$ , weil die Summen ihrer Entfernungen von  $B_1, B_2, B_3, \dots$  ungleich sind, nothwendig wiederum einzelne geben, deren Entfernungen von  $B_1, B_2, B_3, \dots$  zusammen genommen kleiner sind, als die Summen der Entfernungen aller andern in ihrer Nähe. Diese Puncte sind dann selbst ebenfalls Puncte der kleinsten Entfernung.

In jedem Falle ist die allgemeine Bedingung für alle Punkte der kleinsten Entfernungen die, daß der Coefficient des ersten Gliedes der Größe (9.) Null ist, also daß

$$10. \frac{p_1}{r_1} + \frac{p_2}{r_2} + \frac{p_3}{r_3} \dots\dots = 0$$

ist.

Nimmt man statt des Points  $Y$  in der Axe  $AP$ , irgend einen Punkt  $Z$  in der Axe  $AQ$  an, so treten  $q_1, q_2, q_3 \dots\dots$  an die Stelle von  $p_1, p_2, p_3 \dots\dots$  und man findet noch folgende zweite Bedingungs - Gleichung für alle Punkte der kleinsten Entfernung:

$$11. \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \dots\dots = 0.$$

Diese Bedingungs - Gleichungen (10. und 11.) müssen alle Punkte der kleinsten Entfernung erfüllen.

Nun nehme man in den graden Linien  $AB_1, AB_2, AB_3$  etc. beliebige Punkte  $F_1, F_2, F_3, \dots\dots$ , in beliebigen, gleichen Entfernungen  $AF_1 = AF_2 = AF_3$  etc. von  $A$  an, bezeichne die gleichen Entfernungen dieser Punkte von  $A$  durch  $r$  und ihre Coordinaten durch  $^1p, ^1q; ^2p, ^2q; ^3p, ^3q$  etc., so ist, weil z. B.  $AF_1G_1, AB_1C_1$  und  $AF_1H_1, AB_1D_1$  ähnliche, rechtwinklige Dreiecke sind,

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{F_1G_1}{AF_1} \text{ und } \frac{B_1D_1}{AB_1} = \frac{F_1H_1}{AF_1},$$

das heist,

$$12. \begin{cases} \frac{p_1}{r_1} = \frac{^1p}{r}, \quad \frac{q_1}{r_1} = \frac{^1q}{r}, \\ \text{Eben so ist} \\ \frac{p_2}{r_2} = \frac{^2p}{r}, \quad \frac{q_2}{r_2} = \frac{^2q}{r}, \\ \frac{p_3}{r_3} = \frac{^3p}{r}, \quad \frac{q_3}{r_3} = \frac{^3q}{r}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Also sind jetzt die Bedingungs - Gleichungen (10. und 11.) folgende:

$$\frac{^1p}{r} + \frac{^2p}{r} + \frac{^3p}{r} \dots\dots = 0 \text{ und}$$

$$\frac{^1q}{r} + \frac{^2q}{r} + \frac{^3q}{r} \dots\dots = 0,$$

oder, wenn man mit  $r$  multiplicirt,

$$13. ^1p + ^2p + ^3p \dots\dots = 0,$$

$$14. ^1q + ^2q + ^3q \dots\dots = 0,$$

wo  $^1p, ^2p, ^3p \dots\dots ^1q, ^2q, ^3q \dots\dots$  die Coordinaten der Punkte  $F_1, F_2, F_3 \dots\dots$  sind.

Diese Bedingungs - Gleichungen (13. und 14.) sind aber die eines Mittel - Points der Entfernung der Punkte  $F_1, F_2, F_3 \dots\dots$  (§. 222.). Verlegt man daher den Anfangs - Punkt der Coordinaten  $A$  etwa nach  $M$  und nimmt in  $MB_1, MB_2, MB_3$  etc. beliebige, von  $M$  gleich weit entfernte Punkte  $E_1, E_2, E_3$  etc. an, so folgt, daß der Punkt  $M$ , wenn er ein Punkt kleinster Entfernung von  $B_1, B_2, B_3$  etc. ist, nothwendig zugleich der Mittel - Punkt der Entfernungen von  $E_1, E_2, E_3$  etc. seyn muß; wie behauptet wird.

Umgekehrt, wenn der Punct  $M$  der Mittel-Punct der Entfernungen gleich weit von ihm entfernter Puncte  $E_1, E_2, E_3, \dots$  ist, so muß

${}^1p + {}^2p + {}^3p + \dots = 0$  und  ${}^1q + {}^2q + {}^3q + \dots = 0$  seyn (§. 222.). Also ist auch

$$\frac{{}^1p}{r} + \frac{{}^2p}{r} + \frac{{}^3p}{r} + \dots = 0 \text{ und } \frac{{}^1q}{r} + \frac{{}^2q}{r} + \frac{{}^3q}{r} + \dots = 0.$$

Nun ist für beliebige Puncte  $B_1, B_2, B_3$  etc., die in den Linien  $ME_1, ME_2, ME_3, \dots$  liegen, wenn ihre Coordinaten  $p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3$  etc. sind, zu Folge (12.)  $\frac{p_1}{r_1} = \frac{{}^1p}{r}, \frac{q_1}{r_1} = \frac{{}^1q}{r}, \frac{p_2}{r_2} = \frac{{}^2p}{r}$  etc.; also ist alsdann für diese Puncte  $B_1, B_2, B_3$  etc.

$$\frac{p_1}{r_1} + \frac{p_2}{r_2} + \frac{p_3}{r_3} + \dots = 0 \text{ und}$$

$$\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \dots = 0.$$

Dieses sind die Bedingungs-Gleichungen (10. und 11.) für einen Punct kleinster Entfernung. Also ist der Punct  $M$ , wenn er der Mittel-Punct der Entfernungen für gleich weit von ihm abstehende Puncte  $E_1, E_2, E_3, \dots$  ist, allemal zugleich der Punct kleinster Entfernung für beliebige, in den Linien  $ME_1, ME_2, ME_3$  etc. liegende Puncte  $B_1, B_2, B_3$  etc.; welches der umgekehrte Satz ist.

## 229.

**Zusätze. I.** Ein Punct kleinster Entfernung für die Eck-Puncte eines beliebigen Vielecks ist zugleich der Punct kleinster Entfernung für die Ecken jedes andern beliebigen Vielecks, in so fern seine Ecken nur mit den vorigen und ihrem Puncte kleinster Entfernung in graden Linien liegen. Z. B. wenn  $M$  in (Fig. 128.) für die Ecken  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  der Punct kleinster Entfernung ist, so ist er es auch für die Puncte  ${}_1B, {}_2B, {}_3B, {}_4B, {}_5B$  und  ${}_6B$ . Denn diese zweiten Puncte erfüllen die nemlichen Bedingungen wie die ersten.

**II.** Wenn in einem Vieleck ein Punct möglich ist, aus welchem Linien nach den Ecken mit einander gleich große Winkel machen, so ist dieser Punct ein Punct kleinster Entfernung der Ecken.

Denn nimmt man alsdann in den Linien nach den Ecken, z. B.  $MB_1, MB_2$  etc. (Fig. 128.) gleich große Entfernungen  $ME_1 = ME_2 = ME_3$  etc. an, so sind  $E_1, E_2, E_3$  etc. die Ecken eines regelmäßigen Vielecks, weil dann die Dreiecke  $E_1ME_2, E_2ME_3$  etc. alle gleich sind. Für dieses regelmäßige Vieleck  $E_1E_2E_3$  etc. ist aber der Punct  $M$  der Mittel-Punct der Entfernungen, weil er der Mittelpunkt der Ecken und Seiten ist (§. 225. II.); also ist  $M$  auch der Punct kleinster Entfernung von  $B_1, B_2, B_3$  etc. (§. 228.).

**III.** Der Punct kleinster Entfernung für die Ecken eines regelmäßigen Vielecks liegt in dem Mittel-Punct der Ecken und Seiten. Denn dieser letztere ist zugleich der Mittel-Punct der Entfernungen der Ecken (§. 225. II.).

## 230. 231. Vom Punkte kleinster Entfernung.

### 230.

**Lehrsatz.** In jedem Dreieck, dessen Winkel alle kleiner sind als  $\frac{2}{3}\varphi$ , ist ein Punkt, und nur einer möglich, welchem grade Linien nach den Ecken des Dreiecks, mit einander gleiche Winkel machen.

**Beweis.**  $ABC$  (Fig. 129.) sey das Dreieck. Ueber einer  $AB$  Seiten sey  $DM = DE = \frac{1}{2}BM$  und  $BD = DC$ , so ist  $BM = CE = EB = ME$ . Also sind die Dreiecke  $BME$  und  $CME$  gleich und gleichseitig; folglich sind die Winkel  $DMC$  und  $DME$  jeder gleich  $\frac{2}{3}\varphi$ , und folglich ist der Winkel  $BMC$  gleich  $\frac{4}{3}\varphi$ . mögen die Dreiecke  $BMC$ ,  $BM_1C$ ,  $BM_2C$  etc. sämmtlich einen und denselben Mittel-Punkt der Ecken haben, so sind alle Winkel  $BMC$ ,  $BM_1C$ ,  $BM_2C$  etc. einander gleich, und nur (§. 70.). Sie sind also sämmtlich gleich  $\frac{4}{3}\varphi$ . Nun ist der Winkel  $AMC$ , wenn  $M_1$  in  $B$  fällt, gleich  $ABC$  und wenn  $M$  in  $C$  gleich  $2\varphi$ , also wächst der Winkel  $AMC$ , so wie  $M$  die Punkte  $M_1, M_2$  etc. von  $B$  bis  $C$  durchläuft, von  $ABC$  bis  $2\varphi$ . Ist  $ABC$  nicht größer als  $\frac{4}{3}\varphi$ , so ist nothwendig irgend ein Punkt  $M$  vorhanden, und nur einer, für welchen der Winkel  $AMC$  gleich  $\frac{4}{3}\varphi$  ist, und in diesem Falle ist auch der dritte Winkel  $AMB$  gleich  $\frac{4}{3}\varphi$ , weil die drei Winkel um  $M$  zusammen vier rechte ausmachen. Da nun Alles dieses über jeder Dreiecks-Seite findet, so folgt, daß es, so lange kein Winkel des Dreiecks größer ist als  $\frac{2}{3}\varphi$ , allemal, innerhalb des Dreiecks, einen Punkt  $M$  gibt und nur einen, um welchen die drei Winkel  $AMC$ ,  $BMA$ ,  $BMC$  gleich  $\frac{4}{3}\varphi$  und folglich einander gleich sind.

### 231.

**Lehrsatz.** In jedem Dreiecke, dessen Winkel alle kleiner sind als  $\frac{2}{3}\varphi$ , liegt der Punkt kleinster Entfernung der Ecken innerhalb, und zwar machen die graden Linien aus ihm nach den Ecken mit einander gleiche Winkel. Es giebt es nur einen solchen Punkt. Ist ein Winkel des Dreiecks gleich  $\frac{2}{3}\varphi$ , oder größer als  $\frac{2}{3}\varphi$ , so liegt der Punkt kleinster Entfernung der Ecken in dem Scheitel-Punkt des stumpfen Winkels.

**Beweis.** Zu Folge (§. 230.) giebt es, in jedem Dreiecke, dessen Winkel alle drei kleiner sind als  $\frac{2}{3}\varphi$ , einen Punkt, aus welchem die graden Linien nach den Ecken, mit einander gleiche Winkel machen. Ein solcher Punkt ist aber ein Punkt kleinster Entfernung der Ecken (§. 229. II.); welches das Erste war.

Gäbe es einen zweiten Punkt kleinster Entfernung, so würden die graden Linien aus ihm nach den Ecken mit einander nicht gleiche Winkel machen; denn der Punkte, aus welchen die Linien nach den Ecken mit einander gleiche Winkel machen, giebt es einen (§. 230.). Ein Punkt, aus welchem die Linien nach den Ecken mit einander nicht gleiche Winkel machen, kann aber nicht Mittel-Punkt der Entfernung von Punkten in jenen Linien sein, gleich weit von ihm entfernt sind; denn man lege eine der Coordinaten-Axen in eine der Linien, z. B. die Axe  $MZ$  (Fig. 129)  $BM$ , so daß  $BMZ$  eine grade Linie ist, so sind die Winkel  $AMB$  und  $CMZ$  ungleich, weil es nach der Voraussetzung die Winkel  $AMB$  und  $CMB$  sind. Also können Punkte in  $MA$  und  $MC$  gleich weit von  $M$  entfernt sind, nicht gleich weit von  $MZ$  seyn, und folglich kann  $M$  nicht der Mittel-Punkt der Entfernung

von Punkten in  $MA$ ,  $MB$  und  $MC$  seyn, die von  $M$  gleich weit abstehen. Folglich kann auch  $M$  nicht der Punkt kleinster Entfernung für die Ecken  $A$ ,  $B$  und  $C$  seyn (§. 228.). Mithin giebt es ausser demjenigen Punkt kleinster Entfernung, aus welchem die graden Linien nach den Ecken des Dreiecks mit einander gleiche Winkel machen, keinen andern; welches das Zweite war.

Ist ein Winkel des Dreiecks grösser als  $\frac{1}{2}\pi$ , so giebt es nach (§. 230.) innerhalb des Dreiecks keinen Punkt, aus welchem die graden Linien nach den Ecken mit einander gleiche Winkel machen. Also kann auch der Punkt kleinster Entfernung der Ecken nicht innerhalb des Dreiecks liegen. Aber auch nicht ausserhalb. Denn wo auch der Punkt  $M$  (Fig. 130.) liegen mag: nie kann der grösste Winkel  $BMA$ , welchen zwei grade Linien nach den Ecken einschliessen, grösser als zwei rechte seyn, weil sonst  $M$  innerhalb des Dreiecks liegen müßte. Ein solcher Punkt aber kann nie der Mittel-Punkt der Entfernungen gleich weit von ihm abstehender Punkte in den Linien nach den Ecken seyn; denn ist z. B.  $BMZ$  eine der Coordinaten Axen, so fallen die beiden andern Linien  $MC$  und  $AM$  auf einerlei Seite der Axe, und folglich kann die Summe der Abstände von Punkten in  $MA$  und  $MC$ , die gleich weit von  $M$  entfernt sind, nie Null seyn. Also kann der Punkt kleinster Entfernung nur in einer Ecke des Dreiecks liegen, und zwar in der stumpfen, weil die Summe der Entfernungen zweier Ecken von einer spitzen Ecke, wie leicht zu sehen, grösser ist, als die der Entfernung zweier Ecken von der stumpfen; welches das Dritte war.

## 232.

*Lehrsatz.* Ein Punkt kleinster Entfernung der Ecken eines Vierecks ist der Durchschnitts-Punkt der Diagonalen.

*Beweis.* Denn dieser Punkt ist der Mittel-Punkt der Entfernungen von gleich weit von ihm abstehenden Punkten in den Diagonalen, wie leicht zu sehen, wenn man eine der Coordinaten-Axen in die eine Diagonal legt\*).

## Von den Gleichungen der Linien, besonders der graden und ihrer Durchschnitte.

### Von den Gleichungen der Linien im Allgemeinen.

## 233.

*Erklärung.* Wenn die Lage beliebiger Punkte gegen feste Coordinaten-Axen, das heisst, gegen grade Linien, die sich unter einem bestimmten Winkel schneiden, und die für alle die Punkte, welche man in Betracht ziehen will, die nemlichen sind, durch Coordinaten unter dem Winkel der Axen (§. 64.), z. B. durch recht-

---

\*) Die Sätze von dem Punkte kleinster Entfernung finden öfter Anwendung. Wenn man z. B. denjenigen Ort sucht, aus welchem die Summe der Wege nach gegebenen Orten die möglich-kleinste ist, so sucht man den Punkt kleinster Entfernung dieser Orte.

winklige Coordinaten, gegeben ist, so sollen die verschiedenen Punkte, um sie von einander zu unterscheiden, durch ihre Coordinaten selbst bezeichnet werden. Z. B. wenn die rechtwinkligen Coordinaten des Punkts M (Fig. 131.)  $AB = CM = x$  und  $BM = AC = y$  sind, so soll der Punct M durch Punct (xy) bezeichnet werden. Sind die Coordinaten des Punkts N,  $AD = EN = p$  und  $DN = AE = q$ , so soll der Punct N durch Punct (pq) bezeichnet werden u. s. w.

## 234.

**Erklärung.** Da einzelne Punkte ganze Linien bestimmen, z. B. zwei Punkte eine grade Linie, indem durch zwei Punkte nur eine grade Linie möglich ist (§. 11.), so sind Linien gegeben, wenn man die Lage derjenigen Zahl von Punkten kennt, durch welche nur eine solche Linie möglich ist.

Wenn aber umgekehrt die Lage von Linien gegeben ist, so sind die Coordinaten aller Punkte der Linien unter einander in einem gewissen gleichförmigen Zusammenhange, der sich nach der Gestalt und den Eigenschaften der Linien richtet. Die Gleichung, welche diesen wechselseitigen Zusammenhang der Coordinaten aller Punkte einer gegebenen Linie ausdrückt, heisst Gleichung der Linie. Die Zeichen für die Coordinaten, welche darin nothwendig vorkommen, können jeden beliebigen Werth haben, während vielleicht andere Linien, die sich mit den Coordinaten nicht ändern, immer denselben Werth behalten. Die Coordinaten sind also alsdann veränderliche, die gleichbleibenden Linien unveränderliche, oder beständige Größen. Letztere heissen auch, in so fern von ihnen nicht blos die Lage, sondern die unterscheidenden Eigenschaften der Linie abhängen, Parameter. Der Grad der Gleichung wird nach den veränderlichen Größen, also nach den Coordinaten, nicht nach den beständigen Linien, oder Parametern gemessen. Kommen also die Coordinaten nicht mit einander oder mit sich selbst multiplicirt vor, so heisst die Gleichung der Linie vom ersten Grade. Kommen die zweiten Potestäten der Coordinaten und ihre Producte zu zweien vor, so heisst die Gleichung der Linie vom zweiten Grade. Kommen die Coordinaten als drei Factoren vor, so heisst die Gleichung der Linie vom dritten Grade u. s. w.

Die Linien selbst heissen, je nachdem ihre Gleichungen vom ersten, zweiten, dritten etc. Grade sind, von der ersten, zweiten, dritten etc. Ordnung.

### Von den Gleichungen der graden Linie insbesondere.

## 235.

**Lehrsatz.** Die Gleichung jeder graden Linie ist vom ersten Grade und folglich von der Form

$$x + my = a, \text{ oder}$$

$$y + kx = b.$$

Die rechtwinkligen Coordinaten beliebiger Punkte der graden Linie bezeichnen  $x$  und  $y$ ;  $m$  und  $k$  sind Zahlen, die sich nach der Neigung der graden Linie gegen die Axen richten, und welche gleich Null sind, je nachdem die Linie mit einer oder der andern Axe

parallel läuft;  $a$  und  $b$  sind die Entfernungen vom Anfangs-Puncte der Coordinaten, in welchen die grade Linie die Axen der  $x$  und der  $y$  schneiden kann. Schneidet sie beide Axen, so ist  $m = \frac{a}{b}$  und  $k = \frac{b}{a}$ .

**Beweis.** Die durch eine Gleichung auszudrückende grade Linie kann gegen die Coordinaten-Axen verschiedene Lagen haben.

1. Sie kann beide Axen irgendwo, aufserhalb ihres Durchschnitts oder aufserhalb des Anfangs-Punctes der Coordinaten schneiden.

2. Sie kann eine Axe aufserhalb des Anfangs-Punctes der Coordinaten schneiden, also mit der andern Axe parallel seyn.

3. Oder sie kann durch den Durchschnitts-Punct der Axen, oder durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen.

Von diesen drei Lagen sind wieder verschiedene Fälle möglich, die sich durch die Lage der Durchschnittspuncte der Linie und der Axen, oder auch durch die Neigung der Linie gegen die Axen unterscheiden.

Die Axe der Abscissen, oder der  $x$ , sey  $XAP$  (Fig 132.) die Axe der Ordinaten, oder der  $y$ , sey  $YAQ$ , die Entfernungen der Durchschnitts-Puncte der auszudrückenden grade Linie und der Axen der  $x$  und  $y$ , von dem Anfangs-Puncte der Coordinaten, sollen  $a$  und  $b$  seyn; was rechts von  $YAQ$  und über  $XAP$  liegt, soll positiv, was links von  $YAQ$  und unter  $XAP$  liegt, soll negativ seyn. Alsdann sind die Fälle folgende.

#### Erste Lage.

1ster Fall. Die auszudrückende grade Linie sey  $B_1C_1D_1E_1$ , so ist  $AD_1 = a$  positiv und  $AC_1 = b$  positiv.

2ter Fall. Die grade Linie sey  $B_2C_2D_2E_2$ , so ist  $AD_2 = a$  negativ und  $AC_2 = b$  positiv.

3ter Fall. Die grade Linie sey  $B_3C_3D_3E_3$ , so ist  $AD_3 = a$  positiv und  $AC_3 = b$  negativ.

4ter Fall. Die grade Linie sey  $B_4C_4D_4E_4$ , so ist  $AD_4 = a$  negativ und  $AC_4 = b$  negativ.

#### Zweite Lage.

1ster Fall. Die grade Linie sey  $B_5C_5E_5$ , so ist  $a$  unendlich groß, weil die Linie die mit ihr parallele Axe  $XAP$  nirgend erreicht, und  $AC_5 = b$  ist positiv.

2ter Fall. Die grade Linie sey  $B_6C_6E_6$ , so ist wieder  $a$  unendlich groß, und  $AC_6 = b$  ist negativ.

3ter Fall. Die grade Linie sey  $B_7D_7E_7$ , so ist  $b$  unendlich groß, und  $AD_7 = a$  ist positiv.

4ter Fall. Die grade Linie sey  $B_8D_8E_8$ , so ist  $b$  unendlich groß, und  $AD_8 = a$  ist negativ.

#### Dritte Lage.

1ster Fall. Die grade Linie sey  $B_9AE_9$ , so ist  $a = 0$  und  $b = 0$ .

2ter Fall. Die grade Linie sey  $B_{10}AE_{10}$ , so ist ebenfalls  $a = 0$  und  $b = 0$ .

In einer dieser Lagen und in einem der verschiedenen Fälle mufs die auszudrückende grade Linie immer seyn.

Für alle Lagen und Fälle kann aber die Abhängigkeit der Coordinaten beliebiger Punkte der graden Linie, immer durch eine und dieselbe Gleichung ausgedrückt werden.

Man nehme den ersten Fall der ersten Lage,  $B_1 C_1 D_1 E_1$  und beliebige Punkte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  etc. der auszudrückenden Linie an. Sind aus diesen Punkten  $M_1 P_1, M_2 P_2$  etc. auf  $XAP$  und  $M_1 Q_1, M_2 Q_2$  etc. auf  $YAQ$  senkrecht, so sind alle die Dreiecke  $M_1 P_1 D_1, M_2 P_2 D_1, M_3 P_3 D_1, M_4 P_4 D_1$  etc. und alle die Dreiecke  $M_1 Q_1 C_1, M_2 Q_2 C_1, M_3 Q_3 C_1, M_4 Q_4 C_1$  etc. ähnlich. Also ist

$$\frac{M_1 P_1}{D_1 P_1} = \frac{M_2 P_2}{D_1 P_2} = \frac{M_3 P_3}{D_1 P_3} = \frac{M_4 P_4}{D_1 P_4} \dots \text{ und}$$

$$\frac{M_1 Q_1}{C_1 Q_1} = \frac{M_2 Q_2}{C_1 Q_2} = \frac{M_3 Q_3}{C_1 Q_3} = \frac{M_4 Q_4}{C_1 Q_4} \dots$$

Nun werden aber alle die Linien  $AP_1, AP_2, AP_3, AP_4$  etc. durch das veränderliche  $x$  und alle die Linien  $AQ_1, AQ_2, AQ_3, AQ_4$  etc. durch das veränderliche  $y$  ausgedrückt. Also werden alle die Linien  $D_1 P_1, D_1 P_2, D_1 P_3$  etc. durch  $a - x$  und alle die Linien  $C_1 Q_1, C_1 Q_2, C_1 Q_3, C_1 Q_4$  etc. durch  $b - y$  ausgedrückt. Also haben die Quotienten

$$\frac{y}{a-x} \text{ und } \frac{x}{b-y}$$

für alle mögliche Punkte der auszudrückenden Linie die nemliche Gröfse. Bezeichnet man also  $\frac{y}{a-x}$  etwa durch

$k$  und  $\frac{x}{b-y}$  durch  $m$ ; so ist für alle Punkte der Linie  $B_1 C_1 D_1 E_1$ ,

$$\frac{y}{a-x} = k \text{ und } \frac{x}{b-y} = m,$$

woraus  $y = ak - xk$  und  $x = bm - ym$ , oder

$$x + my = a \text{ und } y + kx = b$$

folgt.

Diese Gleichungen passen nun für jede Lage der auszudrückenden Linie.

Schneidet die Linie beide Axen, so ist blos, wie oben aufgezählt,  $a$  und  $b$  positiv oder negativ.

Schneidet die Linie nur die Axe der  $x$ , wie  $B_7 D_7 E_7$ , oder  $B_8 D_8 E_8$ , so ist  $m = 0$ , weil alsdann  $b$  unendlich groß ist. Also ist blos

$$x = a;$$

wie es auch die Figur zeigt, denn die Perpendikel aus allen Punkten der Linie auf  $YAQ$  sind alsdann gleich  $a$ .

Schneidet die Linie nur die Axe der  $y$ , wie  $B_6 C_6 E_6$ , oder  $B_9 C_9 E_9$ , so ist  $k = 0$ , weil alsdann  $a$  unendlich groß ist. Also ist alsdann blos

$$y = b;$$

wie es wiederum die Figur zeigt, weil alsdann die Perpendikel aus allen Punkten der Linie auf  $XAP$ , gleich  $b$  sind.

Geht die Linie durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, so sind  $a$  und  $b$  gleich Null, und es ist

$$x + my = 0 \text{ oder } y + kx = 0.$$



Dafs endlich  $m = \frac{b}{a}$  und  $k = \frac{a}{b}$  ist, wenn die Linie beide Axen schneidet, folgt, wenn man in die Gleichungen  $x + my = a$  und  $y + kx = b$  die Werthe  $\frac{y}{a-x}$  von  $k$  und  $\frac{x}{b-y}$  von  $m$  setzt.

Dieses giebt  $x + \frac{x}{b-y} \cdot y = a$  und  $y + \frac{y}{a-x} \cdot x = b$ , oder  $bx - xy + xy = ab - ay$  und  $ay - xy + xy = ab - bx$ , oder  $bx + ay = ab$  und  $ay + bx = ab$ , oder  $x + \frac{a}{b} y = a$  und  $y + \frac{b}{a} x = b$ . Zieht man davon die Gleichungen  $x + my = a$  und  $y + kx = b$  ab, so findet man  $\frac{a}{b} y - my = 0$  und  $\frac{b}{a} x - kx = 0$ , also

$$m = \frac{a}{b} \text{ und } k = \frac{b}{a}.$$

Auch folgt solches unmittelbar aus der Figur. Denn unter den gleichen Quotienten  $\frac{M_1 P_1}{D_1 P_1}$ ,  $\frac{M_2 P_2}{D_2 P_2}$  etc., oder  $\frac{y}{a-x}$ , und  $\frac{M_1 Q_1}{C_1 Q_1}$ ,  $\frac{M_2 Q_2}{C_2 Q_2}$  etc., oder  $\frac{x}{b-y}$ , welche gleich  $k$  und  $m$  gesetzt wurden, gehören auch die,  $\frac{C_1 A}{D_1 A} = \frac{b}{a}$ , für  $y = b$  und  $x = 0$ , und  $\frac{D_1 A}{C_1 A} = \frac{a}{b}$ , für  $x = a$  und  $y = 0$ ; also ist auch  $k = \frac{b}{a}$  und  $m = \frac{a}{b}$ ; wie vorhin.

236.

**Zusätze.** I. Wenn eine grade Linie beide Axen schneidet und also die Gleichung

$$x + \frac{a}{b} y = a \text{ oder } y + \frac{b}{a} x = b$$

hat, ist diese Gleichung auch, wenn man mit  $b$  oder  $a$  multiplicirt,  $bx + ay = ab$ .

Oder auch

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

wenn man mit  $a$  oder  $b$  dividirt.

Schneidet aber die Linie nur eine Axe, oder geht sie durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, so muß man bei den Gleichungen  $x + my = a$  oder  $y + kx = b$ , welche allgemein, für alle Fälle passen, bleiben, weil alsdann  $a$  und  $b$  unendlich groß oder Null, und also die Gleichungen in der Form  $bx + ay = ab$  und  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$  unbestimmt sind.

II. Die Größen  $a$  und  $b$ , so wie auch  $k$  und  $m$  in den Gleichungen einer graden Linie,

$$x + my = a \text{ und } y + kx = b$$

waren diejenigen, welche für alle  $x$  und  $y$ , oder für alle Punkte der Linie, wo sie immer liegen mögen, dieselben bleiben. Sie

sind also unveränderliche Gröſſen von bestimmtem Werthe, im Gegensatz zu den veränderlichen Coordinaten  $x$  und  $y$ , welche beliebige Werthe haben können.

III. Verschiedene grade Linien unterscheiden sich nur durch die unveränderlichen Gröſſen  $a$ ,  $b$ ,  $k$  und  $m$ ; denn die Form der Gleichungen ist für alle dieselbe, und  $x$  und  $y$  können die Coordinaten, sowohl der einen als der andern, bezeichnen. Will man also verschiedene grade Linien durch Gleichungen ausdrücken, so kann solches etwa durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x + m_1 y &= a_1, \text{ oder } y + k_1 x = b_1, \\ x + m_2 y &= a_2, \text{ oder } y + k_2 x = b_2, \\ x + m_3 y &= a_3, \text{ oder } y + k_3 x = b_3, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

geschehen, wo  $m_1, k_1, a_1, b_1; m_2, k_2, a_2, b_2$  etc. die unveränderlichen Gröſſen oder Parameter der verschiedenen Linien sind.

## 237.

**Lehrsatz.** Wenn zwei beliebige grade Linien, deren Gleichungen

$$\begin{aligned} x + m_1 y &= a_1, \text{ oder } y + k_1 x = b_1 \text{ und} \\ x + m_2 y &= a_2, \text{ oder } y + k_2 x = b_2 \end{aligned}$$

sind, mit einander parallel seyn sollen, so ist

$$m_1 = m_2 \text{ und } k_1 = k_2 \text{ und } a_2 b_1 = a_1 b_2.$$

**Beweis.** Die rechtwinkligen Dreiecke unter den beiden Linien für gleiche Coordinaten sind ähnlich, weil die Linien parallel seyn sollen, z. B. für die beiden parallelen Linien  $C_1 D_1$  und  $C_2 D_2$  (Fig. 133.) die Dreiecke  $M_1 P_1 D_1$  und  $M_2 P_2 D_2$ . Also ist

$$\frac{y}{a_1 - x} = \frac{y}{a_2 - x}, \text{ oder } k_1 = k_2 \text{ und}$$

$$\frac{y}{b_1 - y} = \frac{x}{b_2 - y}, \text{ oder } m_1 = m_2;$$

oder auch, weil  $k_1 = \frac{b_1}{a_1}$ ,  $k_2 = \frac{b_2}{a_2}$  und  $m_1 = \frac{a_1}{b_1}$ ,  $m_2 = \frac{a_2}{b_2}$  ist

(§. 235. u. 236.),  $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ , oder  $a_2 b_1 = a_1 b_2$ .

## 238.

**Lehrsatz.** Wenn zwei beliebige grade Linien, deren Gleichungen

$$\begin{aligned} x + m_1 y &= a_1, \text{ oder } y + k_1 x = b_1 \text{ und} \\ x + m_2 y &= a_2, \text{ oder } y + k_2 x = b_2 \end{aligned}$$

sind, auf einander senkrecht stehen sollen, so ist

$$k_1 k_2 = -1, m_1 m_2 = -1 \text{ und } a_1 a_2 = -b_1 b_2; \text{ auch}$$

$$m_1 - m_2 = k_1 - k_2$$

und ihre Gleichungen sind

$$\begin{aligned} y + m_1 y &= a_1 \text{ und } x - k_1 y = a_2, \\ \text{oder } y + k_1 x &= b_1 \text{ und } y - m_1 x = b_2. \end{aligned}$$

**Beweis.** Die rechtwinkligen Dreiecke, unter den beiden Linien, für gleiche Coordinaten, sind in entgegengesetzter Lage ähnlich, z. B. für die beiden auf einander senkrechten Linien  $C_1 D_1$  und  $M_2 D_2$  (Fig. 133.), die Dreiecke  $M_1 P_1 D_1$  und  $M_2 P_2 D_2$ ,

und zwar so, daß  $\frac{M_3 P_3}{P_3 D_1} = \frac{D_3 P_3}{M_3 P_3}$ . Da nun  $\frac{M_3 P_3}{P_3 D_1} = \frac{y}{a_1 - x} = k_1$  und  $\frac{D_3 P_3}{M_3 P_3} = \frac{x - a_2}{y} = -\frac{a_2 - x}{y} = -\frac{1}{k_2}$  ist, so ist  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ , oder  $k_1 k_2 = -1$ . Eben so ist  $m_1 m_2 = -1$ . Ferner ist, weil  $k_1 = \frac{b_1}{a_1}$ ,  $k_2 = \frac{b_2}{a_2}$  (§. 235. 236.) und  $k_1 k_2 = -1$  war,  $\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} = -1$ ; also  $a_1 a_2 = -b_1 b_2$ . Desgleichen ist

$$m_1 - m_2 = m_1 + \frac{1}{m_1} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{a_1}$$

$$\text{und } k_1 - k_2 = k_1 + \frac{1}{k_1} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{a_1}{b_1}.$$

Also ist  $m_1 - m_2 = k_1 - k_2$ . Nun ist wegen  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$  und  $k_1 m_1 = 1$ ,  $m_2 = -k_1$ . Also wenn die Gleichung der ersten Linie  $x + m_1 y = a_1$  ist, so ist die Gleichung der zweiten,  $x - k_1 y = a_2$ . Eben so, wenn die Gleichung der ersten Linie  $y + k_1 x = b_1$  ist, so ist die Gleichung der zweiten  $y - m_1 x = b_2$ .

## 239.

**Lehrsatz.** Wenn zwei beliebige grade Linien, deren Gleichungen

$$x + m_1 y = a_1, \text{ oder } y + k_1 x = b_1 \text{ und}$$

$$x + m_2 y = a_2, \text{ oder } y + k_2 x = b_2$$

sind, einander unter beliebigem Winkel schneiden, und man bezeichnet die Coordinaten ihrer Durchschnittspuncte durch p und q, so ist

$$p = \frac{b_1 - b_2}{k_1 - k_2} \text{ und } q = \frac{a_1 - a_2}{m_1 - m_2}.$$

Stehen die Linien zugleich auf einander senkrecht, so ist

$$\frac{p}{q} = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}.$$

**Beweis.** In dem Durchschnittspuncte sind die Coordinaten zweier Linien die nemlichen. Also ist für diesen Punct, sowohl in den Gleichungen der ersten, als in den Gleichungen der zweiten Linie,  $x = p$  und  $y = q$ ; folglich ist

$$p + m_1 q = a_1, \text{ oder } q + k_1 p = b_1 \text{ und}$$

$$p + m_2 q = a_2, \text{ oder } q + k_2 p = b_2.$$

Zieht man diese Gleichungen von einander ab, so erhält man

$$(m_1 - m_2)q = a_1 - a_2 \text{ und } (k_1 - k_2)p = b_1 - b_2,$$

also

$$p = \frac{b_1 - b_2}{k_1 - k_2} \text{ und } q = \frac{a_1 - a_2}{m_1 - m_2};$$

welches das Erste war.

Es folgt daraus  $\frac{p}{q} = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \cdot \frac{m_1 - m_2}{k_1 - k_2}$ . Sollen nun die beiden Linien auf einander senkrecht stehen, so ist zu Folge (§. 238.)  $m_1 - m_2 = k_1 - k_2$ , also alsdann

$$\frac{p}{q} = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2};$$

welches das Zweite war.

## 240.

**Lehrsatz.** Soll eine grade Linie, deren Gleichung  
 $x + my = a$ , oder  $y + kx = b$   
 ist, durch einen bestimmten Punkt gehen, dessen Coordinaten  $p$  und  $q$  sind, so ist ihre Gleichung  
 $x - p + m(y - q) = 0$ , oder  $y - q + k(x - p) = 0$ ,  
 oder auch, wenn die Linie beide Axen schneidet,  
 $(y - q)a + (x - p)b = 0$ ,  
 und es folgt daraus, wie gehörig, daß durch einen einzelnen Punkt unzählige verschiedene grade Linien gehen können.

**Beweis.** Da der Punkt  $(pq)$  in der Linie liegen soll, so ist auch für ihn, vermöge der Gleichung der Linie:

$$p + mq = a, \text{ oder } q + kp = b.$$

Zieht man diese Gleichung von der Gleichung der Linie ab, so findet man

$$x - p + m(y - q) = 0, \text{ oder } y - q + k(x - p) = 0,$$

oder auch, weil  $k = \frac{b}{a}$  und  $m = \frac{a}{b}$  ist,

$$x - p + \frac{a}{b}(y - q) = 0, \text{ oder } y - q + \frac{b}{a}(x - p) = 0, \text{ oder} \\ (y - q)a + (x - p)b = 0;$$

wie behauptet wird.

Da sich übrigens die zwey Gröfsen  $a$  und  $b$ , welche die Lage der Linie bestimmen, oder  $m$  und  $k$ , aus dieser einen Gleichung nicht finden lassen, so bleiben sie willkührlich, und folglich können unzählige verschiedene Linien, alle durch den Punkt  $(pq)$  gehen.

## 241.

**Lehrsatz.** Soll eine grade Linie, deren Gleichung  
 $x + my = a$ , oder  $y + kx = b$   
 ist, durch zwei bestimmte Punkte gehen, deren Coordinaten  $p_1q_1$  und  $p_2q_2$  sind, so ist

$$a = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{q_1 - q_2}, \quad b = \frac{p_1q_2 - p_2q_1}{p_1 - p_2},$$

$$k = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}, \quad m = \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1},$$

und die Gleichung der Linie ist

$$(p_1 - p_2)y + (q_2 - q_1)x = p_1q_2 - p_2q_1.$$

Da  $a$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $m$  völlig durch  $p_1q_1$ ,  $p_2q_2$  bestimmt werden, so folgt daraus, wie gehörig, daß durch zwei gegebene Punkte nur eine grade Linie gehen kann.

**Beweis.** Da die beiden Punkte  $(p_1q_1)$  und  $(p_2q_2)$  in der Linie liegen sollen, so ist auch für sie, vermöge der Gleichung der Linie:

$$p_1 + mq_1 = a, \text{ oder } q_1 + kp_1 = b \text{ und} \\ p_2 + mq_2 = a, \text{ oder } q_2 + kp_2 = b.$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab, so erhält man

$$p_1 - p_2 + m(q_1 - q_2) = 0 \text{ und } q_1 - q_2 + k(p_1 - p_2) = 0.$$

Daraus folgt

$k = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$ ,  $m = \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1}$ , wie oben. Ferner, weil z. B.  $p_1 + mq_1 = a$  und  $q_1 + kp_1 = b$  war,

$$p_1 + \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} q_1 = a \text{ und } q_1 + \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2} p_1 = b,$$

oder

$$\frac{p_1 q_2 - p_1 q_1 + p_1 q_1 - p_2 q_1}{q_2 - q_1} = a \text{ und } \frac{q_1 p_1 - q_1 p_2 + q_2 p_1 - q_1 p_1}{p_1 - p_2} = b,$$

oder

$$\frac{p_2 q_1 - p_1 q_1}{q_1 - q_2} = a \text{ und } \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{p_1 - p_2} = b, \text{ wie oben.}$$

Desgleichen, wenn man z. B. die Ausdrücke von  $m$  und  $a$  in die Gleichung der Linie  $x + my = a$  setzt,

$$x + \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} y = \frac{p_2 q_1 - p_1 q_2}{q_1 - q_2}, \text{ oder}$$

$$(p_1 - p_2) y + (q_2 - q_1) x = p_1 q_2 - p_2 q_1, \text{ wie oben.}$$

242.

**Zusätze.** I. In (Fig. 134.) wo  $M_1$  und  $M_2$  die beiden gegebenen Punkte seyn mögen, durch welche die grade Linie  $B_1 E_1$  gehen soll, ist die Fläche des Dreiecks  $M_2 A M_1$  gleich

Dreieck  $M_2 A P_2$  + Trapez  $P_2 M_2 M_1 P_1$  - Dreieck  $M_1 A P_1$ , oder  
 $\Delta M_2 A M_1 = \frac{1}{2} p_2 q_2 + \frac{1}{2} (p_1 - p_2) (q_1 + q_2) - \frac{1}{2} p_1 q_1$ , oder  
 $\Delta M_2 A M_1 = \frac{1}{2} (p_2 q_2 + p_1 q_1 + p_1 q_2 - p_2 q_1 - p_2 q_2 - p_1 q_1)$ , oder  
 $\Delta M_2 A M_1 = \frac{1}{2} (p_1 q_2 - p_2 q_1)$ .

Ferner ist das Rechteck  $P_2 M_1 = (p_1 - p_2) y$  und das Rechteck  $Q_1 M_2 = (q_2 - q_1) x$ . Nun ist vermöge der Gleichung der Linie  $B_1 E_1$ ,

$$(p_1 - p_2) y + (q_2 - q_1) x = p_1 q_2 - p_2 q_1.$$

Also folgt, dass die Summe der Rechtecke  $P_2 M_1$  und  $Q_1 M_2$  für beliebige Punkte  $M_1$  und  $M_2$  doppelt so groß ist, als das Dreieck  $M_2 A M_1$ .

II. Wenn einer der Punkte, durch welchen eine grade Linie gehen soll, z. B. der Punkt  $(p_1, q_1)$  der Anfangs-Punkt der Coordinaten ist, so ist  $p_1 = 0$  und  $q_1 = 0$ . Also ist alsdann die Gleichung der Linie

$$q_2 x - p_2 y = 0.$$

Es folgt daraus wie gehörig

$$\frac{x}{y} = \frac{p_2}{q_2}.$$

III. Soll eine grade Linie durch einen bestimmten Punkt, z. B.  $(p_1, q_1)$  gehen und mit einer der Axen, z. B. mit der Axe der  $x$  parallel seyn, so ist es soviel als wenn sie durch zwei Punkte geht, deren Ordinaten  $q_1$  und  $q_2$  einander gleich sind. Man muss daher in die Gleichung der Linie (§. 241.)  $q_1 = q_2$  setzen. Dieses giebt  $(p_1 - p_2) y = (p_1 - p_2) q_2$ , also

$$y = q_2,$$

wie gehörig, weil alle Ordinaten der Linie jetzt gleich  $q_2$  sind (wie in §. 235.).

243.

## 243.

**Lehrsatz.** Soll eine grade Linie durch einen bestimmten Punkt (pq) gehen und zugleich auf einer andern, deren Gleichung

$$x + m_2 y = a_2 \text{ oder } y + k_2 x = b_2$$

ist, senkrecht stehen, so ist ihre Gleichung:

$$y - q = m_2 (x - p), \text{ oder } x - p = k_2 (y - q).$$

Die Linie ist durch die Bestimmungs-Stücke  $m_2$  und  $k_2$  der andern Linie und durch die Coordinaten  $p$  und  $q$  des bestimmten Punktes gegeben, und folglich ist nur eine Linie möglich, welche durch einen bestimmten Punkt (pq) geht und zugleich auf einer andern gegebenen Linie senkrecht steht.

Ist der bestimmte Punkt (pq) der Anfangs-Punkt der Coordinaten, so ist  $p = 0$ ;  $q = 0$ ; also ist alsdann die Gleichung der Linie:

$$y = m_2 x \text{ oder } x = k_2 y.$$

**Beweis.** Da die beiden Linien auf einander senkrecht seyn sollen, und die Gleichung der einen  $x + m_2 y = a_2$  oder  $y + k_2 x = b_2$  ist, so ist zu Folge (§. 238.) die Gleichung der andern:

$$x - k_2 y = a_1; \text{ oder } y - m_2 x = b_1.$$

Nun soll aber diese andere Linie auch noch durch den Punkt (pq) gehen, also ist auch für  $x = p$ ,  $y = q$ ,

$$p - k_2 q = a_1; \text{ oder } q - m_2 p = b_1.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man

$$x - p - k_2 (y - q) = 0 \text{ und } y - q - m_2 (x - p) = 0, \text{ oder}$$

$$y - q = m_2 (x - p) \text{ und } x - p = k_2 (y - q);$$

wie behauptet wird.

## 244.

**Lehrsatz.** Soll eine grade Linie durch einen bestimmten Punkt ( $p_1 q_1$ ) gehen und zugleich auf einer andern senkrecht stehen, die durch zwei bestimmte Punkte ( $p_2 q_2$ ) und ( $p_3 q_3$ ) geht, so ist ihre Gleichung:

$$(y - q_1)(q_2 - q_3) = (p_1 - x)(p_2 - p_3).$$

Ist der Punkt ( $p_1 q_1$ ) der Anfangs-Punkt der Coordinaten, so ist  $p_1 = 0$ ;  $q_1 = 0$ , also alsdann die Gleichung der Linie:

$$y(q_2 - q_3) = x(p_2 - p_3).$$

Ist einer der beiden andern Punkte, z. B. der Punkt ( $p_3 q_3$ ) der Anfangs-Punkt der Coordinaten, so ist  $p_3 = 0$ ,  $q_3 = 0$  und also die Gleichung der Linie in diesem Fall

$$(y - q_1)q_2 = (p_1 - x)p_2, \text{ oder}$$

$$yq_2 + xp_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2.$$

**Beweis.** Die Gleichung der Linie, welche durch die beiden Punkte ( $p_2 q_2$ ) und ( $p_3 q_3$ ) gehen soll, ist zu Folge (§. 241.)

$$(p_2 - p_3)y + (q_3 - q_2)x = p_2 q_3 - p_3 q_2,$$

oder

$$y + \frac{q_3 - q_2}{p_2 - p_3} x = \frac{p_2 q_3 - p_3 q_2}{p_2 - p_3},$$

oder, wenn man einen Augenblick

$$\frac{q_3 - q_2}{p_2 - p_3} = k_2 \text{ und } \frac{p_2 q_3 - p_3 q_2}{p_2 - p_3} = b_2$$

setzt,

$$y + k_2 x = b_2.$$

Soll nun die andere Linie, welche durch den bestimmten Punkt  $(p_1, q_1)$  geht, auf dieser senkrecht stehen, so ist ihre Gleichung zu Folge (§. 243.)

$$x - p_1 = k_2 (y - q_1),$$

also hier

$$x - p_1 = \frac{q_3 - q_2}{p_2 - p_3} (y - q_1),$$

oder  $(y - q_1)(q_2 - q_3) = (p_1 - x)(p_2 - p_3)$ ;  
wie behauptet wird.

## 245.

**Lehrsatz.** Die Länge  $P$  eines Perpendikels aus einem gegebenen Punkte  $(pq)$  auf eine gegebene grade Linie, deren Gleichung

$$x + my = a \text{ oder } y + kx = b$$

ist, ist

$$P = \frac{b - q - kp}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{a - p - mq}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

**Beweis.** Der gegebene Punkt  $(pq)$  sey  $M$  (Fig. 135.), so ist  
der Inhalt des Dreiecks  $AMD = \frac{1}{2}aq$ ,  
der Inhalt des Dreiecks  $AMC = \frac{1}{2}bp$ ,  
der Inhalt des Dreiecks  $CMD = \frac{1}{2}P\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  
der Inhalt des Dreiecks  $CAD = \frac{1}{2}ab$ .

Der Inhalt der drei ersten Dreiecke aber ist dem Inhalte des letzten gleich. Also ist

$$aq + bp + P\sqrt{a^2 + b^2} = ab.$$

Hieraus folgt

$$P = \frac{ab - aq - bp}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b - q - \frac{b}{a}p}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a - p - \frac{a}{b}q}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}},$$

oder weil  $\frac{a}{b} = m$ ,  $\frac{b}{a} = k$  ist (§. 235.),

$$P = \frac{b - q - kp}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{a - p - mq}{\sqrt{1 + m^2}};$$

wie behauptet wird.

## 246.

**Anmerkung.** Diese Sätze reichen hin, die Abschnitte und die Lage sich schneidender grader Linien auch in andern Fällen durch Coordinaten zu finden.

## D r i t t e s   B u c h.

### V o m   K r e i s e.

247.

**E**rk~~l~~ärungen. I. Die von einer Kreislinie umschlossene Fläche heisst **Kreis** (lat. *Circulus*). Die Kreislinie heisst auch **Umfang** des Kreises (*Peripheria*). Die gleichen Entfernungen aller Punkte der Kreislinie von ihrem Mittel-Puncte **M** (Fig. 136.), also die graden Linien  $AM = BM = CM = DM$  etc. heissen **Halbmesser** (*Radii*)\*).

II. Jede grade Linie durch den Mittelpunkt eines Kreises, innerhalb des Kreises, die also dem zwiefachen Halbmesser gleich ist, heisst **Durchmesser** (*Diameter*).

III. Jedes Stück der Kreislinie, oder des Kreis-Umfanges, wie z. B. **AB**, **ABC**, **ABCP** etc. heisst **Kreis-Bogen** (*Arcus*). Der Bogen kann auch grösser seyn als der ganze Umfang, und grösser wie eine beliebige Zahl von Umfängen; ohne Ende. Dann enthält der Bogen einen oder mehrere Umfänge und noch ein Stück des Umfanges dazu, z. B. der Bogen **ABCPAQ** enthält einen ganzen Umfang und noch das Stück **AQ** von dem zweiten.

IV. Jede von einem Kreisbogen und den beiden, durch die Enden des Bogens gehenden Halbmessern eingeschlossene Fläche, wie z. B. **AMB** oder **BMC** etc. heisst **Kreis-Ausschnitt** (*Sector*).

V. Jede grade Linie, welche eine Kreislinie schneidet, wie **EFGH**, **IKLZ** etc. heisst **Schneidende** (*Secans*).

---

\*) Es ist nothwendig, wenigstens diejenigen lateinischen Benennungen beim Kreise zu merken, welche, zum Theil mit deutschen Biegungen, häufig auch statt der deutschen gebraucht werden.



Der innerhalb des Kreises liegende Theil einer Secante, wie  $FG$ ,  $KL$  etc. heisst Sehne (Chorda). Jede Sehne gehört zu zwei Bogen, die zusammen einen oder mehrere Umfänge ausmachen, z. B. die Sehne  $FG$  gehört zu den beiden Bogen  $FNG$  und  $FKSG$ , welche zusammen einen Umfang ausmachen, und zu jedem dieser Bogen kann man noch einen oder mehrere Umfänge hinzugethan sich vorstellen.

Das Perpendikel aus dem Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne, wie  $MX$ , heisst auch Apotome.

VI. Die von einer Sehne und dem zugehörigen Bogen eingeschlossene Fläche, wie z. B. die Fläche  $FNG$ , oder die Fläche  $FDPCG$  heisst Kreis-Abschnitt (Segmentum).

VII. Flächen, welche von zwei Kreisbogen von gleichen oder ungleichen Halbmessern eingeschlossen werden, wie  $YY_1Y_2CB$ , heissen Monden (Lunulae, Menisci).

VIII. Winkel, deren Schenkel zwei Halbmesser sind, und deren Scheitel also im Mittelpunkt des Kreises liegen, wie z. B.  $BMC$ ,  $CMD$  etc. heissen Winkel am Mittelpunkte.

IX. Winkel, deren Schenkel zwei Sehnen sind, und deren Scheitel also im Umfange liegen, wie z. B.  $QRS$ , heissen Winkel am Umfange, und man sagt, der Winkel  $QRS$  stehe auf dem Bogen  $QS$ .

X. Jede grade oder zweite Kreislinte, wie  $\alpha\beta$ ,  $\beta\gamma$ ,  $\gamma\delta$  etc., zwischen welcher und einer Kreislinie keine grade Linie möglich ist, die die Kreislinie nicht zweimal schneidet, heisst Berührende (Tangens), auch wohl die grade Linie ausschliesslich Berührende oder Tangente, die zweite Kreislinie, berührende Kreislinie.

XI. Gradlinige Figuren, deren Endpunkte in einer Kreislinie liegen wie z. B.  $abcd$ , heissen eingeschriebene (inscriptae). Der Halbmesser des Kreises ist also der Halbmesser der Ecken einer eingeschriebenen Figur.

XII. Gradlinige Figuren, wie  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ , deren Seiten Tangenten einer und derselben Kreislinie sind, heissen umschriebene (circumscriptae). Der Halbmesser des Kreises ist also der Halbmesser der Seiten einer umschriebenen Figur.

# I. Von gleichen Kreisen und dem was davon abhängt.

248.

**Lehrsätze.** I. Wenn Kreise gleiche Halbmesser haben, so sind sie gleich.

**Beweis.** Man lege die Mittelpunkte der Kreise in einander, z. B.  $N$  in  $M$  (Fig. 137.), so fällt nothwendig irgend ein Punkt  $B$  der Kreislinie (II.) in einen Punkt  $A$  der Kreislinie (I.), weil die Halbmesser  $BN$  und  $AM$  gleich vorausgesetzt werden. Aber auch kein anderer Punkt der Kreislinie (II.) kann außerhalb der Kreislinie (I.) fallen. Denn gesetzt, der Punkt  $Q$  fiele in  $P$ , außerhalb der Kreislinie (I.), so wären die Entfernungen  $MP$  oder  $QN$  der Entfernung  $AM$  nicht gleich, weil die Entfernungen aller Punkte des Umfanges des Kreises (I.) gleich sind. Es wird aber  $BN = AM$  vorausgesetzt, also auch, weil  $QN = BN$  ist,  $QN = AM$ . Folglich können  $MP$  und  $AM$  nicht ungleich seyn, und folglich kann kein Punkt der Kreislinie (II.) außerhalb der Kreislinie (I.) fallen, sobald man die Mittelpunkte in einander legt, und folglich sind die Kreise gleich, wenn sie gleiche Halbmesser haben.

II. Wenn Kreise gleich sind, so haben sie gleiche Halbmesser.

**Beweis.** Man lege die Umfänge der gleichen Kreise, z. B. (II. und I.) (Fig. 137.) in einander. Gesetzt der Mittelpunkt  $N$  des Kreises (II.) fiele nicht in den Mittelpunkt  $M$  des Kreises (I.), sondern irgend wo anders hin, z. B. in  $Z$ , so sey  $CMZK$  eine grade Linie durch  $M$  und  $Z$ . Da nun alle Halbmesser beider Kreise gleich seyn müssen, so müßte  $CM = MK$  und zugleich  $CZ = ZK$  seyn. Dieses ist unmöglich; denn es ist  $CZ = CM + MZ$  und  $ZK = MK - MZ = CM - MZ$  und es kann nicht  $CM + MZ = CM - MZ$  seyn. Also kann der Mittelpunkt  $N$  nicht außerhalb des Mittelpunkts  $M$  fallen; die beiden Mittelpunkte müssen vielmehr in einander fallen. Dann aber sind die Halbmesser der beiden Kreise gleich; denn sie sind alsdann die Entfernungen einer und derselben Kreislinie von einem und demselben Punkte.

## 249.

**Lehrsätze.** I. *Wenn zwei Kreis-Ausschnitte gleiche Winkel am Mittelpunkte und gleiche Halbmesser haben, so sind sie gleich.*

Z. B. die Ausschnitte  $CME$  und  $EMG$  (Fig. 137.), oder wenn  $CM = DN$ , die Ausschnitte  $CME$  und  $DNF$ , sind gleich, wenn die Winkel  $CME$  und  $EMG$ , oder  $CME$  und  $DNF$  gleich sind.

**Beweis.** Legt man den Winkel  $DNF$  oder  $EMG$  in den Winkel  $CMG$ , so fällt  $D$  in  $C$ ,  $F$  in  $E$ , eben so wohl wie  $E$  in  $C$  und  $G$  in  $E$ . Dann aber müssen auch die Bogen, welche mit den Schenkeln der gleichen Winkel die Ausschnitte einschließen, in einander fallen. Denn da alle Halbmesser des Bogens  $CE$  gleich lang sind, so wäre, wenn irgend ein Punkt der Bogen  $EG$  oder  $DF$  außerhalb des Bogens  $CE$ , etwa in  $P$  fiele, der Halbmesser  $MP$  nach diesem Punkte, dem Halbmesser des Bogens  $CE$  nicht gleich, welches der Voraussetzung entgegen ist, indem auch die Halbmesser der Bogen  $EG$  und  $DF$  alle unter sich und dem Halbmesser des Bogens  $CE$  gleich sind.

Da nun die Schenkel des Winkels und die die Ausschnitte begrenzenden Bogen, also alle Grenzen der Ausschnitte in einander fallen, so sind die Ausschnitte gleich.

II. *Wenn zwei Kreis-Ausschnitte gleiche Bogen haben, so haben sie auch gleiche Halbmesser und gleiche Winkel am Mittelpunkte und sind gleich.*

Z. B. wenn in (Fig. 137.) die Bogen  $DF$  und  $CE$  gleich sind, so sind auch ihre Halbmesser  $DN$  und  $CM$  und die Winkel am Mittelpunkt  $DNF$  und  $CME$  gleich und die Ausschnitte  $DNF$  und  $CME$  selbst sind gleich.

**Beweis.** Man lege den Punkt  $D$  in den Punkt  $C$  und den Bogen  $DF$  in den Bogen  $CE$ , so fällt  $F$  in  $E$ , weil die Bogen gleich seyn sollen. Fiele nun der Mittelpunkt  $N$  des Bogens  $DF$  nicht in den Mittelpunkt  $M$  des Bogens  $CE$ , sondern irgend wo anders hin, z. B. in  $Y$ , so daß  $DN$  in  $CY$ ,  $FN$  in  $EY$  fiele, so wäre  $CY = EY$ , weil die Halbmesser  $DN$  und  $FN$  gleich sind. Da nun auch die Halbmesser  $CM$  und  $EM$  gleich sind, so wären in den beiden Dreiecken  $CYM$  und  $EYM$  alle drei Seiten gleich, nemlich

$$CY = EY, CM = EM \text{ und } YM = YM.$$

Dieses ist unmöglich, weil mit den nemlichen drei Sei-

ten nicht zwei verschiedene Dreiecke existiren. Also kann  $N$  nicht außerhalb  $M$ , sondern muß in  $M$  fallen. Daraus folgt, daß die Halbmesser der beiden gleichen Bogen und ihre Winkel am Mittelpunkte, folglich auch die Ausschnitte  $DNF$  und  $CME$  gleich sind.

## 250.

**Zusätze.** I. Also gehören zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte gleiche Bogen von gleichen Halbmessern,  
II. und zu gleichen Bogen gleiche Halbmesser und gleiche Winkel am Mittelpunct.

III. Jeder Durchmesser eines Kreises theilt ihn und seinen Umfang in zwei gleiche Theile, oder in Halbkreise und Halbe-Umfänge.

Denn der Durchmesser besteht aus zwei Halbmessern, welche unter zwei rechten Winkeln zusammenstoßen. Die Theile vom Kreise zu beiden Seiten eines Durchmessers sind also gleiche Ausschnitte, deren Winkel am Mittelpunkte zwei rechte sind.

IV. Jede grade Linie, die einen Kreis, und folglich seinen Umfang in zwei gleiche Theile theilt, ist ein Durchmesser und geht also durch den Mittelpunct.

Denn zu dem gleichen Halbkreis-Bogen gehören gleiche Winkel am Mittelpunkte. Nun gehören zu dem ganzen Umfange vier rechte Winkel am Mittelpunkte, also zwei rechte zu dem Halbkreise. Also stoßen die Halbmesser aus dem Mittelpunkte nach den Endpunkten der Halbkreise unter zwei rechten Winkeln zusammen, und liegen folglich in einer graden Linie, und zwar im Durchmesser, weil der Mittelpunct in ihm liegt. Sie sind folglich die grade Linie selbst, welche den Kreis halbt, weil zwischen den zwei End-Puncten der gleichen Halbkreisbogen nur eine grade Linie möglich ist (§. 11.). Die halbirende grade Linie ist also ein Durchmesser und geht folglich durch den Mittelpunct.

## 251.

**Lehrsätze.** I. Wenn zwei Kreis-Abschnitte gleiche Sehnen und gleiche Halbmesser haben, so sind sie gleich.

Z. B. wenn in (Fig. 137.) die Sehnen  $CE$  und  $DF$  und die Halbmesser  $CM$  und  $DN$  gleich sind, so sind die Kreis-Abschnitte  $CUE$  und  $DNF$  gleich.

*Beweis.* Weil  $NF = DN$  und  $EM = CM$  ist und  $DN = CM$  seyn soll, so ist in den Dreiecken  $CME$  und  $DNF$ ,  $CM = DN$ ,  $EM = FN$ , desgleichen ist nach der Voraussetzung  $CE = DF$ . Also sind alle drei Seiten in dem einen Dreieck so groß als in dem andern. Folglich sind die Dreiecke  $CME$  und  $DNF$  und mithin auch die Winkel am Mittelpunkte  $CME$  und  $DNF$ , für gleiche Halbmesser  $CM = DN$ , gleich. Zu solchen Winkeln aber gehören gleiche Bogen (§. 250. I.). Also fallen, wenn man die Sehnen  $CE$  und  $DF$  in einander legt, auch die Bogen  $CUE$  und  $DVF$ , mithin alle Grenzen der Kreis-Abschnitte  $CUE$  und  $DVF$  in einander und folglich sind die Abschnitte gleich.

II. Wenn zwei Kreis-Abschnitte gleiche Bogen haben, so haben sie auch gleiche Sehnen und sind gleich. Desgleichen haben sie gleiche Halbmesser und gleiche Winkel am Mittelpunkte.

Z. B. wenn die Bogen  $CUE$  und  $DVF$  gleich sind, so sind auch die Sehnen  $CE$  und  $DF$ , und die Abschnitte  $CUE$  und  $DVF$  gleich, und haben gleiche Halbmesser  $CM = DN$  und gleiche Winkel am Mittelpunkte  $CME = DNF$ .

*Beweis.* Wenn die Bogen  $CUE$  und  $DVF$  gleich sind, so sind auch ihre Sehnen  $CE$  und  $DF$  gleich; denn legt man die Bogen in einander, so fallen ihre End-Punkte in einander und zwischen zwei Punkten ist nur eine grade Linie möglich (§. 11.). Da nun auf diese Weise alle Grenzen der Abschnitte in einander fallen, so sind die Abschnitte gleich. Die Halbmesser der Abschnitte und die Winkel am Mittelpunkte sind gleich, weil die Bogen gleich sind (§. 250. II.).

252.

*Zusatz.* I. Also gehören zu gleichen Sehnen, für gleiche Halbmesser, gleiche Bogen,

II. und zu gleichen Bogen gleiche Sehnen.

253.

*Lehrsätze.* I. Wenn eine grade Linie auf einer Sehne senkrecht steht und sie halbt, so halbt sie auch die zu der Sehne gehörigen beiden Bogen und ist ein Durchmesser des Kreises.

Z. B. wenn  $DE$  (Fig. 138.) auf  $AB$  senkrecht und  $AO = EB$  ist, so sind auch die Bogen  $AD$ ,  $BD$  und

$ARE$ ,  $BSE$  gleich und  $DE$  geht durch den Mittelpunkt des Kreises  $M$ .

*Beweis.* Da  $AC = CB$  vorausgesetzt wird und die graden Linien  $DC$  und  $EC$  sich selbst gleich sind, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $ACD$ ,  $BCD$  und  $ACE$ ,  $BCE$  gleich; folglich ist  $AD = BD$  und  $AE = BE$ . Da auf diese Weise die Kreis-Abschnitte  $APD$ ,  $BQD$  und  $ARE$ ,  $BSE$  gleiche Sehnen, zugleich aber sämtlich einen und denselben Halbmesser haben, so sind auch die Bogen  $APD$ ,  $BQD$  und  $ARE$ ,  $BSE$  gleich (§. 252. I.); welches das Erste war.

Es sind aber auch die Summen dieser Bogen  $ERAPD$  und  $ESBQD$  gleich. Dieselben sind also Halbkreise, und folglich ist das Perpendikel  $DE$  ein Durchmesser und geht also durch den Mittelpunkt  $M$  (§. 250. IV.).

II. Wenn eine grade Linie einen Kreisbogen und seine Sehne halbt, so steht sie auf der Sehne senkrecht, halbt auch den andern zu der Sehne gehörigen Bogen und ist ein Durchmesser.

Z. B. wenn in (Fig. 158.)  $AC = CB$  ist, und die Bogen  $APD$  und  $BQD$  sind gleich, so steht  $DC$  auf  $AB$  senkrecht; ferner sind auch die Bogen  $ARE$  und  $BSE$  gleich und die grade Linie  $DCE$  geht durch den Mittelpunkt des Kreises  $M$ .

*Beweis.* Da die Bogen  $APD$  und  $BQD$  gleich seyn sollen, so sind auch ihre Sehnen gleich (§. 252. II.). Mithin sind in den beiden Dreiecken  $ACD$  und  $BCD$  alle drei Seiten in dem einen so groß als in dem andern, nemlich  $AC = BC$ ,  $AD = BD$  und  $DC = DC$ , folglich sind diese Dreiecke gleich. Also sind die Winkel  $DCA$  und  $DCB$  gleich, und folglich, weil  $ACB$  eine grade Linie ist, rechte. Folglich steht  $DC$  auf  $AB$  senkrecht; welches das Erste war.

Da nun auf diese Weise  $DCE$  ein Perpendikel auf die Mitte der Sehne  $AB$  ist, so sind auch, vermöge (I.) die Bogen  $ARE$  und  $BSE$  gleich und  $DCE$  ist ein Durchmesser; welches das Zweite und Dritte war.

III. Wenn eine Sehne von einem Durchmesser halbt wird, so steht dieser Durchmesser auf der Sehne senkrecht und halbt die zu ihr gehörigen beiden Bogen.

Z. B. wenn  $DME$  (Fig. 158.) ein Durchmesser und  $AC = CB$  ist, so steht  $DE$  auf  $AB$  senkrecht und die Bogen  $APD$ ,  $BQD$  und  $ARE$ ,  $BSE$  sind gleich.

*Beweis.* Da die Linie  $DE$  ein Durchmesser ist, so geht sie durch den Mittelpunkt  $M$ . Also sind  $AM$  und  $BM$  Halbmesser, und folglich gleich. Mithin sind in den Dreiecken  $AMC$  und  $BMC$  alle drei Seiten in dem einen so groß als in dem andern, nemlich  $AM = BM$ ,  $AC = BC$ , nach der Voraussetzung, und  $CM = CM$ . Folglich sind diese Dreiecke gleich, und folglich sind bei  $C$  rechte Winkel. Mithin steht  $DE$  auf  $AB$  senkrecht; welches das Erste war.

Da auf diese Weise  $DE$  ein Perpendikel auf die Mitte der Sehne  $AB$  ist, so sind auch, vermöge (I.), die Bogen  $APD$ ,  $BQD$  und  $ARE$ ,  $BSE$  gleich; welches das Zweite war.

IV. Wenn eine grade Linie einen Kreis-Bogen halbt und auf seiner Sehne senkrecht steht, so halbt sie auch die Sehne und den andern zu ihr gehörigen Bogen und ist ein Durchmesser.

Z. B. wenn die Bogen  $APD$  und  $BQD$  (Fig. 138.) gleich sind und die grade Linie  $DCE$  steht auf der Sehne  $AB$  senkrecht, so ist auch  $AC = BC$ , Bogen  $ARE =$  Bogen  $BSE$ , und  $DCE$  ist ein Durchmesser.

*Beweis.* Da die Bogen  $APD$  und  $BQD$  gleich seyn sollen, so sind auch ihre Sehnen  $AD$  und  $BD$  gleich (§. 252. II.). Also ist in den rechtwinkligen Dreiecken  $ACD$  und  $BCD$ ,  $AD = BD$  und  $DC = DC$ . Folglich sind die Dreiecke gleich und es ist  $AC = BC$ ; welches das Erste war.

Da nun auf diese Weise  $DCE$  ein Perpendikel auf die Mitte der Sehne  $AB$  ist, so sind auch, vermöge (I.), die Bogen  $ARE$  und  $BSE$  gleich, und  $DCE$  ist ein Durchmesser.

V. Wenn ein Durchmesser einen Kreisbogen halbt, so halbt er auch seine Sehne, steht auf ihr senkrecht und halbt auch den andern, zu der Sehne gehörigen Bogen.

Z. B. wenn die Bogen  $APD$  und  $BQD$  (Fig. 138.) gleich sind und die grade Linie  $DCE$  ist ein Durchmesser, so sind bei  $C$  rechte Winkel; ferner ist  $AC = BC$ , und auch die Bogen  $ARE$  und  $BSE$  sind gleich.

*Beweis.* Da der Durchmesser  $DCE$  den Umfang des Kreises halbt (§. 250. III.), und die Bogen  $APD$  und  $BQD$  gleich seyn sollen, so sind auch die Bogen  $ARE$  und  $BSE$  gleich, wie behauptet wird.

Da die Bogen  $APD$  und  $BQD$  gleich sind, so sind auch ihre Sehnen  $AD$  und  $BD$  gleich (§. 252. II.). Eben so verhält es sich mit den Sehnen  $AE$  und  $BE$  der gleichen Bogen  $ARE$  und  $BSE$ . Also sind in den Dreiecken  $ADE$  und  $BDE$  alle drei Seiten in dem einen so groß als in dem andern. Folglich sind die Dreiecke, und folglich die Winkel  $ADE$  und  $BDE$  gleich. Dann aber sind die Dreiecke  $ADC$  und  $BDC$  gleich, weil  $AD=BD$ ,  $DC=DC$  und die eingeschlossenen Winkel gleich sind. Also sind bei  $C$  rechte Winkel; welches das Zweite war.

Desgleichen ist  $AC=BC$ ; welches das Dritte war.

VI. Wenn ein Durchmesser eines Kreises auf einer Sehne senkrecht steht, so halbiert er sie und die zu ihr gehörigen Bogen.

Z. B. wenn  $DCE$  (Fig 138.) ein Durchmesser ist und bei  $C$  rechte Winkel sind, so ist  $AC=CB$  und die Bogen  $APD$ ,  $BQD$  und  $ARE$ ,  $BSE$  sind gleich.

*Beweis.* Da  $DCE$  ein Durchmesser seyn soll, so sind  $AM$  und  $BM$  Halbmesser und folglich ist  $AM=BM$ . Mithin sind in den rechtwinkligen Dreiecken  $AMC$  und  $BMC$ ,  $AM=BM$ ,  $CM=CM$ . Also sind die Dreiecke gleich und folglich ist  $AC=BC$ ; welches das Erste war.

Da nun auf diese Weise  $DE$  ein Perpendikel auf die Mitte der Sehne  $AB$  ist, so sind auch, vermöge (I.), die Bogen  $APD$ ,  $BQD$  und  $ARE$ ,  $BSE$  gleich; welches das Zweite war.

## 254.

*Anmerkung.* Die 6 Lehrsätze des vorigen Paragraphs kann man auf folgende Weise in Worten zusammenfassen.

Es kann eine grade Linie:

- 1) die Sehne eines Kreises halbiren;
- 2) auf ihr senkrecht stehen;
- 3) den einen oder den andern, zu der Sehne gehörigen Bogen halbiren;
- 4) ein Durchmesser seyn.

Ist sie in zwei von diesen Fällen, so ist sie auch in den beiden andern.

Da sich zwei Dinge aus viere nicht öfter als sechs Mal auf verschiedene Weise nehmen lassen, so giebt es nicht mehr als die oben abgehandelten sechs Fälle.



## 255.

**Lehrsatz, I.** Gleiche Sehnen eines Kreises sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

**Beweis.** Die Sehne  $AB$  (Fig. 139.) sey der Sehne  $FG$  gleich.  $KM$  sey auf  $AB$  und  $LM$  auf  $FG$  senkrecht, so ist  $AK = \frac{1}{2} AB$  und  $FL = \frac{1}{2} FG$  (§. 253. VI.), weil die graden Linien  $KM$  und  $LM$  durch den Mittelpunkt gehen und folglich Durchmesser sind. Da nun  $AB = FG$  vorausgesetzt wird, so ist auch  $AK = FL$ . Nun sind auch die Halbmesser  $AM$  und  $FM$  gleich. Also sind in den rechtwinkligen Dreiecken  $AMK$  und  $FML$  die Seiten  $AM$ ,  $FM$  und  $AK$ ,  $FL$  gleich. Folglich sind die Dreiecke gleich, und folglich ist  $KM = LM$ ; das heißt: gleiche Sehnen sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

**II.** Gleich weit vom Mittelpunkte entfernte Sehnen sind gleich.

**Beweis.** Wenn die Sehnen  $AB$  und  $FG$  vom Mittelpunkte gleich weit entfernt, und die graden Linien  $MK$  und  $ML$  aus dem Mittelpunkte auf den Sehnen senkrecht sind, so wird vorausgesetzt  $MK = ML$ . Also sind in den rechtwinkligen Dreiecken  $AMK$ ,  $FML$  und  $BMK$ ,  $GML$  die Seiten  $MK$ ,  $ML$  so wie die Seiten  $MA$ ,  $MF$  und  $MB$ ,  $MG$ , als Halbmesser, gleich. Also sind die Dreiecke gleich. Und folglich ist  $AK = FL$ ,  $BK = GL$ , folglich auch  $AK + BK = FL + GL$ , oder  $AB = FG$ ; das heißt: gleich weit vom Mittelpunkt entfernte Sehnen sind gleich.

## 256.

**Lehrsatz.** Der Durchmesser eines Kreises ist die größte seiner Sehnen.

**Beweis.** Welche auch die Sehne seyn mag, z. B.  $AB$  (Fig. 138.): immer schließt sie mit zwei Halbmessern nach ihren Endpunkten ein Dreieck  $AMB$  ein und in diesem Dreieck ist  $AB$  kürzer als die Summe der beiden Seiten  $AM$  und  $BM$  (§. 49.). Nun ist  $AB$  die Sehne, und die Summe der beiden Halbmesser  $AM$  und  $BM$  ist dem Durchmesser gleich; also ist jede Sehne kürzer als der Durchmesser.

## 257.

**Lehrsätze.** I. Wenn ein Kreisbogen immer fort zunimmt, bis zum halben Umfange, so nimmt auch

seine Sehne zu, bis zum Durchmesser. Nimmt der Kreisbogen weiter zu, bis zum zweiten halben Umfange, so nimmt die Sehne ab, bis Null. Von hier bis zum dritten halben Umfange nimmt die Sehne wieder mit dem Bogen zu; vom dritten bis zum vierten halben Umfange nimmt sie ab u. s. w. abwechselnd ab und zu.

**Beweis.** Wenn der Bogen  $AC$  (Fig. 139.) größer ist als der Bogen  $AB$ , so ist der Winkel  $AMC$  größer als der Winkel  $AMB$ . Nun schließen die Halbmesser nach den Endpunkten des Bogens,  $AM$ ,  $MB$ , und  $AM$ ,  $MC$ , so lange mit den Sehnen  $AB$  und  $AC$  Dreiecke ein, als die Winkel  $AMB$  und  $AMC$  kleiner sind als zwei rechte. Ist ein Bogen größer als ein halber Umfang, wie  $ACE$ , und folglich der zugehörige Winkel  $AME$  größer als zwei rechte, so schließen die Halbmesser nach seinen Endpunkten  $AM$  und  $ME$  nicht mehr mit seiner Sehne  $AE$  ein Dreieck ein, dessen Winkel der zu dem Bogen  $ACE$  gehörige äußere Winkel  $AME$  wäre, weil kein Winkel eines Dreiecks größer seyn kann als zwei rechte (§. 33. II.), sondern der Winkel des Dreiecks  $AME$  ist die Ergänzung des äußern Winkels  $AME$  zu vier rechten. Was also durch ein Dreieck bewiesen wird, dessen Seiten zwei Halbmesser nach den Endpunkten eines Bogens, nebst der Sehne sind, gilt nur so lange, als der Bogen kleiner ist als ein halber Umfang.

Es mögen daher  $AB$  und  $AC$  zwei Bogen seyn, die kleiner sind als ein halber Umfang, so sind in den beiden Dreiecken  $AMB$  und  $AMC$  die Seiten  $AM$ ,  $MB$  und  $AM$ ,  $MC$  die nemlichen, denn sie sind sämtlich Halbmesser, hingegen der Winkel  $AMC$ , den  $AM$  und  $MC$  einschließen, ist größer als der Winkel  $AMB$ , den  $AM$  und  $MB$  einschließen. Also ist auch die dritte Seite  $AC$  größer als  $AB$  (§. 51. I.). Folglich wächst, mit dem Bogen, von 0 bis zum halben Umfange, seine Sehne, und zwar von Null bis zum Durchmesser; denn die Sehne des Bogens Null, ist Null und die Sehne des halben Umfanges, ist der Durchmesser.

Nun gehört aber die Sehne eines Bogens auch zunächst noch zu einem Bogen der jenen zu einem ganzen Umfange ergänzt, z. B. die Sehne  $AC$  des Bogens  $ABC$  gehört auch zu dem Bogen  $CEA$ , der den Bogen  $ABC$  zu einem ganzen Umfange ergänzt. Diese Ergänzung eines Bogens, wie  $AC$ , der kleiner ist als ein halber Umfang, nimmt aber von einem ganzen bis zu

einem halben Umfange ab, wenn der Bogen  $AC$  von Null bis zu einem halben Umfange wächst. Also nimmt die Sehne eines Bogens, die zwischen einem halben und einem ganzen Umfange liegt, ab, wenn der Bogen vom halben bis zum ganzen Umfange zunimmt, und zwar vom Durchmesser an bis zu Null.

Ferner gehört die Sehne eines Bogens auch zu einem Bogen der um einen ganzen Umfang grösser ist, z. B. die Sehne  $AC$  gehört auch zu dem Bogen  $ABDEAC$ , und dieser Bogen nimmt von einem ganzen bis zu anderthalb Umfängen zu, wenn die Sehne  $AC$  von Null bis zu einem halben Umfange zunimmt. Also nimmt die Sehne eines Bogens, der zwischen einem ganzen und anderthalb Umfängen liegt, zu, wenn der Bogen von einem ganzen bis zu anderthalb Umfängen wächst, und zwar von Null bis zum Durchmesser.

Sodann gehört die Sehne eines Bogens, wie  $AC$ , auch zu einem Bogen  $CEABDEA$ , welcher den Bogen  $AC$  zu zwei ganzen Umfängen ergänzt. Dieser ergänzende Bogen nimmt aber ab, wenn der Bogen  $AC$  von Null bis zum halben Umfange zunimmt. Also nimmt die Sehne eines Bogens, der zwischen anderthalb und zwei ganzen Umfängen liegt, ab, wenn der Bogen von anderthalb bis zu zwei Umfängen zunimmt und zwar vom Durchmesser bis zu Null.

Und so abwechselnd weiter.

II. Zu grösseren Sehnen gehören grössere Bogen, zwischen Null und  $\frac{1}{2}$ , 1 und  $1\frac{1}{2}$ , 2 und  $2\frac{1}{2}$ , 3 und  $3\frac{1}{2}$  etc. und kleinere Bogen zwischen  $\frac{1}{2}$  und 1,  $1\frac{1}{2}$  und 2,  $2\frac{1}{2}$  und 3 etc. Umfängen.

*Beweis.* Wenn z. B. die beiden Sehnen  $AB$  und  $AC$  (Fig. 139.) zu Bogen gehören, welche beide kleiner sind als halbe Umfänge, so sind die Winkel  $AMB$  und  $AMC$ , welche Halbmesser nach den Endpunkten der Bogen einschliessen, kleiner als zwei rechte. Folglich schliessen die Halbmesser mit den Sehnen, Dreiecke  $AMB$  und  $AMC$  ein. In diesen Dreiecken sind zwei Seiten  $AM$ ,  $BM$  und  $AM$ ,  $CM$  die nemlichen, die dritte Seite  $AC$  aber, nemlich die eine Sehne, ist nach der Voraussetzung grösser als die andere Sehne  $AB$ . Also ist auch der gegenüberliegende Winkel  $AMC$  grösser als der Winkel  $AMB$  (§. 51. II.), folglich ist auch der Bogen  $AC$  grösser als der Bogen  $AB$ , das heisst: zu grösseren Sehnen gehören grössere Bogen zwischen 0 und  $\frac{1}{2}$  Umfang.

Nun gehören die Sehnen  $AB$  und  $AC$  auch zu den Bogen  $BDEA$  und  $CDEA$ , welche die Bogen  $AB$  und  $AC$  zu einem ganzen Umfange ergänzen. Die äußern Winkel  $AMB$  und  $AMC$ , welche zu diesen Bogen gehören, sind die Ergänzungen der Winkel  $AMB$  und  $AMC$  zu vier rechten. Es ist aber vorhin bewiesen, daß der Bogen  $AC$ , welcher zu der größern Sehne  $AC$  gehört, größer ist als der Bogen  $AB$ , welcher zu der kleinern Sehne  $AB$  gehört. Also ist der zu der größern Sehne  $AC$  gehörende, ergänzende Bogen  $CDEA$  kleiner als der zu der kleinern Sehne  $AB$  gehörende ergänzende Bogen  $BDEA$ ; folglich gehören kleinere Bogen, zwischen  $\frac{1}{2}$  und 1 Umfang, zu größeren Sehnen.

Ferner gehören die Sehnen  $AB$  und  $AC$  zu den Bogen  $ACEAB$  und  $ABDFAC$ , welche zwischen 1 und  $1\frac{1}{2}$  Umfänge liegen. Dergleichen Bogen nehmen mit  $AB$  und  $AC$  zugleich zu. Also gehören zu größeren Sehnen größere Bogen zwischen 1 und  $1\frac{1}{2}$  Umfängen.

Dagegen nehmen wieder Bogen, welche  $AC$  und  $AB$  zu zwei ganzen Umfängen ergänzen, ab, wenn  $AC$  und  $AB$ , von Null bis zum halben Umfange zunehmen. Also gehören zu größeren Sehnen kleinere Bogen zwischen  $1\frac{1}{2}$  und 2 Umfängen.

Und so abwechselnd weiter.

## 258.

**Lehrsatz.** I. Größere Sehnen sind dem Mittelpunkt näher als kleinere, oder kleinere entfernter davon als größere.

**Beweis** Die Sehne  $AC$  (Fig. 139.) sey größer als die Sehne  $FG$ , und  $MQ$  auf  $AC$ ,  $ML$  auf  $FG$  senkrecht, so ist  $AQ = \frac{1}{2}AC$  und  $FL = \frac{1}{2}FG$  (§. 253. VI.), weil die graden Linien  $MQ$  und  $ML$  durch den Mittelpunkt gehen und also in Durchmessern liegen. In dem rechtwinkligen Dreieck  $AMQ$  ist also die Seite  $AM$  so groß, als die Seite  $FM$  in dem rechtwinkligen Dreieck  $FML$ ; denn beide sind Halbmesser. Hingegen die Seite  $AQ$  ist größer als  $FL$ ; denn  $AQ$  und  $FL$  sind die Hälften der Sehnen  $AC$  und  $FG$ , und  $AC$  wird größer vorausgesetzt als  $FG$ . Also ist die dritte Seite  $MQ$  kleiner als die dritte Seite  $ML$  (§. 48. I.), das heißt: größere Sehnen liegen dem Mittelpunkt näher als kleinere, und umgekehrt.

II. *Näher am Mittelpunkt liegende Sehnen sind grösser, entferntere kleiner.*

*Beweis.* Wenn die Sehne  $AC$  (Fig. 139.) dem Mittelpunkt  $M$  näher liegt als die Sehne  $FG$ , und  $MQ$  auf  $AC$ ,  $ML$  auf  $FG$  senkrecht ist, so wird vorausgesetzt  $MQ < ML$ . Es ist also in den rechtwinkligen Dreiecken  $AMQ$  und  $FML$ , deren Hypothenusen  $AM$  und  $FM$ , als Halbmesser, gleich sind, die Cathete  $MQ$  in dem ersten kleiner als die Cathete  $ML$  in dem andern. Also ist die andere Cathete  $AQ$  in dem ersten grösser als die andere Cathete  $FL$  in dem zweiten (§. 48. I.). Eben so verhält es sich mit den rechtwinkligen Dreiecken  $CMQ$  und  $GML$ . Es ist also auch  $AQ + QC > FL + LG$ , oder  $AC > FG$ ; das heisst: näher dem Mittelpunkt liegende Sehnen sind grösser als entferntere, und umgekehrt.

## 259.

*Lehrsätze.* I. *Jede grade Linie, die einen Kreis zweimal schneidet, folglich auch jede Sehne, macht mit den Durchmessern durch die Durchschnits-Punkte gleiche Winkel, die kleiner sind als rechte.*

*Beweis.* Die grade Linie  $UABV$  (Fig. 139.) schneide den Kreis  $ACG$  zweimal, in  $A$  und  $B$ , so schliesst die Sehne  $AB$  mit den Halbmessern  $AM$  und  $BM$  das gleichschenklige Dreieck  $AMB$  ein. Also sind die Winkel  $A$  und  $B$ , welche sie mit den Durchmessern  $AMD$  und  $BMS$  macht, gleich und kleiner als rechte (§. 45. I.).

II. *Wenn eine grade Linie durch den Durchschnits-Punct einer Kreislinie und eines ihrer Durchmesser geht und mit dem Durchmesser einen Winkel macht, der kleiner ist als ein rechter, so schneidet sie die Kreislinie nothwendig noch einmal.*

*Beweis.* Der Winkel  $VAD$  (Fig. 139.), welchen die grade Linie  $UABV$ , die die Kreislinie in  $A$  schneidet, mit dem Durchmesser  $AD$  an dieser Stelle  $A$  macht, sey kleiner als ein rechter, so sind schräge Linien von  $M$  nach  $AV$  möglich, die kürzer sind als der Halbmesser  $AM$ . Denn es sey z. B. der Winkel  $XMA$  kleiner als das Complement des Winkels  $XAM$ , so ist der Winkel  $AXM$  grösser als ein rechter, also um mehr grösser als der Winkel  $XAM$ ; folglich ist die ihm in dem Dreiecke  $AXM$  gegenüberliegende Seite  $AM$  grösser als  $XM$ .

**XM.** Folglich liegt ein Theil der graden Linie  $AV$  nothwendig zwischen dem Mittelpuncte des Kreises und der Kreislinie, oder innerhalb des Kreises.

Es giebt aber auch eine schräge Linie  $MB$ , welche dem Halbmesser  $MA$  gleich ist; denn nimmt man den Winkel  $AMB$  gleich dem Supplemente des zweifachen Winkels  $BAM$ , so sind in dem Dreieck  $AMB$  die Winkel  $ABM$  und  $BAM$ , und folglich auch die Seiten  $BM$  und  $AM$  gleich. Alle schräge Linien nach  $M$ , zwischen  $A$  und  $B$ , sind kürzer als  $AM$ , und alle schräge Linien außerhalb  $AB$ , wie  $MT$ , sind länger. Folglich liegt  $AV$ , von  $A$  bis  $B$  innerhalb, und übrigens außerhalb des Kreises. Mithin schneidet die grade Linie  $AV$  die Kreislinie in  $B$  noch einmal, und  $AB$  ist eine Sehne.

## 260.

**Lehrsätze.** I. Eine grade Linie, die in dem Puncte wo der Durchmesser eines Kreises die Kreislinie schneidet, auf dem Durchmesser senkrecht steht, hat mit der Kreislinie nur diesen einen Punct gemein und berührt sie in demselben, oder ist eine Tangente der Kreislinie in dem Durchschnittspuncte.

**Beweis.** Angenommen es sey anders, und z. B. das Perpendikel in  $A$ , auf den Durchmesser  $AD$  (Fig. 139.), könne die Kreislinie noch in einem zweiten Puncte  $N$  schneiden, so wäre  $NM = AM$ . Also wäre eine schräge Linie  $MN$  möglich, die dem Perpendikel  $MA$  gleich wäre. Eine solche schräge Linie giebt es aber nicht (§. 63. IV.), folglich kann auch das Perpendikel in  $A$  auf den Durchmesser  $AM$ , nicht einen zweiten, und mithin nur einen Punct mit der Kreislinie gemein haben; welches das Erste war.

Nun ist eine Tangente diejenige grade Linie, zwischen welcher und der Kreislinie keine andere grade Linie möglich ist, die die Kreislinie nicht zweimal schnitte (§. 247. X.). Wäre also z. B. das Perpendikel  $AY$  nicht eine Tangente, so könnte es zwischen  $AY$  und der Kreislinie grade Linien geben, welche nur einen Punct mit der Kreislinie, nicht zwei, gemein hätten. Dergleichen grade Linien könnten aber nur Perpendikel auf den Durchmesser seyn: denn jede andere, nicht auf  $AD$  senkrechte Linie schneidet die Kreislinie noth-

wendig zweimal (§. 259. II.). Nun giebt es aber nur ein Perpendikel auf  $AD$ ; also ist zwischen  $AY$  und der Kreislinie keine grade Linie möglich, die die Kreislinie nicht zweimal schnitte; folglich ist das Perpendikel  $AY$  die Tangente der Kreislinie in dem Puncte  $A$ ; welches das Zweite war.

II. *Eine grade Linie, welche mit einer Kreislinie nur einen Punct gemein hat, steht auf dem Durchmesser durch diesen Punct senkrecht und ist eine Tangente der Kreislinie, in dem nemlichen Puncte.*

*Beweis.* Wäre die Linie nicht auf dem Durchmesser senkrecht, sondern machte mit ihm irgend einen andern als einen rechten Winkel, so schnitte sie die Kreislinie nothwendig zweimal (§. 259. II.): gegen die Voraussetzung. Also steht sie auf dem Durchmesser nothwendig senkrecht; welches das Erste war.

Dann aber ist sie auch zu Folge (I.) nothwendig eine Tangente der Kreislinie, in ihrem Durchschnits-Puncte mit dem Durchmesser; welches das Zweite war.

III. *Die Tangente einer Kreislinie steht auf dem Durchmesser durch den Berührungs-Punct senkrecht und hat mit der Kreislinie nur einen Punct gemein.*

*Beweis.* Gesetzt die Tangente in  $A$  stände auf dem Durchmesser  $AD$  nicht senkrecht, sondern machte mit ihm den Winkel  $HAD$ , welcher kleiner ist als ein rechter, so ist der Winkel  $WAD$  größer als ein rechter; folglich liegt das Perpendikel  $AZ$ , auf  $AD$ , zwischen  $AW$  und der Kreislinie  $AR$ . Das Perpendikel hat aber zu Folge (I.) nur einen Punct mit dem Kreise gemein. Also wäre eine Linie  $AZ$ , die die Kreislinie nicht zweimal schneidet, zwischen der Tangente  $AW$  und der Kreislinie  $AR$  möglich, welches der Eigenschaft der Tangenten zuwider ist. Also ist  $AW$  keine Tangente und es ist keine Tangente möglich, die mit dem Durchmesser einen andern als einen rechten Winkel macht. Folglich steht die Tangente nothwendig auf dem Durchmesser senkrecht; welches das Erste war.

Dann aber hat sie auch mit der Kreislinie, zu Folge (I.), nur einen Punct gemein; welches das Zweite war.



## 261.

**Lehrsatz.** *An jedem Punct eines Kreises ist nur eine Tangente möglich. Dagegen, an jedem Puncte einer graden Linie sind unzählige berührende Kreise möglich, deren Mittelpunkte alle in einem Perpendikel auf die berührende grade Linie, durch den Berührungs-Punct, liegen.*

**Beweis.** Die Tangente ist ein Perpendikel auf den Durchmesser, durch den Berührungs-Punct (§. 260. III.) und in einem und demselben Puncte, auf eine und dieselbe grade Linie, ist nur ein Perpendikel möglich (§. 26. I.); also ist an jedem Puncte eines Kreises nur eine Tangente möglich; welches das Erste war.

Dagegen ist eine und dieselbe grade Linie ein Perpendikel auf alle Halbmesser, die die nemlichen Endpunkte in dem Perpendikel haben und in einer und derselben graden Linie liegen. Also sind unzählige Kreise möglich, deren Mittelpunkte in einer und derselben graden Linie liegen und die alle die nemliche grade Linie in demselben Puncte berühren.

## 262.

**Lehrsatz.** *Eine grade Linie und eine Kreislinie können einander in nicht mehr als zwei Puncten schneiden.*

**Beweis.** Denn alle Puncte einer Kreislinie, also auch die Durchschnits-Puncte einer Kreislinie und einer graden Linie, sind gleich weit vom Mittelpunkte des Kreises entfernt. Gäbe es nun mehr als zwei solcher Durchschnits-Puncte, so wären mehr als zwei gleich lange schräge Linien aus des Kreises Mittelpunkt nach der graden Linie möglich, welches nicht der Fall ist (§. 63. II.). Folglich sind nicht mehr als zwei Durchschnits-Puncte möglich.

## 263.

**Lehrsatz.** *Parallelen schneiden von einer Kreislinie gleiche Bogen ab.*

**Beweis.** Die Parallelen können nur einen, oder nur zwei Puncte mit der Kreislinie gemein haben; denn in mehr als zwei Puncten kann eine grade Linie eine Kreislinie nicht schneiden (§. 262.). Sie können also nur Tangenten oder Secanten seyn.



Wenn nun z. B.  $MO$  und  $NP$  (Fig. 140.), zwei parallele Tangenten sind, und  $AM$ , und  $M, B$  sind Halbmesser, welche durch die Berührungspunkte gehen, so sind diese Halbmesser auf den Tangenten senkrecht (§. 260. III.). Also ist  $AM, B$  eine grade Linie, und folglich ein Durchmesser. Der Durchmesser aber halbt den Kreis-Umfang (§. 250. III.). Folglich sind die Bogen  $AKB$  und  $AIB$ , zwischen den Berührungspunkten der parallelen Tangenten  $MO$  und  $NP$ , gleich.

Wenn ferner  $FG$  eine mit der Tangente  $MO$  parallele Secante ist, so ist der Durchmesser  $AM, B$  auf derselben senkrecht, weil er auf  $MO$  senkrecht ist. Also halbt er den Bogen  $FAG$  in  $A$  (§. 253. VI.). Folglich sind auch die Bogen  $FA$  und  $GA$ , zwischen den Punkten, welche eine Tangente und eine beliebige, mit ihr parallele Secante mit dem Kreise gemein haben, gleich.

Wenn endlich  $HI$  und  $KL$  andere, mit der Tangente, also auch der vorigen Secante parallele Secanten sind, so sind, auf dieselbe Weise, auch die Bogen  $AH$ ,  $AI$  und  $AHK$ ,  $AIL$  gleich. Also sind auch die Bogen  $HK$  und  $IL$  u. s. w., folglich auch die Bogen zwischen den Durchschnittspunkten zweier beliebigen Secanten und der Kreislinie, gleich.

Die Bogen zwischen den Punkten, welche Parallelen mit einer Kreislinie gemein haben, sind also in allen Fällen gleich.

## 264.

**Lehrsatz.** Wenn die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kreise der Summe ihrer Halbmesser gleich ist, so haben ihre Umfänge einen Punkt gemein, der mit den Mittelpunkten in grader Linie liegt, aber nur einen Punkt und berühren sich in demselben, auswendig.

Wenn die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kreise dem Unterschiede ihrer Halbmesser gleich ist, so haben die Umfänge einen Punkt gemein, der wiederum mit den Mittelpunkten in grader Linie liegt, aber nur diesen einen Punkt und berühren sich in demselben, inwendig.

**Beweis.** Im ersten Falle sey  $MN$  (Fig. 141.) die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Kreise und auf der graden Linie durch  $M$  und  $N$  sey  $MA$  gleich dem Halbmesser des einen Kreises, so ist  $NA$  gleich dem Halbmesser des andern, weil nach der Voraussetzung

$MN$  gleich der Summe der Halbmesser der beiden Kreise ist. Also haben die beiden Kreise nothwendig den Punct  $A$ , der in der graden Linie  $MN$  liegt, gemein; welches das Erste war.

Die Summe der Entfernungen jedes andern Puncts  $B, B_1, \dots$ , oder  $b, b_1, \dots$  eines der beiden Kreis-Umfänge von den Mittelpuncten  $M$  und  $N$ , ist aber größer als die Summe der Halbmesser, oder größer als  $MN$ ; denn die beiden Seiten  $MB, MB_1, \dots$  und  $BN, B_1N, \dots$  der Dreiecke  $MBN, MB_1N, \dots$ , oder die beiden Seiten  $Mb, Mb_1, \dots$  und  $bN, b_1N, \dots$  der Dreiecke  $MbN, Mb_1N, \dots$  sind zusammen länger als die dritte Seite  $MN$ . Das heist, es ist z. B.

$$MB + NB > MN > MA + NA \text{ und}$$

$$Mb + Nb > MN > MA + NA.$$

Nun ist  $MB = MB_1, \dots = MA$  und  $Nb = Nb_1, \dots = NA$ ; also ist  $NB, NB_1, \dots > NA$  und  $Mb, Mb_1, \dots > MA$ . Also kann ein Punct  $B, B_1, \dots$  der Kreislinie um  $M$ , nicht zugleich in der Kreislinie um  $N$ , und ein Punct  $b, b_1, \dots$  der Kreislinie um  $N$  nicht zugleich in der Kreislinie um  $M$  liegen. Folglich können die Kreis-Umfänge keinen zweiten Punct gemein haben; welches das Zweite war.

In dem einen Puncte  $A$ , welchen sie gemein haben, ist das Perpendikel  $KAL$  auf  $MN$  eine Tangente, sowohl des einen als des andern Kreises (§. 260. I.). Also ist zwischen der graden Linie  $KAL$  und den beiden Kreislinien keine andere grade Linie möglich, welche nicht die Kreislinie zweimal schneide. Folglich ist auch zwischen den beiden Kreislinien selbst keine solche grade Linie möglich. Mithin berühren sich die beiden Kreislinien in  $A$  (§. 247. X.), und zwar auswendig, weil jeder Kreis ganz ausserhalb des andern liegt, welches das Dritte war.

Im zweiten Falle sey  $MP$  die Entfernung der Mittelpuncte der beiden Kreise, und auf der graden Linie durch  $M$  und  $P$  sey  $MD$  gleich dem Halbmesser des einen Kreises, so ist  $PD$  gleich dem Halbmesser des andern, weil nach der Voraussetzung  $MP$  gleich dem Unterschiede der Halbmesser der beiden Kreise seyn soll. Also haben die beiden Kreise nothwendig den Punct  $D$  gemein; welches das Erste war.

Kein anderer Punct  $C, C_1, \dots$  der Kreislinie um  $M$ , kann aber um den Halbmesser  $DP$  der Kreislinie um  $P$ , von  $P$ , und kein anderer Punct  $c, c_1, \dots$  der Kreis-

linie um  $P$ , um den Halbmesser  $DM$  der Kreislinie um  $M$ , von  $M$  entfernt seyn. Denn die Dreiecke  $DMC$ ,  $DMC_1, \dots$  sind über  $DC$ ,  $DC_1, \dots$  und die Dreiecke  $DPc$ ,  $DPc_1, \dots$  über  $Dc$ ,  $Dc_1, \dots$  gleichschenkl. also sind z. B. die Winkel  $DCM$ ,  $CDM$  und  $DcP$ ,  $cDP$  gleich. Aber  $CP$  fällt mit  $CM$  und  $cP$  mit  $cM$  nur dann zusammen, wenn  $C$  und  $c$  in  $D$  oder  $A$  liegen, und nur in dem ersten Falle allein ist  $CP$  und  $cP$  gleich  $DP$ ; denn  $AP$  ist um  $2MP$  größer als  $DP$ . In jeder andern Lage des Puncts  $C$ , oder  $c$ , fällt  $CP$  und  $cP$  nicht in  $CM$  und  $cM$ . Also sind auch in jeder andern Lage von  $C$  und  $c$  die Dreiecke  $DPC$  und  $DMc$ , welche mit den gleichschenkligen Dreiecken  $DMC$  und  $DPc$  die Seiten  $DC$  und  $Dc$  gemein haben, nicht gleichschenkl. Und folglich kann für keinen andern Punct  $C$ ,  $C_1, \dots$   $c$ ,  $c_1, \dots$  als  $D$  allein,  $CP$  und  $cM$  gleich  $DP$  seyn; das heißt, kein Punct, außer  $D$ , in einer der beiden Kreislinien, kann um den Halbmesser der andern von dieser ihrem Mittelpunkt entfernt seyn. Folglich können die beiden Kreis-Umfänge keinen zweiten Punct gemein haben; welches das Zweite war.

In dem einen Punct  $D$ , welchen sie gemein haben, ist das Perpendikel  $GDH$  auf  $MD$  eine Tangente, sowohl des eiten als des andern Kreises (§. 260. I.). Also ist zwischen der graden Linie  $GDH$  und den beiden Kreislinien keine andere grade Linie möglich, welche nicht die Kreislinie zweimal schnitte. Folglich ist auch zwischen den Kreislinien selbst keine solche grade Linie möglich. Mithin berühren sich die beiden Kreislinien in  $D$  (§. 247. X.), und zwar inwendig, weil der eine Kreis ganz innerhalb des andern liegt; welches das Dritte war.

265.

*Lehrsatz.* Wenn zwei Tangenten eines und desselben Kreises sich schneiden, so halbirt die grade Linie durch ihren Durchschnits-Punct und den Mittelpunkt des Kreises den Winkel, welchen die Tangenten einschließen. Auch halbirt sie die Sehne zwischen den Berührungs-Puncten und steht auf ihr senkrecht. Desgleichen sind die beiden, sich schneidenden Tangenten gleich lang.

Z. B. wenn  $ZC$  und  $ZD$  (Fig. 142.) Tangenten des Kreises  $CFD$  sind, dessen Mittelpunkt  $N$  ist, so sind die Winkel  $CZN$  und  $DZN$  gleich. Ferner ist  $CP = PD$ , bei  $P$  sind rechte Winkel und  $CZ$  ist gleich  $DZ$ .

**Beweis.** Die Halbmesser  $CN$  und  $DN$  durch die Berührungspunkte sind auf den Tangenten  $CZ$  und  $DZ$  senkrecht (§. 260. III.) und einander gleich. Also sind in den rechtwinkligen Dreiecken  $ZNC$  und  $ZND$  die Hypothenusen  $ZN$  und die Catheten  $CN$  und  $DN$  gleich. Folglich sind die Dreiecke, und folglich die Winkel  $CZN$  und  $DZN$  gleich. Desgleichen ist  $CZ = DZ$ ; welches das Erste und Vierte war.

Ferner sind die Winkel  $CNZ$  und  $DNZ$  gleich; also sind die Bogen  $CQ$  und  $DQ$  gleich (§. 260. I.). Folglich halbt die grade Linie  $ZQN$  den Bogen  $CQD$  und geht durch den Mittelpunkt des Kreises, oder ist ein Durchmesser. Daraus folgt, daß  $ZQN$  auch die Sehne  $DC$  halbt und auf ihr senkrecht steht (§. 253. V.); welches das Zweite und Dritte war.

## 266.

**Lehrsatz.** Wenn zwei grade Linien zwei Kreise zugleich berühren, so geht die grade Linie, in welcher die Mittelpunkte der beiden Kreise liegen, durch den Durchschnittspunkt der Tangenten und halbt den Winkel welchen die Tangenten einschließen.

Z. B. wenn die graden Linien  $AC$ ,  $A_1C_1$  und  $BD$ ,  $B_1D_1$  (Fig 142.), die sich in  $Z$ ,  $Z_1$  schneiden, die beiden Kreise um  $M$  und  $N$  berühren, so ist  $MNZ$  oder  $MZ_1N$  eine grade Linie, und die Winkel  $MZA$ ,  $MZB$  und  $MZ_1A_1$ ,  $MZ_1B_1$  sind gleich.

**Beweis.** Nach (§. 265.) sind die Winkel  $CZN$ ,  $DZN$  und  $C_1Z_1N$ ,  $D_1Z_1N$  einander, also der Hälfte des Winkels  $CZD$ ,  $C_1Z_1D_1$  und die Winkel  $AZM$ ,  $BZM$  und  $A_1Z_1M$ ,  $B_1Z_1M$  einander, also der Hälfte des nemlichen Winkels  $AZB$  oder  $A_1Z_1B$  gleich; also sind die Winkel  $CZN$ ,  $AZM$ ;  $C_1Z_1N$ ;  $A_1Z_1M$  und  $DZN$ ,  $BZM$ ;  $D_1Z_1N$ ;  $B_1Z_1M$  gleich. Folglich ist  $MNZ$ , oder  $MZ_1N$  eine grade Linie, welche die Winkel  $AZB$ ,  $A_1Z_1B_1$  halbt.

## 267.

**Lehrsatz.** Die Ecken jeder nach denselben centrischen Figur liegen in einer Kreislinie, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Ecken der Figur ist, aber nur in einer.

**Beweis.** Die Ecken einer centrischen Figur sind gleich weit von ihrem Mittelpunkte entfernt; alle Punkte

einer Kreislinie, deren Mittelpunkt jener Punkt ist, und der durch eine der Ecken geht, ebenfalls: also liegen alle Ecken der Figur in einer und derselben Kreislinie, aber nur in einer, weil die centrische Figur nur einen Mittelpunkt hat und die Punkte mehrerer Kreislinien von einem und demselben Mittelpunkte nicht gleich weit entfernt sind.

## 268.

*Zusätze.* I. Die Ecken jedes Dreiecks liegen also in einer Kreislinie, und nur in einer, weil jedes Dreieck centrisch nach den Ecken ist und nur einen Mittelpunkt hat (§. 66.). Oder mit andern Worten: durch jede beliebige drei Punkte kann eine Kreislinie gehen, aber nur eine.

II. Die Ecken vier- und mehrseitiger Figuren aber liegen nicht nothwendig in einer Kreislinie, sondern nur dann, wenn die Figuren centrisch nach den Ecken sind. Oder mit andern Worten: nicht durch vier und mehr beliebige Punkte in der Ebene kann immer eine Kreislinie gehen, sondern nur dann, wenn die Figuren, in deren Ecken die Punkte liegen, centrisch nach den Ecken sind.

III. Die Ecken aller regelmässigen Vielecke liegen in einem und demselben Kreise. Denn regelmässige Vielecke sind centrisch nach den Ecken (§. 108. I.).

## 269.

*Lehrsatz.* Die Seiten jeder nach ihnen centrischen Figur berühren einen und denselben Kreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Seiten der Figur ist, aber nur einen.

*Beweis.* Wenn Figuren den Seiten nach centrisch sind, so sind die Seiten von ihrem Mittelpunkte gleich weit entfernt, das heisst: Perpendikel aus dem Mittelpunkte auf die Seiten sind gleich lang. Die Punkte also, in welchen diese Perpendikel die Seiten schneiden, sind gleich weit vom Mittelpunkte entfernt. Alle Punkte eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Seiten ist, und der durch den Endpunkt eines Perpendikels geht, sind aber ebenfalls vom Mittelpunkte gleich weit entfernt. Also liegen die Endpunkte aller jener Perpendikel in einer und derselben Kreislinie und nur in einer, weil die Figur nur einen Mittelpunkt der Seiten hat und die Punkte mehrerer Kreislinien von ei-

nem und demselben Mittelpunkte nicht gleich weit entfernt sind. Nun stehen ferner die Seiten der Figur auf den Perpendikeln, in den Durchschnits-Puncten, senkrecht; also berühren die Seiten den Kreis, der durch die Endpuncte der Perpendikel geht (§. 260. I.).

## 270.

**Zusätze.** I. Die Seiten jedes Dreieks berühren also eine und dieselbe Kreislinie, weil jedes Dreieck centrisch nach den Seiten ist (§. 74.), und nur eine. Oder auch: beliebige drei, nicht parallele grade Linien können von einer und derselben Kreislinie zugleich berührt werden.

II. Die Seiten vier und mehrseitiger Figuren dagegen berühren nicht nothwendig eine und dieselbe Kreislinie, sondern nur dann, wenn die Figuren centrisch nach den Seiten sind; oder mit andern Worten: nicht vier und mehrere beliebige grade Linien in der Ebene können von einem und demselben Kreise berührt werden, sondern nur dann, wenn die Figuren, die sie einschließen, centrisch nach den Seiten sind.

III. Die Seiten aller regelmässigen Vielecke von gleichem Halbmesser berühren einen und denselben Kreis; denn regelmässige Vielecke sind centrisch nach den Seiten (§. 108. I.).

## 271.

**Lehrsatz.** Zwei Kreise können einander in nicht mehr als zwei Puncten schneiden.

**Beweis.** Denn haben zwei Kreise drei Puncte gemein, so schneiden sie sich nicht, sondern fallen ganz in einander, weil durch drei Puncte nur ein Kreis möglich ist (§. 268. I.).

## 272.

**Lehrsatz.** Wenn sich zwei Kreise in zwei Puncten schneiden, so steht die grade Linie durch die Mittelpuncte der Kreise auf der graden Linie durch die Durchschnits-Puncte, senkrecht und halbirt sie.

Z. B. in (Fig. 143.) sind bei C, C<sub>1</sub> rechte Winkel und AC ist gleich BC, A<sub>1</sub>C<sub>1</sub> gleich B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>.

**Beweis.** Da die Halbmesser AM, BM; A<sub>1</sub>M, B<sub>1</sub>M und AN, BN; A<sub>1</sub>N<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>N<sub>1</sub> gleich sind, so sind alle drei Seiten der Dreiecke MAN, MA<sub>1</sub>N<sub>1</sub> den Seiten der

Dreiecke  $MBN$ ,  $MB_1N_1$  gleich; folglich sind die Dreiecke selbst und folglich auch z. B. die Winkel  $AMN$  und  $BMN$ ,  $A_1MN_1$  und  $B_1MN_1$  gleich. Also sind auch die Dreiecke  $AMC$  und  $BMC$ ,  $A_1MC_1$  und  $B_1MC_1$  gleich, und folglich sind, weil  $ACB$ ,  $A_1C_1B_1$  grade Linien seyn sollen, bei  $C$ ,  $C_1$  rechte Winkel und  $AC$  ist gleich  $BC$ ,  $A_1C_1$  gleich  $B_1C_1$ .

## 273.

**Lehrsatz.** Winkel am Kreis - Umfange (§. 247. IX.) sind halb so groß als die Winkel am Mittelpunkte (§. 247. VIII.) über denselben Bogen.

Z. B. der Winkel  $ADB$  (Fig. 144.) ist halb so groß als  $AMB$  über demselben Bogen  $AGB$ ;  $AFB$  ist halb so groß als der äußere Winkel  $AMB$ .

**Beweis.** Der Mittelpunkt der Ecken des Dreiecks  $ADB$  ist  $M$  und der Dreiecks - Winkel  $ADB$  ist halb so groß als der Winkel am Mittelpunkte  $AMB$  (§. 68. I.); der Winkel  $AGB$  ist die Hälfte des äußern Winkels  $AMB$ .

## 274.

**Zusatz.** Alle Umfangs - Winkel über dem Durchmesser  $PQ$  eines Kreises, z. B.  $PEQ$ ,  $POQ$ ,  $PDQ$ ,  $PFQ$ ,  $PHQ$ ,  $PGQ$  etc. (Fig. 144.) sind rechte. Denn der zugehörige, doppelt so große Winkel am Mittelpunkte,  $PMQ$ , ist gleich zwei rechten.

## 275.

**Lehrsätze.** I. Winkel am Umfange über gleichen Bogen sind einander und den Winkeln gleich, welche die Sehnen der Bogen mit den Tangenten an ihren Endpunkten einschließen; z. B. die Winkel  $ADB$ ,  $ACB$ ,  $AEB$ ,  $KAB$  und  $KBA$  (Fig. 144.) sind gleich.

II. Die Summen von Winkeln am Umfange auf verschiedenen Seiten einer und derselben Sehne sind gleich zwei rechten z. B. die Summe der Winkel  $ADB$  und  $AFB$  ist gleich zwei rechten.

III. Winkel am Umfange, welche kleiner sind als rechte, und die Winkel zwischen den Tangenten an den Endpunkten der zugehörigen Bogen, liegen auf entgegengesetzten Seiten der Sehne und die Summe des Umfangs - Winkels und der Hälfte des Tangenten - Winkels ist



gleich einem rechten. Z. B. wenn der Umfangswinkel  $AEB$  kleiner ist als  $\rho$ , so liegen  $E$  und  $K$  auf verschiedenen Seiten der Sehne  $AB$ , und  $E + \frac{1}{2}K$  ist gleich  $\rho$ .

IV. Winkel am Umfange, welche grösser sind als rechte, und die Winkel zwischen den Tangenten an den Endpunkten der zugehörigen Bogen liegen auf der nemlichen Seite der Sehne und der Unterschied des Umfangswinkels und der Hälfte des Tangenten-Winkels ist gleich einem rechten. Z. B. wenn  $AGB$  grösser ist als  $\rho$ , so liegen  $G$  und  $K$  auf einerlei Seiten der Sehne  $AB$ , und  $G - \frac{1}{2}K$  ist gleich  $\rho$ .

Beweis. I. Die Dreiecke  $ADB$ ,  $ACB$ ,  $AEB$  etc. mit der gemeinschaftlichen Seite  $AB$  sind concentrisch nach den Ecken, denn sie haben alle denselben Mittelpunkt  $M$ . Folglich sind die Winkel  $D$ ,  $C$ ,  $E$  über der gemeinschaftlichen Seite  $AB$  einander gleich (§. 70. II.). Eben so die Winkel  $F$ ,  $H$ ,  $G$  in den concentrischen Dreiecken  $AFB$ ,  $AHB$ ,  $AGB$ , mit der gemeinschaftlichen Seite  $AB$ .

Rückt der Scheitel-Punct des Winkels am Umfange der Sehne näher und fällt zuletzt in ihren Endpunct, so fällt z. B. die Linie  $EA$  in  $PAK$  und  $EB$  in  $AB$ . Also ist der Winkel  $BAK$  gleich dem Winkel  $BEA$ , und eben so  $ABK = AEB$ . Also sind die Winkel zwischen der Sehne und den Tangenten an den Endpunkten des Bogens dem Umfangswinkel über dem nemlichen Bogen gleich.

Dieses letztere folgt auch aus den Dreiecken  $AMK$  und  $MLA$ , welche gleichwinklig sind, weil  $MAK$  nach (§. 260. III.) und  $KLA$  nach (§. 265.) rechte Winkel sind, und der Winkel bei  $K$  beiden gemein ist. Deshalb ist der Winkel  $LAK$ , oder  $BAK$ , dem Winkel  $AMK$  gleich. Aber  $AMK$  ist die Hälfte des Winkels  $AMB$ , weil die Dreiecke  $AMK$  und  $BMK$  gleich sind, also ist  $BAK$ , oder der gleiche Winkel  $ABK$ , gleich dem Umfangswinkel  $AEB$ ; denn auch dieser ist die Hälfte des Winkels am Mittelpuncte  $AMB$ , über demselben Bogen.

II. Die Schenkel von Winkeln am Umfange, auf verschiedenen Seiten einer und derselben Sehne, z. B. von den Winkeln  $ADB$  und  $AFB$ , schliessen ein Viereck  $ADBF$  ein, welches nach den Ecken concentrisch ist, und die gegenüber liegenden Winkel  $D$  und



$P$  eines solchen Vierecks sind zusammen gleich zwei rechten (§. 86. I.).

III. So lange Winkel am Umfange, wie  $AEB$ , kleiner als rechte sind, sind es auch die ihnen, zu Folge (I.) gleichen Winkel  $BAK$  und  $ABK$ , an der entgegengesetzten Seite der Sehne, zwischen der Sehne und den Tangenten an den Endpunkten des Bogens. Also schneiden sich die Tangenten an der entgegengesetzten Seite der Sehne (§. 22. I.).

Nun ist in dem Viereck  $MAKB$  der Winkel  $M$  gleich  $2\rho - K$ , denn  $A$  und  $B$  sind rechte Winkel; die Umfangs-Winkel, wie  $E$ , aber sind die Hälften des zugehörigen Mittelpuncts - Winkels  $M$ ; also ist  $E = \frac{1}{2}(2\rho - K) = \rho - \frac{1}{2}K$ , folglich  $E + \frac{1}{2}K = \rho$ .

IV. Sind Winkel am Umfange, wie  $AGB$ , größer als rechte, so sind es auch die ihnen, zu Folge (I.) gleichen Winkel  $PAB$  und  $QBA$ , an der entgegengesetzten Seite der Sehne, zwischen der Sehne und den Tangenten an den Endpunkten des Bogens. Also sind  $KAB$  und  $KBA$  kleiner als rechte, und folglich schneiden sich die Tangenten an der nemlichen Seite der Sehne (§. 22. I.).

Nun ist in dem Viereck  $MAKB$ , wie vorhin, der Winkel  $M$  gleich  $2\rho - K$ , also der, äußere Winkel  $AMB$  gleich  $4\rho - (2\rho - K) = 2\rho + K$ . Der Umfangs-Winkel, wie  $G$ , aber ist die Hälfte dieses äußern Winkels  $AMB$ ; also ist  $G = \frac{1}{2}(2\rho + K) = \rho + \frac{1}{2}K$ , und folglich  $G - \frac{1}{2}K = \rho$ .

## II. Von ähnlichen Figuren im Kreise und dem was davon abhängt.

276.

**Lehrsatz.** Die Producte der Stücke, welche zwei beliebige Sehnen eines Kreises innerhalb und außerhalb desselben von einander abschneiden, sind gleich.

Z. B. in (Fig 145.) ist

1.  $AP \cdot PD = CP \cdot PB$ ,
2.  $EA \cdot EB = EC \cdot ED$ ,
3.  $FA \cdot FC = FB \cdot FD$ .

**Beweis.** Das Viereck  $ABCD$  ist nach den Ecken centrisch;  $AB, BD, DC$  und  $CA$  sind seine Seiten, und  $AD, BC$  seine Diagonalen. Ein solches Viereck hat die im Lehrsatz ausgedrückten Eigenschaften (§. 140 und 141.).

## 277.

**Lehrsatz.** Die Producte der Stücke, welche je zwei Sehnen zwischen drei beliebigen Puncten eines Kreises, und eine Tangente an einem der drei Puncte, von einander abschneiden, sind gleich.

Z. B. wenn  $EA$  (Fig. 146.) eine Tangente an  $A$  ist, so ist

1.  $AE^2 = EC \cdot ED$ ,
2.  $EA \cdot DA = DE \cdot AC$ ,
3.  $AC \cdot EA = DA \cdot EC$ .

**Beweis.** Der Winkel  $ADE$  über der Sehne  $AC$  ist dem Winkel  $CAE$  zwischen der Sehne und der Tangente gleich (§. 275. 1.), und der Winkel  $E$  ist den beiden Dreiecken  $AEC$  und  $AED$  gemein. Also sind diese Dreiecke ähnlich. Gleichliegende Seiten sind  $AE$  und  $ED$ ;  $AC$  und  $AD$ ; und  $EC$  und  $EA$ . Also ist

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{EC}{EA},$$

welches

$$\begin{aligned} AE^2 &= EC \cdot ED, \\ EA \cdot DA &= DE \cdot AC \text{ und} \\ AC \cdot EA &= DA \cdot EC \end{aligned}$$

gibt; wie behauptet wird.

## 278.

**Lehrsatz.** Wenn zwei Puncte mit dem Mittel-Puncte eines Kreises in grader Linie liegen, und das Product ihrer Entfernungen vom Mittel-Puncte ist dem Quadrate des Halbmessers gleich, so sind die beiden Entfernungen der Puncte von jedem beliebigen Puncte der Kreis-Linie, von einander Gleichvielfache.

Z. B. wenn in (Fig. 147.)

$$1. \quad BM \cdot CM = AM^2$$

ist, so ist für jeden beliebigen Punct  $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  etc. der Kreislinie um  $M$ ,

$$2. \quad \frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}.$$

**Beweis.** Da die Halbmesser  $AM$ ,  $DM$ ,  $D_1M$  etc. alle einander gleich sind, so ist, vermöge der Voraussetzung  $BM \cdot CM = AM^2$ , auch z. B.  $BM \cdot CM = DM^2$ , woraus

$$3. \quad \frac{BM}{DM} = \frac{DM}{CM}$$

folgt. In den beiden Dreiecken  $BMD$  und  $CMD$  sind also die Seiten  $BM$ ,  $DM$  und  $DM$ ,  $CM$ , welche den gemeinschaftlichen Winkel  $M$  einschließen, von einander Gleichvielfache. Also sind diese Dreiecke ähnlich (§. 194. 2.). Folglich sind auch ihre dritten Seiten die nemlichen Vielfachen, das heißt, es ist  $\frac{BD}{DM} = \frac{CD}{CM}$ , oder  $\frac{BD}{CD}$

$$= \frac{DM}{CM}, \text{ oder weil } DM = AM,$$

$$4. \quad \frac{BD}{CD} = \frac{AM}{CM}.$$

Nun giebt die Gleichung (1.), wenn man auf beiden Seiten  $AM \cdot CM$  abzieht,  $BM \cdot CM - AM \cdot CM = AM^2 - AM \cdot CM$ , oder  $(BM - AM)CM = AM(AM - CM)$ , oder, weil  $BM - AM = BA$

und  $AM - CM = CA$  ist,  $BA \cdot CM = AM \cdot CA$ , oder

$$5. \frac{AM}{CM} = \frac{BA}{CA}.$$

Es ist aber zu Folge (4.)  $\frac{AM}{CM} = \frac{BD}{CD}$ ; also ist

$$6. \frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA};$$

und so für jeden andern Punct  $D_1, D_2 \dots$ ; wie behauptet wird.

279.

**Lehrsatz.** Wenn sich beliebige Sehnen eines Kreises in einem und demselben Puncte schneiden, wie  $P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2, S_1S_2$  etc. (Fig. 148.) in  $A$ , so liegen

I. die Durchschnitte  $P, Q, R, S$  etc. der Tangenten  $PP_1$  und  $PP_2, QQ_1$  und  $QQ_2, RR_1$  und  $RR_2$  etc. an der Kreislinie, in den Endpunkten der Sehnen, in einer und derselben graden Linie  $PQRS \dots$ , welche Schnittlinie heißen mag.

Umgekehrt, wenn die Durchschnitte-Puncte beliebiger Tangenten eines Kreises in einer und derselben graden Linie liegen, so schneiden sich die Sehnen, welche die Berührungs-Puncte gleich langer Tangenten verbinden, in einem und demselben Puncte.

II. Auf der Schnittlinie steht die grade Linie  $MAN$ , welche durch den Durchschnitte-Punct der Sehnen und den Mittel-Punct des Kreises geht, senkrecht.

III. Das Product der Entfernungen  $NM$  und  $AM$  der Schnittlinie  $PQRS \dots$  und des Durchschnitte-Puncts der Sehnen, von dem Mittelpuncte des Kreises, ist dem Quadrate des Halbmessers  $MA_1$  gleich.

**Beweis.** I.  $\alpha$ ) Unter den Sehnen, die durch  $A$  gehen, sey die  $T_1T_2$  auf der graden Linie  $MAN$  durch den Mittel-Punct des Kreises  $M$  und den Durchschnitte-Punct  $A$ , senkrecht, so ist  $T_1A = T_2A$  (§. 253. VI), der Durchschnitte-Punct  $N$  der Tangenten  $T_1N$  und  $T_2N$  an den End-Puncten der Sehne  $TT_1$  liegt in der graden Linie durch  $A$  und  $M$  (§. 265.), die Winkel  $MT_1N$  und  $MT_2N$  sind rechte (§. 260. III.) und die rechtwinkligen Dreiecke  $MAT_1$  und  $MT_1N$  sind, weil sie noch den Winkel bei  $M$  gemein haben, ähnlich. Also ist

$$1. \frac{MA}{MT_1} = \frac{MT_1}{MN}.$$

Für jede beliebige andere Sehne, z. B.  $P_1P_2$ , liegt ebenfalls der Durchschnitte-Punct  $P$  der Tangenten  $P_1P$  und  $P_2P$  an den Endpunkten der Sehnen, in der graden Linie  $MB$  durch den Mittel-Punct des Kreises  $M$  und die Mitte der Sehne  $B$  (§. 260. III.); bei  $P_1$  und  $P_2$ , so wie bei  $B$ , sind rechte Winkel (§. 265.), und die rechtwinkligen Dreiecke  $MBP_1$  und  $MP_1P$ , weil sie noch den Winkel bei  $M$  gemein haben, sind ähnlich. Also ist.

$$2. \frac{MB}{MP_1} = \frac{MP_1}{MP}.$$

Dividirt man (1.) durch (2.), so erhält man

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{MP_1}{MT_1} = \frac{MT_1}{MP} \cdot \frac{MP}{MN},$$

oder, weil die Halbmesser  $MP_1$  und  $MT_1$  einander gleich sind,

$$3. \frac{MA}{MB} = \frac{MP}{MN}.$$

Die Seiten  $MA$  und  $MB$  in dem Dreiecke  $AMB$  und die Seiten  $MP$  und  $MN$  in dem Dreiecke  $MPN$  sind also von einander Gleichvielfache. Die Dreiecke  $AMB$  und  $PMN$  haben aber außerdem den Winkel  $M$ , welchen die gleichvielfachen Seiten einschließen, gemein. Also sind diese Dreiecke ähnlich (§. 194. 2.). Nun ist das Dreieck  $AMB$  bei  $B$  rechtwinklig; also ist auch das Dreieck  $PMN$  bei  $N$  rechtwinklig; folglich steht die grade Linie  $PN$ , welche den Durchschnits-Punct  $P$  der Tangenten für die Sehne  $P_1P_2$ , mit dem Durchschnits-Puncte  $N$  der Tangenten für die auf  $AM$  senkrechte Sehne  $T_1T_2$  verbindet, in  $N$ , auf der graden Linie durch den Mittel-Punct des Kreises  $M$  und den Durchschnits-Punct  $A$  der beiden Tangenten senkrecht.

Das Nemliche gilt aber auch für jede andere Sehne  $Q_1Q_2$ ,  $R_1R_2$  etc. Also sind  $PN$ ,  $QN$ ,  $RN$  etc. sämtlich Perpendikel auf eine und dieselbe grade Linie  $MA$ , in einem und demselben Punct dieser Linie,  $N$ . Also liegen die Durchschnits-Puncte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  etc. der Tangenten, für alle Sehnen  $P_1P_2$ ,  $Q_1Q_2$ ,  $R_1R_2$  etc., welche sich in einem und demselben Punct  $A$  schneiden, in einer und derselben graden Linie  $PQRS$ .

β) Wenn umgekehrt die Durchschnits-Puncte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  etc. beliebiger Tangenten in einer graden Linie liegen, so müßten, wenn es möglich seyn sollte, daß die in  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  etc. zusammentreffenden Tangenten auch zu Sehnen gehörten, welche sich nicht in einem und demselben Puncte schneiden, durch einen und denselben Punct  $P$  mehr als zwei Tangenten gehen können, damit z. B. von  $P$  aus der Kreis noch in andern Puncten berührt werde und durch die Berührungs-Puncte noch andere Sehnen gehen können, in welchen der Punct  $A$  nicht liegt. Dieses ist aber nicht möglich, sondern es giebt z. B. durch  $P$  nur zwei Tangenten an den Kreis, weil über  $PM$  mit der gegebenen zweiten, dem Halbmesser gleichen Seite  $MP_1$ , nur ein rechtwinkliges Dreieck möglich ist. Es giebt für Tangenten, die durch  $P$  gehen, nur die beiden Berührungs-Puncte  $P_1$ ,  $P_2$  und nur eine Sehne  $P_1P_2$ , welche durch  $A$  geht. Eben so für jeden andern Punct in der graden Linie  $PQRS$ . Folglich schneiden sich die Sehnen, welche zu Puncten gehören, die in der graden Linie  $PQRS$  liegen, nothwendig in einem und demselben Puncte  $A$ ; welches, zusammengekommen, das Erste war.

II. Nach (I.) steht  $MAN$  auf  $PQRS$  senkrecht; welches das Zweite war.

III. Desgleichen folgt aus (I. Gl. 1.)

$$MA \cdot MN = MT_1^2;$$

das heißt: das Product der Entfernungen  $NM$  und  $AM$  der Schnittlinie und des Durchschnits-Punctes der Sehnen vom Mittel-Puncte des Kreises, ist gleich dem Quadrat des Halbmessers; welches das Dritte war.

**Zusätze.** I. Liegt der Durchschnits-Punct der Sehnen  $A$  (Fig. 148.) im Umfange des Kreises, z. B. in  $A_1$ , so daß die in  $A_1$  sich schneidenden Sehnen von der Art wie  $A_1P_1$ ,  $A_1Q_1$ ,  $A_1R_1$  etc. sind, so ist die grade Linie, in welcher sich die Tangenten an den End-Puncten der Sehnen, wie  $P_1P_1$  und  $P_1A_1$ ,  $Q_1Q_1$  und  $Q_1A_1$  etc. schneiden, offenbar die Tangente des Kreises in  $A_1$ .

II. Liegt der Durchschnitts-Punct der Sehnen,  $A$  außerhalb des Kreises, z. B. in  $A_2$ , so daß die in  $A_2$  sich schneidenden Sehnen von der Art, wie  $P_3P_4$ ,  $Q_3Q_4$  etc. sind, so geht die grade Linie, in welcher sich die Tangenten an den Endpuncten der Sehnen, wie  $P_3P_4$  und  $P_4P_5$ ,  $Q_3Q_4$  und  $Q_4Q_5$  etc. schneiden, durch den Kreis. Es ist aber immer

$$MA_2 \cdot MN_1 = MT_1^2.$$

III. Liegt der Durchschnitts-Punct der Sehnen vom Mittelpunct des Kreises unendlich weit entfernt, so daß also die Sehnen mit einander parallel sind, so geht die Schnittlinie der Tangenten durch den Mittel-Punct des Kreises; und umgekehrt. Denn wenn in  $MA \cdot MN = MT^2$ ,  $MA$  unendlich groß ist, so ist  $MN$  gleich Null und folglich geht, für  $MA = \infty$ , die Schnittlinie durch den Mittel-Punct  $M$ ; und wenn  $MN = 0$  ist, so ist  $MA = \infty$ .

## 281.

**Lehrsatz.** Wenn ein beliebiges Dreieck in einen Kreis beschrieben ist, so schneiden sich seine Seiten, verlängert, mit den Tangenten der Kreis-Linie in den den drei Seiten gegenüber liegenden Ecken, in einer und derselben graden Linie.

Z. B. die Durchschnitts-Puncte  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  der Seiten des Dreiecks  $ABC$  (Fig. 149.) und der Tangenten  $AP$ ,  $BQ$ ,  $CR$  an  $A$ ,  $B$ ,  $C$  liegen in einer graden Linie  $PQR$ .

**Erster Beweis.** Zunolge (§. 277. Gleichung 2.) ist

$$AC \cdot PB = AP \cdot AB,$$

$$BC \cdot AQ = BQ \cdot AB,$$

$$BC \cdot AR = CR \cdot CA,$$

und zu Folge (§. 277. Gleich. 3.)

$$AP \cdot AC = AB \cdot PC,$$

$$BQ \cdot BC = AB \cdot CQ,$$

$$CR \cdot BC = CA \cdot BR,$$

oder

$$AC \cdot BP = AB \cdot AP,$$

$$AB \cdot BQ = BC \cdot AQ,$$

$$BC \cdot AR = AC \cdot CR,$$

$$AC \cdot AP = AB \cdot CP,$$

$$AB \cdot CQ = BC \cdot BQ,$$

$$BC \cdot CR = AC \cdot BR.$$

Multipliziert man diese sechs Gleichungen mit einander, so erhält man

$$AB^2 \cdot AC^2 \cdot BC^2 \cdot AP \cdot BP \cdot BQ \cdot CQ \cdot AR \cdot CR \\ = AB^2 \cdot AC^2 \cdot BC^2 \cdot AP \cdot CP \cdot AQ \cdot BQ \cdot BR \cdot CR,$$

oder

$$AB \cdot BP \cdot CQ = AQ \cdot BR \cdot CP.$$

Diese Gleichung ist nach (§. 212. II.) diejenige Bedingung, unter welcher  $PQR$  eine grade Linie ist. Denn es sey  $BX$  mit  $AQ$  parallel, so sind die Dreiecke  $AQR$ ,  $BXR$  und  $PBX$ ,  $PCQ$  ähnlich. Also ist

$$\frac{AR}{BR} = \frac{AQ}{BX} \text{ und } \frac{BP}{CP} = \frac{BX}{CQ}.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{AR \cdot BP}{BR \cdot CP} = \frac{AQ}{CQ}, \text{ oder} \\ AR \cdot BP \cdot CQ = AQ \cdot BR \cdot CP.$$

Eben

Eben diese Gleichung wurde vorhin gefunden; also ist  $PQB$  eine grade Linie.

*Zweiter Beweis.* Es sey  $AEBFCD$  ein Sechseck im Kreise, in dessen Ecken  $A, C, B$  die Ecken des Dreiecks  $ABC$  liegen, so schneiden sich nach (§. 215.) die Seiten  $AE$  und  $FC$ ,  $EB$  und  $CD$ ,  $BF$  und  $DA$  in einer graden Linie. Dieses geschieht immer, welches auch das Sechseck seyn mag. Also auch, wenn die Seiten  $FC, DA, EB$  Null sind. Wenn aber  $FC, DA$  und  $EB$  Null sind, so fallen ihre Verlängerungen in die Tangenten  $CA, AP$  und  $BQ$ , hingegen die Seiten  $AE, BF$  und  $CD$  fallen in  $AB, BC$  und  $CA$ . Also ist alsdann der Durchschnits-Punct von  $AE$  und  $FC$  der Punct  $R$ , von  $EB$  und  $CD$  der Punct  $Q$ , und von  $BF$  und  $DA$  der Punct  $P$ . Folglich liegen auch die Puncte  $P, Q$  und  $R$  in grader Linie.

282.

*Lehrsatz.* Wenn die Ecken eines eingeschriebenen Vierecks in den Seiten eines umschriebenen Vierecks liegen, wie die Vierecke  $ABCD$  und  $FGHI$ . (Fig. 150.), so liegen

I. die Durchschnits-Puncte  $M, N, P, Q$  der gegenüber liegenden Seiten beider Vierecke in einer und derselben graden Linie  $MQNP$ .

II. Die Durchschnits-Puncte der Diagonalen und je zweier gegenüber liegender Seiten des eingeschriebenen Vierecks liegen in den Diagonalen des umschriebenen, nemlich  $K$  und  $N$  liegen in der Diagonal  $HF$ , und  $K$  und  $M$  in der Diagonal  $LG$ , so daß  $FKHN$  und  $LKGM$  grade Linien sind.

III. Die Diagonalen der beiden Vierecke schneiden sich in einem und demselben Puncte  $K$ .

IV. Die Entfernungen derjenigen Durchschnits-Puncte der Seiten und Diagonalen der beiden Vierecke, welche in grader Linie liegen, sind Gleichvielfache; nemlich

$$\frac{FK}{HK} = \frac{FN}{HN}, \frac{LK}{GK} = \frac{LM}{GM} \text{ und } \frac{QM}{PM} = \frac{QN}{PN}.$$

V. Die grade Linie  $XKY$  durch den Mittelpunkt des Kreises und den Durchschnits-Punct der Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks steht auf der graden Linien  $PNQM$ , in welcher sich die gegenüber liegenden Seiten der beiden Vierecke schneiden, senkrecht.

VI. Das Product der Entfernungen der Schnittlinie und des Durchschnits-Punctes der Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks vom Mittel-Puncte des Kreises  $X$ , ist gleich dem Quadrate des Halbmessers, nemlich

$$XK \cdot XY = XA^2.$$

*Beweis.* I. Erstlich, aus der Figur. Diejenigen Winkel zwischen den Seiten und Diagonalen, welche nach (§. 85. I. u. 90.) gleich groß sind, sind in der Figur mit gleichen Buchstaben bezeichnet.

Nun ist  $\frac{AD}{DM}$  so viel als  $\frac{DD_1}{DM} : \frac{DD_1}{AD}$ . Wenn nun  $DD_1$  und  $CC_1$  auf  $AM$  senkrecht sind, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $MDD_1$  und  $MCC_1$  ähnlich. Also ist  $\frac{DD_1}{DM} = \frac{CC_1}{CM}$ .

Wenn ferner  $DD_2$  auf  $BN$  senkrecht ist, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $ADD_1$  und  $CDD_2$  ähnlich, weil, im eingeschriebenen Viereck, die Winkel  $DAB + DCB = 20$  und die Nebenwinkel  $DCD_2 + DCB$  ebenfalls  $= 20$  sind, also, nächst dem rech-

ten Winkel der Winkel  $DAB$  oder  $DAD_1 = BCD_2$  ist. Also ist  $\frac{DD_1}{AD} = \frac{DD_2}{DC}$ , folglich vorhin

$$1. \frac{AD}{DM} = \frac{CC_1}{CM} \cdot \frac{DD_2}{DC} = \frac{DC}{CM} \cdot \frac{CC_1}{DD_2}.$$

Es ist  $\frac{CM}{CB}$  so viel als  $\frac{CC_1}{CB} \cdot \frac{CC_1}{CM}$ . Wenn nun  $CC_2$  auf  $AP$  senkrecht ist, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $ACC_2$  und  $BCC_1$  ähnlich, weil die Winkel bei  $A$  und  $B$  beide gleich  $\alpha + \beta$  sind.

Also ist  $\frac{CC_1}{CB} = \frac{CC_2}{CA}$ ; folglich oben

$$2. \frac{CM}{CB} = \frac{CC_2}{CA} \cdot \frac{CC_1}{CM} = \frac{CM}{CA} \cdot \frac{CC_2}{CC_1}.$$

Es ist  $\frac{CA}{CP}$  so viel als  $\frac{CC_2}{CP} \cdot \frac{CC_2}{CA}$ . Wenn nun  $RR_1$  auf  $AP$  senkrecht ist, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $PRR_1$  und  $PCC_2$  ähnlich. Also ist  $\frac{CC_2}{CP} = \frac{RR_1}{LP}$ , und folglich vorhin

$$3. \frac{CA}{CP} = \frac{RR_1}{RP} \cdot \frac{CC_2}{CA} = \frac{CA}{RP} \cdot \frac{RR_1}{CC_2}.$$

Es ist  $\frac{CR}{RN}$  so viel als  $\frac{RR_2}{RN} \cdot \frac{RR_2}{CR}$ . Wenn nun  $RR_2$  auf  $CN$  senkrecht ist, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $NRR_2$  und  $NDD_2$  ähnlich. Also ist  $\frac{RR_2}{RN} = \frac{DD_2}{DN}$ , und folglich vorhin

$$4. \frac{CR}{RN} = \frac{DD_2}{DN} \cdot \frac{RR_2}{CR} = \frac{CR}{DN} \cdot \frac{DD_2}{RR_2}.$$

Multipliziert man die Gleichungen (1. 2. 3. 4.) mit einander, so erhält man

$$\frac{AD \cdot CM \cdot CA \cdot CR}{DM \cdot CB \cdot CP \cdot RN} = \frac{DC \cdot CC_1 \cdot CM \cdot CC_2 \cdot CA \cdot RR_1 \cdot CR \cdot DD_2}{CM \cdot DD_2 \cdot CA \cdot CC_1 \cdot RP \cdot CC_2 \cdot DN \cdot RR_2}, \text{ oder}$$

$$\frac{AD \cdot CM \cdot CA \cdot CR}{DM \cdot CB \cdot CP \cdot RN} = \frac{DC \cdot CR \cdot RR_1}{DN \cdot RP \cdot RR_2}, \text{ oder}$$

$$5. AD \cdot CM \cdot CA \cdot DN \cdot RP \cdot RR_2 = DM \cdot CB \cdot CP \cdot RN \cdot DC \cdot RR_1.$$

Wenn  $XX_1$  auf  $AD$  und  $XX_2$  auf  $BC$  senkrecht ist, so halbieren  $XX_1$  und  $XX_2$  die Winkel  $DXA$  und  $CXB$ , und die Linien  $AD$  und  $BC$  (§. 253. VI.). Die Winkel  $DXA$  und  $CXB$  am Mittelpunkte sind aber doppelt so groß als die Winkel  $DBA = \beta$  und  $CAB = \delta$  am Umfange, auf gleichen Bogen (§. 273.). Also sind die Winkel  $X_1XA$  und  $X_2XB$  gleich  $\beta$  und  $\delta$ . Eben das sind die Winkel  $RAR_1$  und  $RCH_2$ . Also sind die rechtwinkligen Dreiecke  $X_1XA$ ,  $R_1AR$  und  $X_2XB$ ,  $R_2CR$  ähnlich. Folglich ist

$$\frac{AX_1}{AX} = \frac{RR_1}{AR} \text{ und } \frac{BX_2}{BX} = \frac{RR_2}{CR};$$

und wenn man diese beiden Gleichungen in einander dividirt,

$$\frac{AX_1}{BX_2} \cdot \frac{BX}{AX} = \frac{RR_1}{RR_2} \cdot \frac{CR}{AR};$$

oder, weil die Halbmesser  $BX$  und  $AX$  einander gleich, und  $AX_1$ ,  $BX_2$  gleich  $\frac{1}{2} AD$  und  $\frac{1}{2} BC$  sind,

$$6. \frac{AD}{BC} = \frac{RR_1}{RR_2} \cdot \frac{CR}{AR}.$$

Nun sind die Dreiecke  $\triangle ACR$  und  $\triangle CDR$  ähnlich, weil die Winkel  $\angle DAC$  und  $\angle DCR$  beide gleich  $\alpha$  und die Winkel  $\angle ACR$  und  $\angle CDR$  beide gleich  $\alpha + \beta$  sind. Ähnlichliegende Seiten sind  $AC$ ,  $AR$  und  $CD$ ,  $CR$ . Also ist  $\frac{CR}{AR} = \frac{CD}{AC}$ , folglich in (6.)

$$\frac{AD}{BC} = \frac{RR_1}{RR_2} \cdot \frac{CD}{AC}, \text{ oder}$$

$$7. AD \cdot AC \cdot RR_2 = BC \cdot CD \cdot RR_1.$$

Dividirt man (5.) durch (7.), so erhält man

$$\frac{AD \cdot CM \cdot CA \cdot DN \cdot RP \cdot RR_2}{AD \cdot CA \cdot RR_2} = \frac{DM \cdot CB \cdot CP \cdot RN \cdot DC \cdot RR_1}{CB \cdot DC \cdot RR_1},$$

oder

$$8. DN \cdot CM \cdot RP = DM \cdot CP \cdot RN.$$

Diese Gleichung ist nach (§. 212.) die Bedingung, unter welcher  $MNP$  eine grade Linie ist. Denn es sey  $CN_1$  mit  $DN$  parallel, so sind die Dreiecke  $\triangle MDN$ ,  $\triangle MCN_1$  und  $\triangle PRN$ ,  $\triangle PCN_1$  ähnlich; also ist

$$\frac{DM}{DN} = \frac{CM}{CN_1} \text{ und } \frac{CP}{RP} = \frac{CN_1}{RN}.$$

Multiplirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man  $\frac{DM \cdot CP}{DN \cdot RP} = \frac{CM}{RN}$ , oder

$$9. DN \cdot CM \cdot RP = DM \cdot CP \cdot RN.$$

Diese nemliche Gleichung fand für die drei Punkte  $M, N, P$  statt (8.). Also ist  $MNP$  eine grade Linie; das heißt: die Durchschnitts-Punkte  $N$  und  $M$  der Seiten des eingeschriebenen Vierecks,  $AD$ ,  $BC$  und  $DC$ ,  $AB$ , liegen mit dem Durchschnitts-Punkte  $P$  der beiden Seiten  $HG$  und  $LF$  des umschriebenen Vierecks in einer graden Linie.

Nun gilt aber nothwendig auch von den andern beiden Seiten des umschriebenen Vierecks das Nemliche, weil zwischen den Seiten weiter kein Unterschied ist. Also liegen auch die Punkte  $M, N, Q$  in einer graden Linie.

Folglich liegen alle vier Durchschnitts-Punkte  $M, N, P, Q$  der gegenüber liegenden Seiten des eingeschriebenen und des umschriebenen Vierecks in einer graden Linie; welches das Erste war.

Zweitens aus dem Satze (§. 215.). Es sey  $A_0DCfB$  ein Sechseck im Kreise, in dessen Ecken  $A, D, C, B$  die Ecken des Vierecks  $ADCB$  liegen, so schneiden sich, wie in (§. 215.) bewiesen, die Seiten  $A_0$  und  $Cf$ ,  $eD$  und  $fB$ ,  $DC$  und  $BA$  in einer graden Linie. Dieses geschieht immer, welches auch das Sechseck seyn mag. Also auch wenn diese oder jene Seiten Null sind.

Es sey  $A_0$  und  $Cf$  gleich Null, so fällt die Seite  $A_0$  in die Tangente  $FAL$  und die Seite  $Cf$  in die Tangente  $GCP$ , hingegen die Seite  $eD$  fällt in  $ADN$  und  $fB$  in  $BCN$ . Also schneiden sich auch  $FAL$  und  $GCP$  mit  $ADN$ ,  $BCN$  und  $DCM$ ,  $ABM$  in grader Linie; das heißt: die drei Punkte  $P, N, M$  liegen in grader Linie.

Es sey  $eD$  und  $fB$  gleich Null, so fällt die Seite  $eD$  in die Tangente  $LDQ$  und die Seite  $fB$  in die Tangente  $FBQ$ , hingegen die Seite  $A_0$  fällt in  $ADN$  und die Seite  $Cf$  in  $BCN$ . Also schneiden sich auch  $ADN$  und  $BCN$  mit  $LDQ$ ,  $FBQ$  und  $DCM$  und  $ABM$  in grader Linie, das heißt: die drei Punkte  $N, Q, M$  liegen in grader Linie.



Also liegen alle vier Punkte  $M, N, P, Q$  in grader Linie; welches wiederum das Erste war.

II. Der Satz (I.) hängt nicht von der Gestalt der beiden Vierecke ab, sondern gilt für alle Vierecke, wenn nur die Ecken des eingeschriebenen in den Seiten des umschriebenen liegen.

Nun stelle man sich vor, z. B. die Seite  $AB$  bleibe die nemliche, die Winkel  $DAB$  und  $CBA$  aber würden immer kleiner, so rückt der Durchschnits-Punct  $N$  der Seiten  $AD$  und  $BC$ , und folglich die Linie  $MNPQ$  dem Kreise immer näher und der Winkel  $H$  wird immer stumpfer. Fällt  $C$  mit  $D$  zusammen, so liegt der Durchschnits-Punct  $N$  in dem Umfange des Kreises und  $LHG$  ist eine grade Linie, nemlich eine Tangente. Also fallen alsdann  $PG$  und  $QL$  in eine und dieselbe grade Linie: folglich ist in diesem Falle die Linie  $MNPQ$  eine Tangente des Kreises an dem Durchschnits-Puncte von  $AD$  und  $BC$ .

Nehmen die Winkel  $DAB$  und  $CBA$  noch weiter ab, so schneiden sich  $AD$  und  $BC$  innerhalb des Kreises; folglich geht alsdann die Linie  $MNPQ$  durch den Kreis und die Linien  $LH$  und  $GH$  verwechseln ihre Lage.

Fällt endlich  $AD$  in  $AC$  und  $BC$  in  $BD$ , so liegt der Durchschnits-Punct  $N$  in  $K$ ,  $LH$  fällt in  $GH$  und  $GH$  in  $LH$ , also  $P$  in  $L$  und  $Q$  in  $G$ . Die Linie  $MNPQ$  geht also nunmehr durch  $K$  und hat die Lage  $MKLG$ . Also ist auch  $MKLG$  eine grade Linie.

Ganz auf dieselbe Weise, wenn man die Seite  $AD$  beibehält und die Winkel  $CDA$  und  $BAD$  so lange abnehmen läßt, bis  $CD$  in  $BD$  und  $BA$  in  $CA$  fällt, wird bewiesen, daß auch  $NHKE$  eine grade Linie ist.

Also liegen auch die Durchschnits-Puncte der Diagonalen und zweier gegenüber liegender Seiten des eingeschriebenen Vierecks in den Diagonalen des umschriebenen, nemlich  $K$  und  $N$  in  $HF$ , und  $K$  und  $M$  in  $LG$ ; welches das Zweite war.

III. Da auf diese Weise die Diagonalen des umschriebenen Vierecks  $HF$  und  $LG$ , beide durch den Durchschnits-Punct  $K$  der Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks gehen, so schneiden sich die Diagonalen der beiden Vierecke in einem und demselben Puncte; welches das Dritte war.

IV. Nimmt man die Verlängerung der Seiten des umschriebenen Vierecks  $FGHL$  bis  $P$  und  $Q$ , zu denselben hinzu, so ist das Viereck ein vollständiges (§. 216.). Seine drei Diagonalen sind  $FH$ ,  $LG$  und  $PQ$ .

Man vergleiche dieses Viereck  $FPHQ$  mit dem Viereck  $FPHQ$  (Fig. 125.). In beiden Figuren stehen gleiche Buchstaben an gleichen Stellen; also ist vermöge (§. 217.)

$$10. \frac{FK}{HK} = \frac{FN}{HN},$$

$$11. \frac{LK}{GK} = \frac{LM}{GM},$$

$$12. \frac{QM}{PM} = \frac{QN}{PN};$$

welches das Vierte war.

V. Die Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks,  $AC$  und  $BD$  sind Sehnen des Kreises, ihr Durchschnits-Punct ist  $K$ , und die grade Linie, in welcher sich die Tangenten an ihren End-Puncten schneiden, ist  $PQ$ . Auf dieser Linie steht zu Folge (§. 279. II.).

die Linie  $XKY$  durch den Mittel-Punct des Kreises und den Durchschnits-Punct der Sehnen senkrecht; welches das Fünfte war.

VI. Das Product der Entfernungen der Linie  $PQ$  und des Durchschnits-Punctes der Sehnen,  $K$ , vom Mittel-Puncte des Kreises, ist nach (§. 279. III) gleich dem Quadrate des Halbmessers, so daß

$$XK \cdot XY = XA^2;$$

welches das Sechste war.

## 283.

**Lehrsatz.** In jedem eingeschriebenen Fünfecke schneiden sich je zwei auf einander folgende Seiten, zwischen welchen eine liegt, und die fünfte Seite mit der Tangente an der gegenüber liegenden Ecke, in einer und derselben graden Linie.

Z. B. in (Fig. 151.) schneiden sich die auf einander folgenden Seiten  $BC$ ,  $DE$  und  $CD$ ,  $BA$ , desgleichen die fünfte Seite  $AE$  des eingeschriebenen Fünfecks  $ABCDE$  und die Tangente an der  $AE$  gegenüber liegenden Ecke  $C$ , in einer und derselben graden Linie  $MQN$ . Eben so schneiden sich  $CD$  und  $EA$ ,  $DE$  und  $AB$ , und  $BC$  nebst der Tangente an  $E$ , in einer graden Linie; und so weiter.

**Beweis.** Es sey  $ABCfDE$  ein eingeschriebenes Sechseck, in dessen Ecken die Ecken des Fünfecks  $ABCDE$  liegen, so schneiden sich, wie in (§. 215.) bewiesen, die gegenüber liegenden Seiten  $AB$  und  $Df$ ;  $BC$  und  $DE$ ,  $Cf$  und  $AE$  in einer graden Linie. Dieses geschieht immer, welches auch das Sechseck seyn mag. Also auch, wenn eine Seite desselben Null ist. Es sey z. B. die Seite  $Cf$  gleich Null, so fällt dieselbe in die Tangente  $CN$  an  $C$ , hingegen die Seite  $Df$  fällt in  $DCM$ . Also schneiden sich auch  $AE$  und  $CN$ ,  $BC$  und  $DE$  und  $DCM$  und  $AB$  in einer graden Linie  $MQN$ ; und eben so, wenn eine der andern Seiten Null ist.

## 284.

**Lehrsatz.** Wenn sich beliebige Sehnen eines Kreises in einem und demselben Puncte schneiden, wie  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  etc. (Fig. 152.), so liegen

I. die Durchschnits-Puncte der graden Linien, welche die Endpuncte zweier Sehnen mit einander verbinden, z. B. der durch  $(BC)$  bezeichnete Durchschnits-Punct der Linien  $B_1C_1$  und  $B_2C_2$ , der Durchschnits-Punct  $(CD)$  der Linien  $C_1D_1$  und  $C_2D_2$ , der Durchschnits-Punct  $(CE)$  der Linien  $C_1E_1$  und  $C_2E_2$ , der Durchschnits-Punct  $(BD)$  der Linien  $B_1D_1$  und  $B_2D_2$  u. s. w. mit den Durchschnits-Puncten  $B$ ,  $C$ ,  $D$  etc. der Tangenten an den Endpuncten der Sehnen sämmtlich in einer und derselben graden Linie  $BCDE$ ....

II. Diese Schnittlinie  $BCDE$ .... steht auf der graden Linie  $MKX$  durch den Mittel-Punct des Kreises  $M$  und den Durchschnits-Punct der Sehnen  $K$ , senkrecht.

III. Das Product ihrer Entfernung  $XV$  und der Entfernung  $KM$  des Durchschnits-Punctes der Sehnen vom Mittel-Puncte des Kreises, ist dem Quadrate des Halbmessers gleich.

**Beweis.** I. Zu Folge (§. 279. I.) liegen die Durchschnits-Puncte  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,... der Tangenten an den Endpuncten beliebiger Sehnen eines Kreises, die sich in einem Puncte schneiden, in einer und derselben graden Linie, und zu Folge (§. 282. I.) liegen die Durchschnits-Puncte der Seiten jedes einge-

umschriebenen Vierecks und der durch die Endpunkte seiner Diagonalen gehenden Seiten des umschriebenen Vierecks, also z. B. für das eingeschriebene Viereck  $B_1F_1B_2F_2$  und das umschriebene Viereck  $B_1B_2F_3F_4$ , die Durchschnitte der Linien  $B_1F_1$  und  $B_2F_2$ ,  $B_1F_2$  und  $B_2F_1$  mit den Durchschnitten  $B$  und  $F$  in einer graden Linie. Also liegen sämtliche Punkte  $A, B, C, D \dots (AB), (BC), (CD), (AD)$  etc., weil das Nemliche von allen Vierecken gilt, deren Diagonalen zwei beliebige Sehnen sind, in einer und derselben graden Linie  $ABCD \dots$ ; welches das Erste war.

II. Nach (§. 279. H.) steht die Schnittlinie  $ABCD \dots$  auf der Linie  $MKX$  durch den Mittel-Punct des Kreises  $M$  und den Durchschnits-Punct der Sehnen  $K$ , senkrecht; welches das Zweite war.

III. Und nach (§. 279. III.) ist das Product der Entfernung  $XM$  der Schnittlinie, und der Entfernung  $KM$  des Durchschnits-Punctes der Sehnen vom Mittel-Puncte des Kreises, dem Quadrate  $MZ^2$  des Halbmessers gleich; welches das Dritte war.

## 285.

*Zusatz.* Wenn der Durchschnits-Punct der Sehnen,  $K$  (Fig. 152.) außerhalb des Kreises liegt, so geht die Schnittlinie  $ABCD \dots$  durch den Kreis. Sie steht immer auf der graden Linie  $MK$  senkrecht und es ist

$$XM \cdot KM = ZM^2.$$

## 286.

*Lehrsatz.* Wenn ein beliebiges Sechseck einem Kreise umschrieben ist, und ein anderes Sechseck, mit den Ecken in den Punkten wo die Seiten des umschriebenen Sechsecks die Kreislinie berühren, ist in den Kreis eingeschrieben, so schneiden sich

I. die Tangenten an den Punkten, in welchen die Diagonalen durch gegenüber liegende Ecken des umschriebenen Sechsecks die Kreislinie treffen, und die gegenüber liegenden Seiten des eingeschriebenen Sechsecks in den nemlichen Punkten; nemlich die Tangenten  $PP_1, PP_2$  (Fig. 153.) und die Seiten  $\beta\alpha, \delta\epsilon$ ; die Tangenten  $QQ_1, QQ_2$  und die Seiten  $\gamma\delta, \alpha\phi$ ; die Tangenten  $RR_1, RR_2$  und die Seiten  $\beta\gamma, \phi\epsilon$  schneiden sich in den nemlichen Punkten  $P, Q, R$ .

II. Diese gemeinschaftlichen Durchschnits-Punkte  $P, Q, R$  liegen in grader Linie.

III. Die drei Diagonalen durch gegenüber liegende Ecken des umschriebenen Sechsecks schneiden sich in einem und demselben Punkte; nemlich die Diagonalen  $AD, BE, CF$  in einem und demselben Punkte  $K$ .

IV. Die Schnittlinie  $PQR$  steht auf der graden Linie  $MKX$  durch den Mittelpunct des Kreises  $M$  und den Durchschnit  $K$  der Diagonalen des umschriebenen Sechsecks senkrecht.

V. Das Product der Entfernungen  $MX$  und  $MK$  der Schnittlinie und des Durchschnits-Punctes der Diagonalen des umschriebenen Sechsecks vom Mittel-Puncte des Kreises, ist gleich dem Quadrate des Halbmessers  $MZ$ .

*Beweis.* I. Wenn man die Seiten des eingeschriebenen Sechsecks  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\phi$  als Sehnen betrachtet, so sind die Punkte  $P, Q, R$  die Durchschnits-Punkte dieser Sehnen. Z. B.  $P$  ist der

Durchschnitts-Punct der Sehnen  $\alpha\beta$  und  $\delta\epsilon$ . Die Seiten des umschriebenen Sechsecks aber sind Tangenten an den End-Puncten der Sehnen, z. B.  $AB$ ,  $AF$  sind Tangenten an den End-Puncten der Sehne  $\alpha\beta$ ;  $ED$ ,  $CD$  sind Tangenten an den End-Puncte der Sehne  $\delta\epsilon$  u. s. w. Die Durchschnitte dieser Tangenten,  $A$  und  $D$  liegen in der Diagonal  $AD$ .

Nun durchschneiden sich die Tangenten an den End-Puncten beliebiger Sehnen, die durch einen und denselben Punct  $P$  gehen, der Punct  $P$  liege innerhalb, oder wie hier, außerhalb des Kreises, also z. B. auch die Tangenten an den End-Puncten der Sehnen  $\alpha\beta$ ,  $\delta\epsilon$  und jeder andern beliebigen Sehne, wie  $GL$ , die durch  $P$  geht, in *einer und derselben* graden Linie (§. 279. I. und §. 280. II.), also alle die Tangenten an den End-Puncten der durch  $P$  gehenden Sehnen  $\alpha\beta$ ,  $\delta\epsilon$ ,  $GL$  etc. in der graden Linie  $AD$ ; denn die Tangenten an  $\alpha$  und  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\epsilon$  schneiden sich in dieser Linie.

Gesetzt nun die Sehne  $GL$  rücke noch weiter nach  $A$ , so fallen zuletzt  $G$  und  $L$  in einen Punct zusammen, also auch die Tangenten an  $G$  und  $L$ , und zwar in ihren Durchschnitt. Da nun der Durchschnitt der Tangenten immer in der Linie  $AD$  liegt, so liegt er auch noch in derselben, wenn  $G$  und  $L$  zusammen fallen: folglich *berührt* eine grade Linie  $PP_1$  aus  $P$  die Kreislinie in der Linie  $AD$ . Eben so  $PP_2$ .

Das Nemliche gilt von den Puncten  $Q$  und  $R$ . Tangenten aus  $Q$  *berühren* die Kreislinie in der Diagonal  $FC$ , und Tangenten aus  $R$  in der Diagonal  $EB$ .

Also durchschneiden sich, umgekehrt, die Tangenten an den Puncten, in welchen die Diagonalen durch gegenüber liegende Ecken des umschriebenen Sechsecks die Kreislinie treffen und die gegenüber liegenden Seiten des eingeschriebenen Sechsecks in den nemlichen Puncten; welches das Erste war.

II. Da  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  die Durchschnitts-Puncte gegenüber liegender Seiten des eingeschriebenen Sechsecks sind, so liegen sie in grader Linie (§. 215.); welches das Zweite war.

III. Da  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  in grader Linie liegen, so schneiden sich alle Sehnen, welche so liegen, daß Tangenten an ihren End-Puncten in der Linie  $PQR$  zusammentreffen, in einem und demselben Puncte (§. 279. I.). Und da nun die Diagonalen  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  solche Sehnen sind, so schneiden sie sich in einem und demselben Puncte  $K$ ; welches das Dritte war.

IV. Da die Schnittlinie  $PQR$  eine solche ist, in welcher Tangenten an den Endpuncten von Sehnen, welche sich in einem Puncte schneiden, zusammentreffen; so steht sie auf der graden Linie  $MKX$  durch den Mittel-Punct des Kreises und den Durchschnitts-Punct der Sehnen senkrecht (§. 279. II.); welches das Vierte war.

V. Desgleichen ist das Product der Entfernungen dieser Schnittlinie und des Durchschnitts-Punctes der Sehnen vom Mittel-Puncte des Kreises, gleich dem Quadrate des Halbmessers (§. 279. III.); welches das Fünfte war.

## 287.

**Zusatz.** Ein umschriebenes Fünfeck kann man als ein umschriebenes Sechseck betrachten, von dessen Seiten zwei in grader Linie und beide in einer der Seiten des Fünfecks liegen.

Diese beiden Seiten stoßen dann in dem Berührungs-Puncte der Seiten des Fünfecks zusammen. Z. B. das Fünfeck  $ABCDE$  (Fig. 154.) kann man als ein Sechseck  $A\alpha BCDE$ , oder  $AB\beta CDE$  oder  $ABC\gamma DE$  u. s. w. betrachten,

Der Satz (§. 286.) gilt also auch für das umschriebene Fünfeck, und es folgt z. B., daß sich je drei grade Linien durch die Ecken und einen Berührungs-Punct des Fünfecks in einem und demselben Puncte schneiden, nemlich

$$\begin{aligned} AC, BD, E\beta & \text{ in } P, \\ BD, CE, A\gamma & \text{ in } Q, \\ CE, DA, B\delta & \text{ in } R, \\ DA, EB, C\epsilon & \text{ in } S, \\ EB, AC, D\alpha & \text{ in } T. \end{aligned}$$

## 288.

**Lehrsatz.** Wenn von drei beliebigen Kreisen, je zwei, außerhalb und innerhalb der Figur von graden Linien berührt werden, wie (Fig. 155.) so liegen

I. die Durchschnitte  $P, Q, R$  der äußern Tangenten in grader Linie.

II. Die Durchschnitte  $p, q, r$  der innern Tangenten liegen mit den Mittel-Puncten je zweier berührten Kreise, in graden Linien; nemlich  $ApB, BqC$  und  $CrA$  sind grade Linien.

III. Grade Linien  $pC, qA, rB$  durch die Durchschnitte der innern Tangenten  $p, q, r$  und die Mittel-Puncte  $C, A, B$  der dritten Kreise schneiden sich in einem und demselben Puncte  $M$ .

IV. Die Entfernungen der Durchschnitte der äußern und innern Tangenten von den Mittel-Puncten der berührten Kreise, mit welchen sie in graden Linien liegen, sind Gleich-Vielfache; nemlich

$$\frac{AP}{BP} = \frac{Ap}{Bp}, \quad \frac{BQ}{CQ} = \frac{Bq}{Cq} \quad \text{und} \quad \frac{AR}{CR} = \frac{Ar}{Cr}.$$

V. Je zwei Durchschnitte der innern Tangenten und ein Durchschnitt der äußern sind in grader Linie; nemlich  $pqR, rqP$  und  $prQ$  sind grade Linien.

**Beweis.** Nach (§. 266.) sind die Linien  $ABP, BCQ$  und  $ACH$  durch die Mittel-Puncte je zweier berührten Kreise und durch die Durchschnitte der äußern Tangenten, grade. Wenn nun  $AD$  und  $BE$  auf  $DP$  senkrecht sind, also nach (§. 260. III.) durch die Berührungs-Puncte  $D$  und  $E$  der Kreise um  $A$  und  $B$  mit der Tangente  $DP$  gehen, so sind die rechtwinkligen Dreiecke  $ADP$  und  $BEP$  ähnlich. Also ist, wenn man die Halbmesser der Kreise um  $A, B$  und  $C$  durch  $a, b$  und  $c$  bezeichnet,

$$\frac{AP}{BP} = \frac{a}{b},$$

und eben so

$$\frac{BQ}{CQ} = \frac{b}{c} \quad \text{und} \quad \frac{CR}{AR} = \frac{c}{a}.$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{AP \cdot BQ \cdot CR}{BP \cdot CQ \cdot AR} = 1,$$

oder

$$AP \cdot BQ \cdot CR = BP \cdot CQ \cdot AR.$$

Dieses ist nach (§. 212.) die Bedingung, unter welcher die drei Punkte  $P, Q, R$  in grader Linie liegen. Denn es sey  $CG$  mit  $AP$  parallel, so sind die Dreiecke  $BPQ, CGQ$  und  $APR, CGR$  ähnlich. Also ist

$$\frac{BQ}{BP} = \frac{CQ}{CG} \text{ und } \frac{AP}{AR} = \frac{CG}{CR}.$$

Multipliziert man die beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{BQ \cdot AP}{BP \cdot AR} = \frac{CQ}{CR},$$

oder

$$AP \cdot BQ \cdot CR = BP \cdot CQ \cdot AR;$$

wie oben. Also liegen die drei Durchschnits-Punkte  $P, Q, R$  der äußern Tangenten in einer graden Linie; welches das Erste war.

II. Nach der Voraussetzung liegen die innern Tangenten je zweier Kreise in graden Linien; also sind z. B.  $D_1pE_1$  und  $D_2pE_2$  grade Linien; folglich sind die Winkel  $D_1pD_2$  und  $E_1pE_2$  gleich. Nach (§. 265.) aber halbiren die graden Linien  $pA$  und  $pB$ , durch die Durchschnits-Punkte zweier Tangenten und die Mittel-Punkte der berührten Kreise, die Winkel, welche die Tangenten einschließen. Also sind auch die Winkel  $D_1pA$  und  $E_1pB$  gleich; folglich sind sie Scheitel-Winkel und folglich ist  $ApB$  eine grade Linie. Eben so  $BqC$  und  $CrA$ .

III. Für die inneren Tangenten sind z. B. die rechtwinkligen Dreiecke  $AD_1p$  und  $BE_1p$  ähnlich. Also ist

$$\frac{Ap}{Bp} = \frac{AD_1}{BE_1} = \frac{a}{b},$$

und eben so

$$\frac{Bq}{Cq} = \frac{b}{c} \text{ und } \frac{Cr}{Ar} = \frac{c}{a}.$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{Ap \cdot Bq \cdot Cr}{Bp \cdot Cq \cdot Ar} = 1,$$

oder

$$Ap \cdot Bq \cdot Cr = Bp \cdot Cq \cdot Ar.$$

Dieses ist nach (§. 213.) die Bedingung, unter welcher sich die Schnittlinien  $Aq, Br, Cp$  des Dreiecks  $ABC$  in einem und demselben Punkte schneiden; welches die zweite Behauptung beweiset.

IV. Da z. B.  $\frac{AP}{BP} = \frac{a}{b}$  (I.) und auch  $\frac{Ap}{Bp} = \frac{a}{b}$  war (II.), so ist

$$\frac{AP}{BP} = \frac{Ap}{Bp} \text{ und eben so } \frac{BQ}{CQ} = \frac{Bq}{Cq}, \frac{AR}{CR} = \frac{Ar}{Cr};$$

welches das Dritte war.

V. Wenn man annimmt  $prQ$  sey eine grade Linie, und zwar die dritte Diagonal des vollständigen Vierecks  $ABMC$ , so muß, zu Folge (§. 217.), der Punkt  $Q$  von  $B$  und  $C$  so weit entfernt seyn, daß

$$\frac{BQ}{CQ} = \frac{Bq}{Cq}$$

ist. Dieses ist hier wirklich der Fall. Also ist  $prQ$  eine grade Linie. Eben so wird bewiesen, daß  $pqR$  und  $rqP$  grade Linien sind; welches das Vierte war.

## 289.

**Lehrsatz.** Wenn sich zwei Kreise berühren, so sind alle, in graden Linien durch den Berührungspunkt liegenden Sehnen von einander Gleichvielfache; die Dreiecke, welche je zwei in grader Linie liegende Sehnen, in den beiden Kreisen, mit den Verbindungs-Linien ihrer Endpunkte einschließen, sind ähnlich, und die Verbindungs-Linien der Endpunkte der Sehnen sind parallel.

Z. B. in (Fig. 156.) ist  $\frac{AC}{BC} = \frac{EC}{DC}$ , die Dreiecke  $ABC$  und  $EDC$  sind ähnlich, und  $AB$  und  $DE$  sind parallel.

**Beweis.** Wenn  $M$  und  $N$  die Mittelpunkte der beiden Kreise sind, so ist  $MCN$  eine grade Linie (§. 261.). Also sind die Scheitel-Winkel  $MCA$  und  $NCE$  gleich. Folglich sind die gleichschenkligen Dreiecke  $AMC$  und  $ENC$  ähnlich. Also ist  $\frac{AC}{EC}$

$= \frac{MC}{NC}$ . Eben so sind die gleichschenkligen Dreiecke  $BMC$  und

$DNC$  ähnlich und folglich ist  $\frac{BC}{DC} = \frac{MC}{NC}$ . Mithin ist  $\frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC}$ ,

oder  $\frac{AC}{BC} = \frac{EC}{DC}$ ; welches das Erste war.

Da nun in den Dreiecken  $ACB$  und  $DCE$  die Scheitel-Winkel  $ACB$  und  $DCE$  zwischen gleichvielfachen Seiten, gleich sind, so sind die Dreiecke  $ABC$  und  $EDC$  ähnlich; welches das Zweite war.

Und da die Dreiecke  $ABC$  und  $EDC$  ähnlich sind, so sind sie gleichwinklig und folglich die Wechselwinkel  $A$  und  $E$ ,  $B$  und  $D$  gleich; und folglich ist  $AB$  mit  $DE$  parallel; welches das Dritte war.

## 290.

**Lehrsatz.** Wenn ein Kreis  $pqr$  (Fig. 157.) drei andere Kreise  $UVW$ ,  $\alpha\beta\gamma$  und  $\delta\epsilon\varphi$  zugleich berührt, oder, was das nemliche ist, wenn ein concentrischer, durch den Mittelpunkt  $A$  des kleinsten Kreises  $UVW$  gehender Kreis  $PQR$ , zwei mit  $\alpha\beta\gamma$  und  $\delta\epsilon\varphi$  concentrische Kreise  $HGI$  und  $DEF$ , deren Halbmesser um den Halbmesser des kleinsten Kreises kleiner sind, berührt, und  $ADF$ ,  $AGI$  sind grade Linien aus  $A$ , durch die Berührungspunkte  $D$  und  $G$  der letztgenannten Kreise, so sind die Tangenten  $FL$  an  $F$  und  $IM$  an  $I$ , parallel, und wenn  $AK$  und  $AN$  Tangenten aus  $A$  an den Kreisen  $HGI$  und  $DEF$  sind, so ist

$$\frac{AK^2}{AN^2} = \frac{AM}{AF} = \frac{AI}{AL}.$$

**Beweis.** Die drei Dreiecke  $AGD$ ,  $IGH$  und  $FED$  sind ähnlich (§. 289.). Also sind die Winkel  $DEF$ ,  $DGA$  und  $GHI$ ,  $GDA$  gleich. Ferner sind die Winkel am Umfange  $E$  und  $H$  und die Winkel zwischen den Sehnen  $DF$ ,  $GI$  und den Tangenten  $FL$ ,  $IM$  gleich, nemlich

$$DEF = AFL \text{ und } GHI = AIM \text{ (§. 275. 1.)}$$

Also ist auch

$$AFL = DGA \text{ und } AIM = GDA;$$

Mithin haben die Dreiecke  $ALF$  und  $AIM$ , ausser dem gemeinschaftlichen Winkel  $A$ , noch einen zweiten Winkel mit dem Dreieck  $AGD$  gemein. Fölglich sind sie beide dem Dreieck  $AGD$  und fölglich auch einander ähnlich. Mithin sind die Tangenten  $LF$  und  $IM$  parallel, welches das Erste war.

Wegen der ähnlichen Dreiecke  $AGD$  und  $AIM$  ist  $\frac{AG}{AD} = \frac{AM}{AI}$ , oder  $AG \cdot AI = AD \cdot AM$ .

Nun ist nach (§. 277. Gl. 1.) für die Tangenten  $AN$ ,  $AK$  und die Sehnen  $ADF$  und  $DGI$ ,

$$AN^2 = AD \cdot AF \text{ und } AK^2 = AG \cdot AI.$$

Also ist

$$\frac{AK^2}{AN^2} = \frac{AG \cdot AI}{AD \cdot AF}.$$

Es war aber vorhin  $AG \cdot AI = AD \cdot AM$ ; also ist

$$\frac{AK^2}{AN^2} = \frac{AD \cdot AM}{AD \cdot AF} = \frac{AM}{AF},$$

und auch, weil die Dreiecke  $ALF$  und  $AIM$  ähnlich sind,

$$\frac{AK^2}{AN^2} = \frac{AI}{AL},$$

welches das Zweite war \*).

### III. Von der Größe der Kreislinien und Kreisflächen.

291.

**Lehrsatz.** Beliebige Bogen in einem und demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen, die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte und die Ausschnitte sind Gleich-Vielfache.

Z. B. wenn in (Fig. 158.) der Bogen  $ABC$  das  $m$ fache des Bogens  $ADB$  ist, wo  $m$  seyn kann, was man will, eine ganze Zahl, oder ein Bruch, oder irrational, so ist auch der Winkel  $AMC$  das  $m$ fache des Winkels  $AMB$  und der Ausschnitt  $AMC$  ist das  $m$ fache des Ausschnitts  $AMB$ , und umgekehrt.

**Beweis.** Es sey zuerst  $m$  rational, also etwa ein Bruch, worunter schon der Fall eines ganzzahligen  $m$ , wenn nemlich der Nenner in den Zähler aufgeht, mit begriffen ist.  $AD$  sey derjenige Theil des Bo-

---

\*) Nach diesem Lehrsatze läßt sich leicht ein Kreis zeichnen, welcher drei gegebene Kreise berührt, mit welcher, und ähnlichen Aufgaben, sich die Geometer, seit Apollonius, vielfältig beschäftigt haben. Es giebt eine Menge von Auflösungen solcher Aufgaben, und besonders der Aufgabe von dem Kreise der drei andere berührt, z. B. von Vieta, Descartes, L'Hospital, Lambert, Euler, Cauchy, Hachette, Gergonne etc. Der obige Lehrsatz, nebst Beweis, ist von Cauchy.



gens  $AB$ , welcher in  $AB$  und  $AC$  zugleich auf-  
geht, z. B.  $p$ mal in  $AB$  und  $q$ mal in  $AC$  enthalten ist.  
Alsdann sind alle, zu gleichen Bogen  $AD$ ,  $DE$  etc.  
gehörige Winkel und Ausschnitte, wie  $AMD$ ,  $DME$  etc.  
einander gleich, und umgekehrt (§. 249.). Also ist  
auch der Winkel und der Ausschnitt  $AMD$  in dem Win-  
kel und Ausschnitt  $AMB$ ,  $p$ mal, und in dem Winkel und  
Ausschnitt  $AMC$   $q$ mal enthalten, und umgekehrt. Also  
sind, in dem Falle wenn  $m$  rational ist, zu einander  
gehörige Bogen, Winkel und Ausschnitte,  
Gleichvielfache.

Nun wachsen Bogen, Winkel und Ausschnitte  
immer zugleich, weil überall zu einem grössern  
Bogen ein größerer Winkel und Ausschnitt gehört,  
und umgekehrt. Nie nimmt eine von diesen  
drei Grössen ab, wenn die andere wächst.  
Also sind Bogen, Winkel und Ausschnitte *gleichför-  
mig zusammengehörige Grössen* (§. 158.). Da nun  
aber, wie vorhin bewiesen, jene drei Grössen Gleich-  
vielfache sind, wenn die Zahl der Vielfachen,  $m$  *ra-  
tional* ist, so sind sie es zu Folge (§. 159.) auch, wenn  
 $m$  *irrational* ist; folglich in *allen* Fällen ohne Aus-  
nahme.

## 292.

*Zusatz.* Aus diesem Grunde sind *Kreisbogen*,  
mit einem bestimmten Halbmesser, das natürliche  
Maass von Winkeln und man kann Winkel auch  
durch die Kreislinie messen, und umgekehrt.

## 293.

*Anmerkung.* Den bestimmten Halbmesser  
nimmt man gewöhnlich der Linien-Einheit, also auch  
der Einheit der Bogenlänge gleich, oder  $= 1$  an.  
In so fern es nur auf Vergleichung von Winkeln un-  
ter sich, nicht von Bogen mit graden Linien  
ankommt, nimmt man zur Einheit der Winkel auch  
den rechten Winkel, also zur Einheit der Bo-  
gen, den vierten Theil des Umfanges an. Den  
rechten Winkel bezeichnet man durch  $\rho$ . Die Einheit  
der Winkel und Bogen theilt man in beliebige gleiche  
Theile, gewöhnlich in 90, in neuerer Zeit auch in 100  
Theile. Ein solcher Theil des Winkels heisst *Grad*,  
Jeden der 90 Grade theilt man in 60, und jeden der

100 Grade in 100 Theile, welche *Minuten* heissen, jede Minute in 60 oder 100 *Secunden*, jede Secunde in 60 oder 100 *Tertien* u. s. w. Die Eintheilung des rechten Winkels in 100 Grade, jeden zu 100 Minuten, jede zu 100 Secunden, jede zu 100 Tertien u. s. w. ist wegen der Uebereinstimmung mit dem *Zahlen Systeme* und der daraus entstehenden Erleichterung der Rechnung offenbar besser. Allein sie ist nicht allgemein angenommen. (Man sehe Rechenkunst §. 269.)

Vergleicht man dagegen die Winkel und Bogen nicht sowohl unter sich, sondern mit dem Halbmesser, so bezeichnet man den zu zwei rechten Winkeln gehörigen Bogen, oder den halben Umfang, für den Halbmesser  $a$ , durch  $\pi$ , den ganzen Umfang, für den Halbmesser  $1$  also durch  $2\pi$  und das Bogen-Maass des rechten Winkels durch  $\frac{1}{2}\pi$ , wo nun  $\pi$  eine Zahl ist, die mit dem Halbmesser und allen übrigen Linien auf einerlei Einheit sich bezieht\*).

## 294.

**Lehrsatz.** Jedes in einen Kreis eingeschriebene Vieleck (§. 247. XI.) ist kleiner als der Kreis und jedes umschriebene Vieleck (§. 247. XII.) grösser.

**Beweis.** Kein Theil des eingeschriebenen Vielecks liegt ausserhalb des Kreises und kein Theil des Kreises ausserhalb des umschriebenen Vielecks. Dagegen liegen Theile des Kreises ausserhalb des eingeschriebenen Vielecks, und Theile des umschriebenen Vielecks ausserhalb des Kreises. Also ist jedes eingeschriebene Vieleck kleiner und jedes umschriebene Vieleck grösser als der Kreis.

## 295.

**Lehrsatz.** Die Kreis-Fläche ist die Grenze für die Flächen aller um- und eingeschriebenen, regelmässigen Vielecke. Die Vielecke nähern sich,

---

\*) Der Buchstab  $\pi$  hat auch schon in der Rechenkunst (§. 260. VIII.) eine stehende Bedeutung erhalten. Es wird sich weiter unten zeigen, dass die gegenwärtige Bedeutung mit der dortigen übereinstimmt.

**Beweis.** Wenn die Zahl der Seiten eingeschriebener, regelmäßiger Vielecke, von gleichen Halbmessern der Ecken, immerfort zunimmt, so nehmen beide, ihr Umfang und ihr Inhalt immerfort zu (§. 181. I. und §. 185. I.), und wenn die Zahl der Seiten umschriebener Vielecke, von gleichen Halbmessern der Seiten, immerfort zunimmt, so nehmen beide, Umfang und Inhalt immerfort ab (§. 181. II. und §. 185. II.). Umfang und Inhalt eingeschriebener und umschriebener, regelmäßiger Vielecke sind also gleichförmig zusammengehörige Grössen (§. 158.). Nun ist die Kreisfläche die Grenze für die Flächen der um- und eingeschriebenen Vielecke (§. 295.) und die Kreislinie ist der zu der Kreisfläche gehörige Umfang. Also ist, zu Folge (§. 160.) die Kreislinie auch die Grenze der Umfänge aller eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke. Folglich ist der Kreis-Umfang grösser als die Umfänge aller eingeschriebenen Vielecke, weil dieselben bis zu ihm immerfort wachsen, und kleiner als die Umfänge aller umschriebenen Vielecke, weil dieselben bis zu dem Kreis-Umfange immerfort abnehmen.

297.

**Lehrsatz.** Grösser als die Umfänge aller, einem und demselben Kreise eingeschriebenen und zugleich kleiner als die Umfänge aller dem nemlichen Kreise umschriebenen Vielecke, ist nur der Umfang dieses Kreises selbst, und kein anderer Kreis-Umfang.

**Beweis.** Der gegebene Kreis sey  $BFA$  (Fig. 159.). Der Umfang des Kreises  $EKD$  z. B., welcher durch die Ecken irgend eines, dem gegebenen Kreise  $BFA$  umschriebenen Vielecks mit der Seite  $DE$  geht, ist nicht kleiner als der Umfang dieses Vielecks. Denn das Vieleck ist dem Kreise  $EKD$  nicht umschrieben, sondern es ist in ihn eingeschrieben und der Umfang eines Kreises ist grösser, als der Umfang eines ihm eingeschriebenen Vielecks, nicht kleiner (§. 296.). Der Kreis  $EKD$  hat also die Eigenschaft, dass sein Umfang kleiner wäre als der Umfang eines dem gegebenen Kreise  $BFA$  umschriebenen Vielecks, nicht. Nun ist aber der Unterschied  $AD$  seines Halbmessers  $DC$  von dem Halbmesser  $AC$  des gegebenen Kreises  $BFA$ , kleiner als  $DF$ ; denn in dem Dreiecke  $DFC$  ist  $DC < DF + FC$ .

+  $FC$ , oder weil  $FC = AC$  ist,  $DC < DF + AC$ , woraus  $DC - AC < DF$ , oder

$$AD < DF$$

folgt. Die Seite  $DE$  des umschriebenen Vielecks, und ihre Hälfte  $DF$  aber können durch Vervielfältigung der Seiten des Vielecks so weit verkleinert werden, als man will (§. 295.). Also kann man auch  $AD$  kleiner machen, als irgend eine Größe. Daraus folgt, daß kein Kreis, dessen Halbmesser  $DC$  größer ist, als  $AC$ , die Eigenschaft hat, daß sein Umfang kleiner wäre als der Umfang jedes dem gegebenen Kreise  $AFB$  umschriebenen Vielecks.

Eben so ist der Umfang des Kreises  $PGQ$ , welcher z. B. die Seite  $AB$  des dem gegebenen Kreise  $BFA$  eingeschriebenen Vielecks berührt, nicht größer als der Umfang dieses Vielecks; denn das Vieleck ist dem Kreise  $PGQ$  nicht eingeschrieben, sondern es ist ihm umschrieben, und der Umfang eines Kreises ist kleiner als der Umfang eines ihm umschriebenen Vielecks; nicht größer (§. 296.). Der Kreis  $PGQ$  hat also die Eigenschaft, daß sein Umfang größer wäre, als der Umfang eines dem Kreise  $BFA$  eingeschriebenen Vielecks, nicht. Nun ist aber der Unterschied  $FG$  seines Halbmessers  $GC$  von dem Halbmesser  $FC$  des gegebenen Kreises  $BFA$  wiederum kleiner, als  $AG$ , und die Seite  $AB$  des eingeschriebenen Vielecks, und ihre Hälfte  $AG$ , kann durch Vervielfältigung der Seiten des Vielecks so klein gemacht werden als man will (§. 295.), also auch  $FG$  kleiner als irgend eine Größe. Folglich hat kein Kreis, dessen Halbmesser  $GC$  kleiner ist, als der Halbmesser  $FC$  des gegebenen Kreises, die Eigenschaft, daß sein Umfang größer wäre, als der Umfang jedes dem gegebenen Kreise  $AFB$  eingeschriebenen Vielecks.

Mithin ist kein anderer Kreis - Umfang, als  $AFB$  selbst, größer als der Umfang jedes ihm eingeschriebenen und kleiner als der Umfang jedes ihm umschriebenen Vielecks zugleich.

## 298.

*Lehrsatz.* Die Fläche eines Kreises ist gleich der Hälfte des Products seines Halbmessers in seinen Umfang.

*Beweis.* Die Flächen der einem gegebenen Kreise umschriebenen regelmäßigen Vielecke sind gleich der Hälfte der Producte des Halbmessers des Kreises

und der Umfänge der Vielecke. Alle diese Flächen sind größer als die Kreisfläche (§. 294.). Die Flächen der eingeschriebenen Vielecke von der doppelten Seitenzahl sind gleich der Hälfte der Producte des Halbmessers des nemlichen Kreises und der Umfänge der Vielecke (§. 187.). Alle diese Flächen sind kleiner als die Fläche des gegebenen Kreises (§. 294.). Will man also die Fläche des gegebenen Kreises durch die Hälfte des Productes seines Halbmessers in *irgend eine Kreislinie* ausdrücken, so muß diese Kreislinie nothwendig kürzer als die Umfänge aller dem gegebenen Kreise umschriebenen und länger als die Umfänge aller ihm eingeschriebenen Vielecke seyn. Eine solche Kreislinie ist die gegebene, und nur sie allein (§. 297.).

Also ist die Hälfte des Productes des Halbmessers eines gegebenen Kreises und seines Umfanges seiner Fläche gleich.

299.

*Lehrsatz.* Die Umfänge zweier Kreise und ihre Halbmesser sind Gleichvielfache.

*Beweis.* Die Umfänge aller den beiden Kreisen umschriebenen regelmäßigen Vielecke, von gleich vielen Seiten, und ihre Halbmesser, sind Gleichvielfache; denn dergleichen regelmäßige Vielecke sind ähnliche Figuren (§. 200.). Nun ist der Umfang des einen Kreises größer als der Umfang aller in ihn eingeschriebenen und kleiner als der Umfang aller um ihn beschriebenen Vielecke (§. 297.); also kann die Linie, welche von ihm eben das Vielfache ist, wie der Halbmesser des zweiten Kreises vom Halbmesser des ersten, oder wie die Umfänge der dem zweiten Kreise umschriebenen Vielecke von den Umfängen der Vielecke um den ersten Kreis, auch nur eine Linie seyn, welche länger ist als die Umfänge aller dem zweiten Kreise eingeschriebenen und kürzer als die Umfänge aller ihm umschriebenen Vielecke. Eine solche Linie ist der zweite Kreis-Umfang, und nur er allein (§. 297.). Also sind die Umfänge der beiden Kreise und ihre Halbmesser Gleichvielfache.

300.

*Zusätze.* I. Wenn also der Halbmesser eines beliebigen Kreises  $r$  und sein Umfang  $p$  ist, so ist, weil der Umfang eines Kreises vom Halbmesser  $r$  durch  $2\pi$  be-

zeichnet wurde (§. 293.),

$$\frac{p}{r} = \frac{2\pi}{1}$$

Also ist

$$p = 2r\pi,$$

das heisst: man findet den Umfang eines beliebigen Kreises vom Halbmesser  $r$ , wenn man seinen Halbmesser mit der Zahl  $2\pi$  multiplicirt.

II. Ist der Winkel am Mittelpunct eines beliebigen Kreisbogens, in Graden, Minuten etc. ausgedrückt, gleich  $\alpha$  und der zugehörige Bogen eines Kreises vom Halbmesser 1 gleich  $a$ , so ist, weil der zu  $2\varrho$  gehörige Kreisbogen  $\pi$  ist,

$$\frac{2\varrho}{\alpha} = \frac{\pi}{a};$$

denn Kreis-Bogen und die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte sind Gleichvielfache (§. 291.). Also ist

$$a = \frac{\alpha\pi}{2\varrho}.$$

Ist der Halbmesser des Kreises  $r$  und der Bogen für den nemlichen Mittelpuncts-Winkel  $\alpha$  gleich  $\Lambda$ , so ist, eben so,

$$\frac{2\varrho}{\alpha} = \frac{r\pi}{\Lambda}, \text{ also}$$

$$\Lambda = r \cdot \frac{\alpha\pi}{2\varrho}.$$

Folglich ist

$$\frac{\Lambda}{a} = r \cdot \frac{\alpha\pi}{2\varrho} : \frac{\alpha\pi}{2\varrho} = \frac{r}{1}.$$

Also sind auch beliebige Bogen mit ungleichen Halbmessern, für gleiche Winkel am Mittelpuncte, und die zugehörigen Halbmesser, Gleichvielfache, eben wie die ganzen Umfänge.

III. Die Fläche eines Kreises mit dem Halbmesser 1 ist nach (§. 298.) gleich  $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\pi$ , gleich  $\pi$ ; denn der Umfang dieses Kreises ist  $2\pi$ .

Die Fläche eines Kreises mit dem Halbmesser  $r$ , ist gleich  $\frac{1}{2} r \cdot 2r\pi$ , gleich  $r^2\pi$ ; denn der Umfang dieses Kreises ist, nach (I.), gleich  $2r\pi$ . Man findet also die Fläche eines Kreises vom Halbmesser  $r$ , wenn man das Quadrat seines Halbmessers mit der Zahl  $\pi$  multiplicirt.

IV. Da die Flächen von Kreis-Ausschnitten mit ihre Winkel am Mittelpuncte Gleichvielfache

sind (§. 291.), so ist, wenn man die Fläche des Ausschnitts eines Kreises vom Halbmesser 1, mit dem Winkel  $\alpha$  am Mittelpuncte, durch  $f$  bezeichnet,

$$\frac{4\varrho}{\alpha} = \frac{\pi}{f}.$$

Denn zu dem Winkel  $4\varrho$  gehört die ganze Kreisfläche, welche nach (III.) gleich  $\pi$  ist. Es ist also

$$f = \pi \cdot \frac{\alpha}{4\varrho}.$$

Ist der Halbmesser des Kreises  $r$ , so ist für die Fläche des Ausschnitts mit dem nemlichen Winkel  $\alpha$ , welche jetzt  $\varphi$  seyn mag, weil nunmehr die ganze Kreisfläche, nach (III.),  $r^2 \pi$  ist,

$$\frac{4\varrho}{\alpha} = \frac{r^2 \pi}{\varphi},$$

woraus

$$\varphi = r^2 \pi \cdot \frac{\alpha}{4\varrho}$$

folgt.

V. Die Fläche eines Kreis-Abschnitts zu finden, darf man nur von der Fläche des Ausschnitts die Fläche des gradlinien Dreiecks zwischen der Sehne und den beiden, den Ausschnitt einschliessenden Halbmessern abziehen.

301.

Anmerkung. I. Mit Hülfe des Satzes (§. 187.) kann man auf folgende Weise die Zahl  $\pi$  finden.

Man gehe nemlich von einem um- und von einem eingeschriebenen Vielecke aus, dessen Inhalt sich leicht finden läßt, z. B. vom regelmässigen Viereck, oder dem Quadrate, und verdoppele immerfort die Zahl der Seiten, bis man dem Kreise nahe genug gekommen ist. Man setze den Halbmesser des Kreises, welchem die Vielecke um- und eingeschrieben sind, gleich 1. Die Seite eines, einem solchen Kreise umschriebenen Vierecks ist offenbar 2, also sein Inhalt 4. Die Diagonal des eingeschriebenen Quadrats ist der doppelte Halbmesser, also 2, folglich ihr Quadrat gleich 4 und mithin, nach dem pythagorischen Lehrsatz, das Quadrat der Seiten des eingeschriebenen Quadrats, das heisst: das eingeschriebene Quadrat selbst, die Hälfte davon, also 2.

Nun setze man in (§. 187.)  $b = 4$ ,  $a = 2$ , so ist, vermöge des dortigen Satzes, die Fläche des eingeschriebenen Vielecks von doppelt so vielen Seiten, also des Achtecks, gleich  $\alpha = \sqrt{(a \cdot b)} = \sqrt{(2 \cdot 4)} = \sqrt{8} = 2,8284271$  und die Fläche des umschriebenen Achtecks gleich  $\beta = \frac{2ab}{a + \alpha} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4}{2 + \sqrt{8}} = 3,3137085$ .

Man setze von Neuem die Zahlen 2,8284271 und 3,3137085 statt  $a$  und  $b$ , so findet man die Flächen des eingeschriebenen und

des umschriebenen Sechszehnecks. Sie sind 3,0614674 und 3,1825979.

So kann man fortfahren und die Flächen der um- und eingeschriebenen Vielecke von jedesmal doppelt so vielen Seiten berechnen.

Die Fläche des *Kreises* liegt immer zwischen den Flächen um- und eingeschriebener Vielecke von gleich vielen Seiten. Da aber die um- und eingeschriebenen Vielecke der Kreisfläche um so näher kommen, je mehr Seiten sie haben, so müssen sie nothwendig einander selbst immer näher kommen. Man kann sich also durch dieselben der Kreisfläche so weit nähern als man will. Verlangt man z. B. die Kreisfläche bis auf 7 Decimalstellen-Stellen, so darf man nur die Seiten der um- und eingeschriebenen Vielecke so lange verdoppeln, bis die Zahlen welche ihre Flächen ausdrücken in der 7ten Decimal-Stelle nicht mehr von einander abweichen. Da die Kreisfläche dazwischen liegt, so drückt alsdann die nämliche Zahl auch die Kreisfläche aus, die man also dadurch mit der vorgesetzten Genauigkeit findet. Folgendes ist die Berechnung bis auf die sieben Decimal-Stellen:

Zahl der Seiten.		Eingeschriebenes Vieleck.		Umschriebenes Vieleck.
4	—	2,0000000	—	4,0000000
8	—	2,8284271	—	3,3137085
16	—	3,0614674	—	3,1825979
32	—	3,1214451	—	3,1517249
64	—	3,1365485	—	3,1441184
128	—	3,1403311	—	3,1422236
256	—	3,1412772	—	3,1417504
512	—	3,1415138	—	3,1416321
1024	—	3,1415729	—	3,1416025
2048	—	3,1415877	—	3,1415951
4096	—	3,1415914	—	3,1415933
8192	—	3,1415923	—	3,1415928
16384	—	3,1415925	—	3,1415927
32768	—	3,1415926	—	3,1415926

Da die Flächen der um- und eingeschriebenen, letzten regelmäßigen Vielecke von 32768 Seiten noch in der siebenten Decimal-Stelle, gleich sind, so ist auch die Kreisfläche, welche dazwischen liegt, bis auf die siebente Stelle ihnen gleich und folglich ist der Inhalt eines Kreises, dessen Halbmesser  $r$  ist, bis auf 7 Decimal-Stellen, gleich

$$3,1415926.$$

Die Fläche dieses Kreises ist aber gleich  $\pi$  (§. 300. III.). Also ist, bis auf 7 Decimal-Stellen,

$$\pi = 3,1415926.$$

II. Statt *verschiedene* regelmäßige Vielecke zu suchen, die einem und demselben Kreise um- und eingeschrieben sind, oder die nämlichen Halbmesser der Ecken und Seiten haben, und durch Vergrößerung der Zahl der Seiten dem gegebenen Kreise, welchem sie um- und eingeschrieben sind, immer mehr sich zu nähern, kann man auch, und zwar vermittelst des Satzes (§. 204.), regelmäßige Vielecke suchen, die alle gleich groß sind, aber immer mehrere Seiten haben. Hat ein solches Vieleck noch



wenige Seiten, so sind seine Halbmesser der Ecken und Seiten noch bedeutend verschieden, und folglich weicht der Kreis, in welchem man es einschrieb, von dem Kreise welchem man es umschrieb, bedeutend ab. Der Unterschied der Ecken und Seiten nimmt aber ab, je gröfser die Zahl der Seiten wird, also auch der Unterschied der beiden um- und eingeschriebenen Kreise. Hat man daher die Zahl der Seiten des Vielecks bis auf eine Differenz des Halbmessers der Ecken und Seiten vergrößert, die man außer Acht lassen will, so kann man auch die beiden Kreise, welche man ihm ein- und umschreibt, als zusammenfallend, und folglich als eben so groß wie das Vieleck selbst betrachten. Diese Kreise sind daher alsdann auch so groß, als das anfängliche Vieleck von welchem man ausging, weil alle die verschiedenen Vielecke *gleich groß* waren.

Man nehme z. B. ein *Quadrat* an, dessen Seite 2, dessen Inhalt also 4 ist. Der Halbmesser des diesem Quadrat eingeschriebenen Kreises, oder der Halbmesser seiner Seiten würde 1, der Halbmesser des umschriebenen Kreises, oder der Halbmesser der Ecken, nach dem pythagorischen Lehrsatz, gleich  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1,4142136$  seyn. Diese beiden Halbmesser sind noch bedeutend, nemlich um 0,4142136 verschieden. Setzt man nun in (§. 204.)  $a = 1,4142136$  und  $b = 1$ , so findet man für die Halbmesser der Ecken und Seiten eines gleich großen Vielecks von der doppelten Seitenzahl, also eines gleich großen regelmäßigen *Achtecks*,

$$\alpha = \sqrt{ab} = \sqrt{1 \cdot 1,4142136} = 1,1892071 \text{ und}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{b(a+b)}{2}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 2,4142136}{2}} = 1,0986841.$$

Diese beiden Halbmesser kommen einander schon näher. Setzt man dieselben von Neuem statt  $a$  und  $b$ , so findet man für den Halbmesser der Ecken und Seiten eines gleich großen Vielecks, wiederum von der doppelten Seitenzahl, also des regelmäßigen, gleich großen *Sechszehnecks*

$$\alpha = \sqrt{1,1892071 \times 1,0986841} = 1,1430500 \text{ und}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1,0986841(1,1892071 + 1,0986841)}{2}} = 1,1210863;$$

welche beide Halbmesser einander noch näher kommen.

So kann man fortfahren, bis die Halbmesser einander nahe genug kommen. Folgendes sind die Zahlen, welche man bis zum 8192 Hek findet:

Zahl der Seiten des Vielecks.		Halbmesser des umschriebenen Kreises,		Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.
4	—	1,4142136	—	1,0000000
8	—	1,1892071	—	1,0986841
16	—	1,1430500	—	1,1210863
32	—	1,1320149	—	1,1265639
64	—	1,1292862	—	1,1279257
128	—	1,1286063	—	1,1282657
256	—	1,1284360	—	1,1283508
512	—	1,1283954	—	1,1283721
1024	—	1,1283827	—	1,1283774
2048	—	1,1283801	—	1,1283782
4096	—	1,1283794	—	1,1283791
8192	—	1,1283792	—	1,1283792.

Alle Vielecke, welche diese Halbmesser der Ecken und Seiten haben, sind gleich groß. Ihr Inhalt ist also unveränderlich gleich 4. Da nun der Halbmesser der Ecken des 8192 Ecks von dem Halbmesser der Seiten, wie man sieht, in der siebenten Decimalstelle nicht mehr abweicht, so sind auch die Halbmesser der ihm um- und eingeschriebenen Kreise, bis auf die siebente Stelle gleich, und folglich kann man für die Flächen dieser Kreise, wenn man nur bis zur siebenten Stelle gehen will, die Fläche des Vielecks selbst nehmen. Folglich ist die Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser, bis auf die siebente Decimalstelle genau ausgedrückt, z. B.

$$r = 1,1285792$$

ist, gleich 4.

Daraus lässt sich ebenfalls die Zahl  $\pi$  finden. Da nämlich die Fläche eines Kreises vom Halbmesser  $r$  gleich  $r^2 \pi$  ist (§. 300. III.), so ist hier

$$1,1285792^2 \cdot \pi = 4,$$

woraus

$$\pi = \frac{4}{1,1285792^2}$$

folgt, welches, wie in (I.),

$$\pi = 3,1415926$$

gibt.

Diese Entwicklungen der Zahl  $\pi$  dienen nur als Beispiel der Berechnung derselben, ohne Reiben. Die Rechnung ist wegen der Wurzel-Aussiehungen weitläufig, und wenn man bis auf viele Decimalstellen geht, sehr beschwerlich. Durch Reiben ist sie, wie sich weiterhin zeigen wird, viel leichter.

### 302.

*Anmerkung.* Die Zahl  $\pi$  ist, wie sich bereits zeigt, irrational; also lässt sich der Umfang und die Fläche eines Kreises, so wie ein in den Umfang aufgehender Bogen und ein in die Fläche aufgehender Ausschnitt durch keine Bruchtheile des Halbmessers und seines Quadrats ausdrücken.

Gleichwohl gibt es von Kreisbogen eingeschlossene Flächen, z. B. Monden (§. 247. VII.), welche gegen das Quadrat des Halbmessers rational sind.

Es sey z. B.  $ABC$  (Fig. 160.) ein in  $B$  rechtwinkliges Dreieck, so geht eine Kreislinie, deren Durchmesser  $AC$  ist, durch  $B$ . Es sey  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CA = c$ , so ist, vermöge des pythagorischen Lehrsatzes,

$$1. \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Nun ist zu Folge (§. 300. III.) die Fläche eines Kreises vom Durchmesser  $a$ , oder Halbmesser  $\frac{1}{2}a$ , gleich  $\frac{1}{4}a^2 \pi$ , vom Durchmesser  $b$ , oder Halbmesser  $\frac{1}{2}b$ , gleich  $\frac{1}{4}b^2 \pi$ , und vom Durchmesser  $c$ , oder Halbmesser  $\frac{1}{2}c$ , gleich  $\frac{1}{4}c^2 \pi$ . Wenn daher  $ADB$ ,  $BEC$  und  $AFBGC$  Halb-

kreise über  $AB$ ,  $BC$  und  $CA$  sind, so sind die Flächen derselben

$$2. \frac{1}{8}a^2\pi, \frac{1}{8}b^2\pi \text{ und } \frac{1}{8}c^2\pi.$$

Die Summe der Flächen der beiden Halbkreise  $ADB$  und  $BEC$  ist also

$$3. \frac{1}{8}a^2\pi + \frac{1}{8}b^2\pi = \frac{1}{8}(a^2 + b^2)\pi.$$

Es ist aber in dem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$ ,  $a^2 + b^2 = c^2$  (1.). Also ist die Summe der Flächen der beiden Halbkreise  $ADB$  und  $BEC$  auch gleich

$$3. \frac{1}{8}c^2\pi.$$

Dieses war die Fläche des Halbkreises  $AFBGC$ . Also ist der Halbkreis  $AFBGC$  so groß, als die beiden Halbkreise  $ADB$  und  $BEC$  zusammen. Nimmt man nun von dem Halbkreise  $AFBGC$  die beiden Kreis-Abschnitte  $AFB$  und  $BGC$  weg, so bleibt das rechtwinklige Dreieck  $ABC$  übrig. Nimmt man von den, zusammen eben so großen beiden Halbkreisen  $ADB$  und  $BEC$  die nemlichen Kreis-Abschnitte  $AFB$  und  $BGC$  weg, so bleiben die beiden Monden  $ADBF$  und  $BECG$  übrig. Also sind diese beiden Monden  $ADBF$  und  $BECG$  zusammen so groß, als das gradlinige Dreieck  $ABC$ , dessen Inhalt rational ist, wenn es  $AB$  und  $BC$  sind.

Dieser Satz von den beiden Monden über die Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist vom Hippocrates von Chios. Es giebt noch andere Sätze von Kreis-Monden, worüber man unter andern Hutton math. and phil. Dictionary, art. Lune or moon nachsehen kann.

303.

**Lehrsatz.** Der Kreis ist größer als alle gradlinige Figuren von gleichem Umfange.

**Beweis.** Nach (§. 152.) ist das regelmäßige Vieleck größer, als alle andere gradlinige Figuren von gleichem Umfange und eben so vielen Seiten. Es kommt also nur darauf an, ob der Kreis größer ist als ein regelmäßiges Vieleck von gleichem Umfange. Alsdann ist er nothwendig um so mehr größer als alle andere gradlinige Figuren.

Man setze  $ACB$  (Fig. 161. I.) sey eines der gleichschenkligen Dreiecke, aus welchen irgend ein regelmäßiges Vieleck von  $n$  Seiten zusammengesetzt ist,  $CD$  sey auf  $AB$  senkrecht, also  $AD = DB$ . Der Bogen  $GFI$  (Fig. 161. II.) aber sey so lang, als die Seite des

Vielecks  $AB$ ,  $EK$  sey auf  $C_1F$  senkrecht und der Winkel  $EC_1K$  dem Winkel  $ACB$  gleich; also wenn  $C_1F$  den Winkel  $C_1$  halbt,  $GF$  die Hälfte des Bogens  $GFH$ , und folglich der Bogen  $GF$  gleich der graden Linie  $AD$ , und der Winkel  $EC_1F$  dem Winkel  $ACD$  gleich.

Der Inhalt des Vielecks ist gleich

$$2n \cdot \Delta ACD,$$

und der Inhalt des Kreises  $GFH$ , von gleichem Umfange, gleich

$$2n \times \text{Ausschnitt } GC_1F;$$

denn weil die Winkel bei  $C$  und  $C_1$  gleich sind, so gehen auch  $2n$  Ausschnitte, wie  $GC_1F$ , auf den Kreis.

Nun ist der Inhalt des Dreiecks  $ACD$ ,

$$\Delta ACD = \frac{1}{2} AD \cdot DC;$$

der Inhalt des Ausschnitts  $GC_1F$  ist

$$\text{Ausschnitt } GC_1F = \frac{1}{2} \text{Bogen } GF \times C_1F.$$

Also ist

$$\frac{\text{Ausschnitt } GC_1F}{\Delta ACD} = \frac{\frac{1}{2} \text{Bogen } GF \times C_1F}{\frac{1}{2} AD \cdot DC}.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke  $ACD$  und  $EC_1F$  sind aber ähnlich, weil die Winkel bei  $C$  und  $C_1$  gleich sind.

Also ist  $\frac{C_1F}{DC} = \frac{EF}{AD}$  und folglich

$$\frac{\text{Ausschnitt } GC_1F}{\Delta ACD} = \frac{\frac{1}{2} \text{Bogen } GF \times EF}{\frac{1}{2} AD \cdot AD}.$$

Aber  $AD$  ist nach der Voraussetzung dem Bogen  $GF$  gleich. Also ist

$$\frac{\text{Ausschnitt } GC_1F}{\Delta ACD} = \frac{\frac{1}{2} \text{Bogen } GF \times EF}{\frac{1}{2} \text{Bogen } GF \cdot \text{Bogen } GF} = \frac{\frac{1}{2} EF}{\frac{1}{2} \text{Bogen } GF};$$

oder, wenn man oben und unten mit  $C_1F$  multiplicirt,

$$\frac{\text{Ausschnitt } GCF}{\Delta ACD} = \frac{\frac{1}{2} EF \cdot C_1F}{\frac{1}{2} \text{Bogen } GF \cdot C_1F}.$$

Aber  $\frac{1}{2} EF \cdot C_1F$  ist die Fläche des Dreiecks  $EC_1F$  und  $\frac{1}{2} \text{Bogen } GF \cdot C_1F$  ist die Fläche des Ausschnitts  $GC_1F$ . Also ist.

$$\frac{\text{Ausschnitt } GC_1F}{\Delta ACD} = \frac{\Delta EC_1F}{\text{Ausschnitt } GC_1F}.$$

Nun ist das Dreieck  $EC_1F$  größer als der Ausschnitt  $GC_1F$ . Also ist auch nothwendig der Ausschnitt  $GC_1F$  größer als das Dreieck  $ACD$ .

Der  $2n$ fache Ausschnitt  $GC_1F$  war aber der Kreis und das  $2n$ fache Dreieck  $ACD$  das regelmäßige Vieleck, von eben dem Umfange. Also ist der Kreis größer als ein regelmäßiges Vieleck von gleichem

Umfange. Und da das regelmässige Vieleck grösser ist als jede andere gradlinige Figur von gleich vielen Seiten und gleichem Umfange, so ist der Kreis grösser als jede gradlinige Figur von gleichem Umfange.

304.

**Lehrsatz.** Jeder Kreisbogen ist länger als die zugehörige Sehne und kürzer als eine beliebige Tangente zwischen den Schenkeln des zugehörigen Winkels am Mittelpunkte.

Z. B. der Kreisbogen  $AFB$  (Fig. 162.) ist länger als seine Sehne  $AB$  und kürzer als eine beliebige Tangente  $GH$  oder  $AD$  zwischen den Schenkeln des Winkels  $ACB$ .

**Beweis.** Es halbire  $CK$  den Winkel  $ACB$ , so ist  $CK$  auf  $AB$  senkrecht und es ist  $BP = AP$ . Also ist der Inhalt des Vierecks  $AKBC$  gleich  $\frac{1}{2} KC \cdot AB$ .

Es sey  $F$  der Berührungspunkt der Tangente  $GH$  und der Kreislipie, so ist  $CF$  auf  $GH$  senkrecht, und folglich ist der Inhalt des Dreiecks  $GHC$  gleich  $\frac{1}{2} FC \cdot GH$ .

Der Inhalt des Kreis-Ausschnitts  $ACB$  ist gleich  $\frac{1}{2} AC \times \text{Bogen } AFB$ .

Nun sind die Halbmesser  $KC$ ,  $FC$  und  $AC$  einander gleich. Also ist

der Inhalt des Vierecks  $AKBC$  gleich  $\frac{1}{2} AC \times AB$ ,

der Inhalt des Dreiecks  $GHC$  gleich  $\frac{1}{2} AC \times GH$ ,

der Inhalt des Ausschnitts  $ACB$  gleich  $\frac{1}{2} AC \times \text{Bogen } AFB$ .

Das Viereck  $AKBC$  ist aber kleiner als der Ausschnitt  $ACB$ ; also ist  $\frac{1}{2} AC \times AB < \frac{1}{2} AC \times \text{Bogen } AFB$ , woraus

$$AB < \text{Bogen } AFB$$

folgt; das heisst: die Sehne  $AB$  ist kleiner als der zugehörige Bogen  $AFB$ ; welches das Erste war.

Das Dreieck  $GHC$  ist grösser als der Ausschnitt  $ACB$ ; also ist  $\frac{1}{2} AC \times GH > \frac{1}{2} AC \times \text{Bogen } AFB$ , woraus

$$GH > \text{Bogen } AFB$$

folgt; das heisst: die Tangente  $GH$  ist grösser als der zugehörige Bogen  $AFB$ , und so für jede andere Tangente, also auch  $AD$ ; welches das Zweite war \*).

---

\*) Der Satz dieses Paragraphs ist unter dem Namen des Archimedischen bekannt. Er ist ein besonderer Fall des allgemeinen Satzes, dass jede umschliessende Linie, sie sey gerade oder krumm, länger ist, als die umschlossene. Es giebt mehrere Be-

## IV. Von der Gleichung des Kreises.

305.

**Lehrsatz.** Wenn die rechtwinkligen Coordinaten des Mittel-Puncts eines Kreises  $c$  und  $\gamma$ , die Coordinaten eines beliebigen Puncts der Kreislinie  $x$  und  $y$  sind, und der Halbmesser des Kreises ist  $r$ , so ist die Gleichung (§. 234.) der Kreislinie für einen beliebigen Anfangs-Punct der Coordinaten

$$1. (c-x)^2 + (\gamma-y)^2 = r^2.$$

Liegt der Anfangs-Punct der Coordinaten in dem Umfange des Kreises, so ist die Gleichung

$$2. x^2 + y^2 = 2cx + 2\gamma y.$$

Geht zugleich eine der Axen durch den Mittelpunct, so ist die Gleichung

$$3. 2rx - x^2 = y^2.$$

Liegt der Anfangs-Punct der Coordinaten im Mittel-Punct des Kreises, so ist die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

**Beweis.** In (Fig. 163.) ist  $PB = MF = c - x$  und  $QD = CF = \gamma - y$ . Also da in dem rechtwinkligen Dreieck  $CMF$ ,  $CM^2 = MF^2 + CF^2$  ist, so ist

$$1. (c-x)^2 + (\gamma-y)^2 = r^2.$$

Diese Gleichung gilt für jeden Punct der Kreislinie; denn wenn auch für einen Punct wie  $M_1$ , die Linien  $c - x$ , und  $\gamma - y$  negativ sind, so sind doch ihre Quadrate positiv und die Summe ihrer Quadrate ist immer dem Quadrate des Halbmessers gleich; welches das Erste war.

Liegt der Anfangs-Punct der Coordinaten  $A$  irgendwo in der Kreislinie, z. B. in  $M$ , so ist  $c^2 + \gamma^2 = r^2$ . Da nun die Gleichung (1.)  $c^2 - 2cx + x^2 + \gamma^2 - 2\gamma y + y^2 = r^2$  giebt, so erhält man, wenn man die Gleichung  $c^2 + \gamma^2 = r^2$  davon abzieht,

$$-2cx + x^2 - 2\gamma y + y^2 = 0, \text{ oder}$$

$$2. x^2 + y^2 = 2cx + 2\gamma y;$$

welches das Zweite war.

Liegt die eine Axe zugleich im Durchmesser, so ist  $c = r$  und  $\gamma = 0$ . Alsdann geht also die Gleichung (1.) in  $(r-x)^2 + y^2 = r^2$ , oder  $r^2 - 2rx + x^2 + y^2 = r^2$ , oder in

$$3. 2rx - x^2 = y^2$$

über; welches das Dritte war.

Liegt der Anfangs-Punct der Coordinaten im Mittel-Punct des Kreises, so ist  $c = 0$  und  $\gamma = 0$ . Dadurch geht die Gleichung (1.) in

$$4. x^2 + y^2 = r^2$$

über; welches das Vierte war.

weise dieses allgemeinen Satzes, worüber man unter andern die „Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen des Verfassers, Berlin, bei Maurer 1821 — 2. §. 219 — 224.“ nachsehen kann. Der Beweis des besonderen Falles im vorigen Paragraph ist deshalb einfach, weil die Schwierigkeit des Ueberganges von der graden Linie zu der Kreislinie schon in dem Satze vom Inhalt der Kreisflächen liegt, auf welchen sich der Ausdruck des Inhalts des Ausschnitts, der in dem Beweise vorkommt, bezieht.

*Anmerkung.* Der Raum gestattet nicht, die Sätze von den Durchschnitten grader Linien mit der Kreislinie, von Kreislinien mit einander und was dahin gehört, ausführlich herzusetzen. Sie lassen sich auf die Weise wie bei den Durchschnitten grader Linien (§. 235. etc.) finden. Wenn z. B. eine grade Linie, deren Gleichung  $x + my = a$  ist, eine Kreislinie schneidet, so sind die Coordinaten der Durchschnitte-Puncte beiden Linien *gemein*. Man darf daher nur aus den Gleichungen der beiden Linien  $x + my = a$  und  $(c - x)^2 + (y - y)^2 = r^2$ ,  $x$  und  $y$  suchen, so erhält man die Coordinaten der Durchschnitte-Puncte. Eben so, wenn sich zwei Kreislinien schneiden. Sind umgekehrt die Coordinaten  $p_1, q_1$  und  $p_2, q_2$  der Durchschnitte-Puncte, z. B. einer graden Linie und einer Kreislinie gegeben, so setzt man sie statt  $x$  und  $y$ , und sucht aus den Gleichungen die daraus folgenden Parameter der Linien. Alles dieses gehört aber besser in die Lehre von den krummen Linien, von welchen die Kreislinie nur ein besonderer Fall ist, und kann daher hier wegbleiben.

---

# Die Goniometrie nebst Trigonometrie und Polygonometrie.

307.

**Erklärung.** Da zu jedem Kreisbogen von gegebenem Halbmesser eine bestimmte Sehne, in einem bestimmten Abstände vom Mittelpunkte, desgleichen eine bestimmte, mit der Sehne parallele Tangente zwischen den Durchmessern durch die Endpunkte des Bogens gehört, so hängen umgekehrt von den Sehnen und ihren Abständen, so wie von den Tangenten und den Stücken, welche sie von den Durchmessern abschneiden, auf irgend eine Weise die Kreisbogen ab, zu welchen sie gehören. Und da Kreisbogen die natürlichen Maaße der Winkel am Mittelpunkte sind (§. 292.), so lassen sich durch die Sehnen und Tangenten von Kreisbogen, welche das Maaß von Winkeln sind, also durch grade Linien, Winkel messen und mit einander vergleichen.

Die Sätze, welche sich hierauf beziehen heißen zusammen Goniometrie. Ihre Anwendung auf Dreiecke insbesondere heißt Trigonometrie, und auf Vielecke, Polygonometrie.

## Die Goniometrie.

### Von den goniometrischen Linien.

308.

**Erklärung.** Die Halbmesser der Kreisbogen, deren man sich zum Maaße von Winkeln



bedient, setzt man allemal der Einheit des Längen-Maasses gleich, also gleich 1.

309.

**Erklärung.** I. Die ganzen Sehnen ganzer Bogen sind weniger bequem zum Maaße der Winkel, als die halben Sehnen für die halben Winkel. Z. B. zum Maaße des Winkels  $ACD$  (Fig. 164.) nimmt man nicht die Sehne  $AD$ , sondern die halbe Sehne  $AB$  zum Maaße des halben Winkels  $ACM$ . Diese halbe Sehne oder das Perpendikel  $AB$  aus einem, um 1 vom Scheitel entfernten Punkte des einen Winkel-Schenkels  $AC$  auf den andern Schenkel  $BC$ , heisst Sinus des Winkels  $ACB$ . Man bezeichnet es durch  $\sin ABC$ , oder wenn für den Winkel bloß ein einzelner Buchstab z. B.  $\alpha$  gesetzt wird, durch  $\sin \alpha$ , oder auch, in Beziehung auf den Bogen  $AM$ , der das Maaß des Winkels ist, durch  $\sin AM$ , oder wenn für den Bogen ein einzelner Buchstab z. B.  $x$  steht, durch  $\sin x$ .

II. Den Abstand der Sehne vom Mittelpunct oder die Apotome  $BC$ , also die Entfernung des Perpendikels  $AB$  von  $C$ , oder was dasselbe ist, den Sinus  $AK$  des Complements von  $ACB$  nennt man Cosinus des Winkels  $ACB$  und bezeichnet ihn durch  $\cos ACB$  oder  $\cos \alpha$ , oder  $\cos AM$ , oder  $\cos x$ .

III. Die Hälfte  $EM$  der Tangente  $EF$  des Winkels  $ACD$ , also das Perpendikel aus einem um 1 vom Scheitel entfernten Punkte  $M$  des einen Schenkels des Winkels auf ihn, bis zum andern Schenkel  $CE$ , nennt man Tangente des Winkels  $ACB$  und bezeichnet es durch  $\tan ACB$ , oder  $\tan \alpha$ , oder  $\tan AM$ , oder  $\tan x$ .

IV. Die Tangente  $GR$  des Complements von  $ACB$  heisst Cotangente des Winkels  $ACB$  und wird durch  $\cot ACB$ , oder  $\cot \alpha$ , oder  $\cot AM$ , oder  $\cot x$  bezeichnet.

V. Das Stück  $CE$ , welches die Tangente  $ME$  eines Winkels  $ACB$  vom andern Schenkel des Winkels abschneidet, heisst Secante des Winkels  $ACB$  und wird durch  $\sec ACB$ , oder  $\sec \alpha$ , oder  $\sec AM$ , oder  $\sec x$  bezeichnet.

VI. Das Stück  $CR$  endlich, welches die Cotangente  $GR$  eines Winkels  $ACB$  vom andern Schenkel des Winkels abschneidet, heisst Cosecante des Winkels  $ACB$  und wird durch  $\csc ACB$ , oder  $\csc \alpha$ , oder  $\csc AM$ , oder  $\csc x$  bezeichnet.

Also ist

1) das Perpendikel aus einem um 1 vom Scheitel eines Winkels entfernten Punkte des einen Schenkels auf den andern Schenkel der Sinus des Winkels.

2) das Perpendikel aus dem nemlichen Punkte auf eine auf den andern Schenkel senkrechte Linie ist der Cosinus des Winkels;

3) das Perpendikel aus einem um 1 vom Scheitel entfernten Punkte des einen Schenkels auf den nemlichen Schenkel, bis zum andern Schenkel genommen, ist die Tangente des Winkels;

4) das Stück, welches die Tangente vom andern Schenkel abschneidet, ist die Secante des Winkels;

5) das Perpendikel aus einem um 1 vom Scheitel entfernten Punkte einer Linie, die auf einen Schenkel eines Winkels senkrecht steht, bis zum andern Schenkel, ist die Cotangente des Winkels; und

6) das Stück, welches die Cotangente vom andern Schenkel abschneidet, ist die Cosecante des Winkels.

Diese Linien zusammengenommen heißen auch trigonometrische, oder besser goniometrische Linien.

Man giebt auch noch zuweilen dem Unterschiede  $MB$  zwischen dem Halbmesser  $CM$  und dem Cosinus  $BC$  eines beliebigen Winkels  $ACB$  einen besondern Namen, und nennt ihn Quersinus des Winkel  $ACB$ . Allein diese besondere Benennung läßt sich füglich entbehren, und es ist gut sie wegzulassen, da es besser ist, die Menge der Benennungen zu vermindern, als sie zu vergrößern.

### 310.

*Anmerkung.* Die verschiedenen Perpendikel, welche zu goniometrischen Linien oder zu Maassen der Winkel oder Bogen dienen, behalten immer dieselben Namen, wenn auch die Winkel größer als rechte und negativ sind, so groß und so klein sie und die zugehörigen Bogen seyn mögen. Nur sind sie dann selbst, je nach ihrer Lage, positiv oder negativ.

### 311.

*Anmerkung.* Nimmt man, was willkürlich ist, an, daß während die Winkel und Bogen, z. B. von  $M$  ab (Fig. 164.) nach  $A$  zu immerfort wachsen und nach  $D$  zu immerfort abnehmen, die graden Linien vom Mittelpunkt des Kreises aus nach der Linken und nach

Oben wachsen, also nach der Rechten und nach Unten abnehmen sollen, so sind alle goniometrischen Linien, welche in der Richtung des Schenkels eines Winkels, links von dem Durchmesser  $GH$  und über dem darauf senkrechten Durchmesser  $MN$  liegen, positiv, und alle, welche rechts vom Durchmesser  $GH$  und unter dem Durchmesser  $MN$  liegen, sind negativ.

Im ersten Quadranten, wie z. B. beim Winkel  $ACM$ , sind also alle sechs goniometrischen Linien  $AB$ ,  $BC$ ,  $ME$ ,  $GR$ ,  $EC$  und  $RC$  positiv.

Im zweiten Quadranten, wie z. B. beim Winkel  $MCL$ , ist der Sinus  $LP$ , da er über  $MN$  liegt, positiv, der Cosinus  $LK$ , oder  $PC$ , weil er rechts von  $GH$  liegt, ist negativ. Die Tangente des Winkels ist  $MF$ , weil das Perpendikel aus  $M$  auf den Schenkel  $MC$ , den andern Schenkel  $CL$  gar nicht erreicht, sondern nur seine Verlängerung  $CD$ , in  $F$ . Die Tangente des Winkels ist also, weil sie unter  $MN$  liegt, negativ. Die Secante  $CF$ , da sie nicht im Schenkel  $CL$ , sondern in seiner Verlängerung  $CD$  liegt, ist negativ. Die Cotangente  $GQ$ , da sie rechts von  $GH$  liegt, ist negativ, die Cosecante  $CQ$  positiv.

Im dritten Quadranten, z. B. beim äußern Winkel  $MCT$ , dessen Bogen  $MGNT$  ist, ist der Sinus  $TP$ , da er unter  $MN$  liegt, negativ, der Cosinus  $TV$  oder  $PC$  ist, weil er rechts von  $GH$  liegt, negativ. Die Tangente  $ME$ , weil sie nur die Verlängerung des Schenkels  $CT$  über  $MN$  erreicht, ist positiv; die Secante  $CE$ , weil sie in der Verlängerung des Schenkels  $CT$  liegt, ist negativ, die Cotangente  $GR$ , weil sie links von  $GH$  liegt, ist positiv, und die Cosecante  $CR$ , in der Verlängerung von  $CT$ , ist negativ.

Im vierten Quadranten, wie z. B. beim äußern Winkel  $MCD$ , dessen Bogen  $MGNHD$  ist, ist der Sinus  $BD$ , weil er unter  $MN$  liegt, negativ; der Cosinus  $CB$  oder  $VD$  ist, weil er links von  $GH$  liegt, positiv. Die Tangente  $MF$ , weil sie unter  $MN$  liegt, ist negativ. Die Secante  $CF$ , weil sie in dem Schenkel  $CD$  des Winkels selbst liegt, ist positiv. Die Cotangente  $GQ$ , weil sie rechts von  $GH$  liegt, ist positiv; die Cosecante  $CQ$ , weil sie in der Verlängerung des Schenkels  $CD$  liegt, ist negativ.

Im

Im fünften Quadranten verhält es sich wieder wie im ersten; denn z. B. alle goniometrischen Linien des Winkels  $ACB$ , dessen Bogen  $MGNHMA$  ist, sind völlig dieselben wie die des Winkels  $ACB$ , dessen Bogen  $MA$  ist. Im sechsten Quadranten verhält es sich wie im zweiten, im siebenten wie im dritten; u. s. w. Ueberhaupt sind alle goniometrischen Linien zweier beliebigen Winkel  $\alpha$  und  $4n\rho + \alpha$ , oder zweier Bogen  $x$  und  $2n\pi + x$ , wo  $n$  eine beliebige positive ganze Zahl seyn kann, völlig dieselben.

Ist ein Winkel negativ, so kommt es nur darauf an, in welchen Quadranten er fällt. Er hat offenbar mit einem positiven Winkel, der zwischen denselben Schenkeln liegt, einerlei goniometrische Linien, denn von den Schenkeln allein hängen diese Linien ab; z. B. der negative Winkel  $MCD$ , oder der Bogen  $MD$  hat die nemlichen goniometrischen Linien wie der positive Bogen  $MGNHD$ ; denn beide haben die nemlichen Schenkel  $MC$  und  $DC$ . Und so ist es mit jedem andern Winkel. Daraus folgt, daß der Winkel  $-\alpha$ , oder der Bogen  $-x$ , die nemlichen goniometrischen Linien hat, wie der Winkel  $4\rho - \alpha$ , oder der Bogen  $2\pi - x$ , oder überhaupt wie der Winkel  $4n\rho - \alpha$ , oder der Bogen  $2n\pi - x$ . Die goniometrischen Linien ändern sich also auch nicht, wenn zu einem negativen Bogen eine beliebige Zahl von Kreis-Umfängen hinzukommt; wodurch man allemal einen negativen Winkel mit einem positiven vergleichen kann.

Auch ist es einerlei, ob man einen oder mehrere Kreis-Umfänge von einem positiven oder negativen Bogen hinwegnimmt, statt sie hinzuzusetzen; denn auch dann bleiben die Schenkel des Winkels an den nemlichen Stellen.

Zusammengenommen, also haben z. B. die Winkel

$$1. \quad \alpha \text{ und } 4n\rho + \alpha,$$

oder die Bogen

$$2. \quad x \text{ und } 2n\pi + x$$

völlig dieselben goniometrischen Linien,  $\alpha$  und  $x$  mögen positiv oder negativ und  $n$  mag eine positive oder negative ganze Zahl seyn.

312.

Anmerkung. I. Der Sinus und die Tangente des Winkels oder Bogens Null sind 0; denn wenn z. B. der Bogen  $MA$  bis Null abnimmt, so verschwinden auch

die Perpendikel  $AB$  und  $EM$ . Also ist  $\sin 0 = 0$  und  $\tan 0 = 0$ . Hingegen der Cosinus und die Secante des Winkels  $0$  sind gleich  $MC = 1$ ; also ist  $\cos 0 = 1$  und  $\sec 0 = 1$ . Die Cotangente und Cosecante sind unendlich groß; denn wenn der Schenkel  $AC$  in  $MC$  fällt, so erreicht ihn das Perpendikel  $GR$  gar nicht mehr. Also ist  $\cot 0 = \infty$  und  $\operatorname{cosec} 0 = \infty$ . Nun kann man nach (§. 311.) eine beliebige Zahl von Umläufen hinzufügen oder wegnehmen, ohne daß sich die goniometrischen Linien ändern. Also ist allgemein

$$1. \begin{cases} \sin 2n\pi = 0 \text{ und } \tan 2n\pi = 0, \\ \cos 2n\pi = 1 \text{ und } \sec 2n\pi = 1, \\ \cot 2n\pi = \infty \text{ und } \operatorname{cosec} 2n\pi = \infty. \end{cases}$$

II. Der Sinus und die Cosecante des Bogens  $MG = \frac{1}{2}\pi$  sind gleich  $GC = 1$ . Also ist  $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$  und  $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\pi = 1$ . Der Cosinus und die Cotangente dieses Bogens sind  $0$ ; also ist  $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$  und  $\cot \frac{1}{2}\pi = 0$ , und die Tangente und Secante desselben sind unendlich groß, oder  $\tan \frac{1}{2}\pi = \infty$  und  $\sec \frac{1}{2}\pi = \infty$ . Also ist, wenn man noch beliebig  $2n\pi$  zusetzt, allgemein

$$2. \begin{cases} \sin (2n + \frac{1}{2})\pi = 1 \text{ und } \operatorname{cosec} (2n + \frac{1}{2})\pi = 1, \\ \cos (2n + \frac{1}{2})\pi = 0 \text{ und } \cot (2n + \frac{1}{2})\pi = 0, \\ \tan (2n + \frac{1}{2})\pi = \infty \text{ und } \sec (2n + \frac{1}{2})\pi = \infty. \end{cases}$$

III. Der Sinus und die Tangente des Bogens  $MGN = \pi$  sind Null. Also ist  $\sin \pi = 0$  und  $\tan \pi = 0$ . Der Cosinus ist gleich  $CN$ , also  $= -1$ , die Secante ist  $CN$ , in der Verlängerung von  $CM$ , also ebenfalls  $= -1$ . Folglich ist  $\cos \pi = -1$  und  $\sec \pi = -1$ . Die Cotangente und die Cosecante sind unendlich. Also ist  $\cot \pi = \infty$  und  $\operatorname{cosec} \pi = \infty$ . Setzt man  $2n\pi$  zu, so erhält man

$$3. \begin{cases} \sin (2n + 1)\pi = 0 \text{ und } \tan (2n + 1)\pi = 0, \\ \cos (2n + 1)\pi = -1 \text{ und } \sec (2n + 1)\pi = -1, \\ \cot (2n + 1)\pi = \infty \text{ und } \operatorname{cosec} (2n + 1)\pi = \infty. \end{cases}$$

IV. Der Sinus des Bogens  $MGNH = \frac{3}{2}\pi$ , oder was das nemliche ist, des Bogens  $-MH = -\frac{1}{2}\pi$ , ist  $CH = -1$ . Die Cosecante dieser Bogen ist  $CG$ , in der Verlängerung von  $CH$ , also ebenfalls negativ und gleich  $-1$ . Also ist  $\sin -\frac{1}{2}\pi = -1$  und  $\operatorname{cosec} -\pi = -1$ . Der Cosinus und die Cotangente des Bogens  $\frac{3}{2}\pi$  oder  $-\frac{1}{2}\pi$  sind Null; also ist  $\cos -\frac{1}{2}\pi = 0$  und  $\cot -\frac{1}{2}\pi = 0$ . Die Tangente und Secante sind unendlich. Also ist  $\tan -\frac{1}{2}\pi = \infty$  und  $\sec -\frac{1}{2}\pi = \infty$ . Setzt man  $2n\pi$  zu, so erhält man

$$4. \quad \begin{cases} \sin(2n - \frac{1}{2}\pi) = -1 \text{ und cosec}(2n - \frac{1}{2}\pi) = -1, \\ \cos(2n - \frac{1}{2}\pi) = 0 \text{ und cot}(2n - \frac{1}{2}\pi) = 0, \\ \tan(2n - \frac{1}{2}\pi) = \infty \text{ und sec}(2n - \frac{1}{2}\pi) = \infty. \end{cases}$$

V. Nimmt man die Resultate (1. 2. 3. 4.) zusammen und schreibt, weil  $2n$  jede grade und  $2n + 1$  jede ungrade ganze Zahl bedeuten kann, da wo  $2n$  und  $2n + 1$  einerlei Resultat geben, blos  $n$ , wo alsdann  $n$  jede beliebige, grade oder ungrade ganze Zahl seyn kann, so erhält man

$$7. \quad \begin{cases} \sin n\pi = 0 \text{ (1. u. 3.)}, \sin(2n + \frac{1}{2}\pi) = +1 \text{ (2.)} \\ \quad \text{und } \sin(2n - \frac{1}{2}\pi) = -1 \text{ (4.)}, \\ \cos 2n\pi = +1 \text{ (1.)}, \cos(2n + 1)\pi = -1 \text{ (3.)} \\ \quad \text{und } \cos(2n + \frac{1}{2}\pi) = 0 \text{ (2. 4.)}, \\ \tan n\pi = 0 \text{ (1. 3.)}, \tan(2n \pm \frac{1}{2}\pi) = \infty \text{ (2. 4.)}, \\ \cot n\pi = \infty \text{ (1. 3.)}, \cot(2n \pm \frac{1}{2}\pi) = 0 \text{ (2. 4.)} \\ \sec 2n\pi = +1 \text{ (1.)}, \sec(2n + 1)\pi = -1 \text{ (3.)} \\ \quad \text{und } \sec(2n \pm \frac{1}{2}\pi) = \infty \text{ (2. 4.)}, \\ \text{cosec } n\pi = \infty \text{ (1. 3.)}, \text{cosec}(2n + \frac{1}{2}\pi) = +1 \text{ (2.)} \\ \quad \text{und } \text{cosec}(2n - \frac{1}{2}\pi) = -1 \text{ (4.)}. \end{cases}$$

313.

Anmerkung. I. Wenn der Bogen von Null an wächst, so wächst der Sinus, wie die Figur zeigt, bis zu dem Bogen  $\frac{1}{2}\pi$  ebenfalls; von da nimmt der Sinus ab und wird für den Bogen  $\pi$ , gleich 0. Hierauf geht er ins Negative über und wächst in demselben bis zu dem Bogen  $\frac{3}{2}\pi$ , nimmt darauf im Negativen ab, wird für  $2\pi$  wieder Null und darauf wieder positiv. Der Sinus geht also durch Null aus dem Positiven in das Negative über, und umgekehrt.

II. Der Cosinus nimmt, wenn der Bogen wächst, von  $+1$  an ab, und ist 0 für  $\frac{1}{2}\pi$ . Er wird hierauf negativ und wächst im Negativen bis zu  $-1$  für  $\pi$ , nimmt darauf im Negativen ab, bis 0, für  $\frac{3}{2}\pi$ , wird hierauf wieder positiv und wächst bis  $+1$ , für  $2\pi$  u. s. w. Der Cosinus geht also ebenfalls durch Null aus dem Positiven in das Negative über, und umgekehrt.

III. Die Tangente wächst, im Positiven, mit dem Bogen, von Null an bis der Bogen  $\frac{1}{2}\pi$  ist. Dann ist sie unendlich groß. Hierauf ist sie sogleich negativ, und wie nun der Bogen weiter bis  $\pi$  wächst, nimmt die Tangente im Negativen ab, bis Null. Von  $\pi$  bis  $\frac{3}{2}\pi$  ist sie wieder positiv und wächst bis ins Unendliche, und von  $\frac{3}{2}\pi$  bis  $2\pi$  ist sie negativ und nimmt bis Null

ab. Die Tangente geht also durch Unendlich aus dem Positiven in das Negative über, und umgekehrt.

IV. Die Cotangente ist für den Bogen Null unendlich groß, nimmt im Positiven bis zu Null, für den Bogen  $\frac{1}{2}\pi$ , ab und wird dann negativ. Sie wächst im Negativen, bis der Bogen  $\pi$  ist, für welchen sie unendlich groß ist. Sie wird hierauf positiv, und nimmt im Positiven ab, bis der Bogen  $\frac{3}{2}\pi$  ist, für welchen sie Null ist. Hierauf ist sie wieder negativ, und wächst im Negativen, bis sie für den Bogen  $2\pi$  unendlich groß ist. Die Cotangente geht also durch Null aus dem Positiven in das Negative und durch Unendlich aus dem Negativen in das Positive über.

V. Die Secante wächst von 1 an, im Positiven bis zum Unendlichen, wenn der Bogen von Null bis  $\frac{1}{2}\pi$  zunimmt. Hierauf wird sie negativ und nimmt im Negativen ab bis zu  $-1$ , wenn der Bogen von  $\frac{1}{2}\pi$  bis zu  $\pi$  gelangt. Sie wächst hierauf wieder im Negativen bis zu Unendlich groß, während der Bogen von  $\pi$  bis  $\frac{3}{2}\pi$  wächst. Hierauf wird sie positiv und nimmt im Positiven bis zu  $+1$  ab, während der Bogen von  $\frac{3}{2}\pi$  bis zu  $2\pi$  wächst. Die Secante geht also durch Unendlich aus dem Positiven in das Negative über, und umgekehrt.

VI. Die Cosecante ist unendlich groß für den Bogen Null und nimmt im Positiven ab bis zu  $+1$ , während der Bogen bis zu  $\frac{1}{2}\pi$  gelangt. Sie wächst hierauf wieder im Positiven, bis zu unendlich groß, während der Bogen von  $\frac{1}{2}\pi$  bis  $\pi$  wächst. Hierauf wird sie negativ und nimmt im Negativen bis zu  $-1$  ab, indem der Bogen nach  $\frac{3}{2}\pi$  gelangt. Sie wächst wiederum im Negativen und wird unendlich groß für den Bogen  $2\pi$ . Die Cosecante geht also durch Unendlich aus dem Positiven in das Negative über, und umgekehrt.

314.

**Lehrsatz.** Für jeden beliebigen Winkel oder Bogen  $x$  ist die Summe der Quadrate von Sinus und Cosinus, der Unterschied der Quadrate von Secante und Tangente und der Unterschied der Quadrate von Cosecante und Cotangente gleich 1; das heißt, es ist

$$1. \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$2. \sec^2 x - \tan^2 x = 1,$$

$$3. \operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1;$$

für jedes beliebige  $x$ .

**Beweis.** Sinus, Cosinus und Halbmesser; Tangente, Halbmesser und Secante; und Halbmesser, Cotangente und Cosecante schliessen rechtwinklige Dreiecke ein, deren Hypothenusen die zuletzt genannten der drei Linien sind. Dergleichen Dreiecke sind z. B. in (Fig. 164.)

für den Bogen  $MA'$  ....  $ABC$ ,  $EMC$  und  $CGR$ ,  
für den Bogen  $MAGL$  ....  $LPC$ ,  $FMC$  und  $CGO$ ,  
für den Bogen  $MAGNT$  ....  $TPC$ ,  $EMC$  und  $CGR$ ,  
für den Bogen  $MAGNHD$  ....  $DBC$ ,  $FMC$  und  $CGO$ ;  
woraus die Sätze vermöge des pythagorischen Lehrsatzes folgen.

Diese Sätze gelten also von jedem beliebigen positiven Bogen  $x$ ; denn in den folgenden Quadranten verhält es sich wieder, wie in den vier ersten.

Ist  $x$  negativ, so darf man nur so oftmal  $2\pi$  hinzuthun, bis man einen positiven Bogen erhält, der dann nothwendig in einem der vier Quadranten liegen muß. Da nun Bogen, die um  $2n\pi$  verschieden sind, völlig dieselben goniometrischen Linien haben (§. 311.), so gelten die Sätze auch für negative  $x$ , und folglich für jedes beliebige  $x$ .

## Gleichungen zwischen goniometrischen Linien.

315.

**Lehrsatz.** Es ist für jeden beliebigen Bogen

$$1. \sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1}{\sec x \cot x} = \cos x \tan x \\ = \frac{\tan x}{\sec x} = \frac{\cos x}{\cot x},$$

$$2. \cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\tan x \operatorname{cosec} x} = \sin x \cot x \\ = \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x},$$

$$3. \tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{\cos x \operatorname{cosec} x} = \sin x \sec x \\ = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sec x}{\operatorname{cosec} x},$$



$$4. \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin x \cot x} = \tan x \operatorname{cosec} x$$

$$= \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\operatorname{cosec} x}{\cot x},$$

$$5. \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sin x \sec x} = \cos x \operatorname{cosec} x$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\operatorname{cosec} x}{\sec x},$$

$$6. \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x \tan x} = \cot x \sec x$$

$$= \frac{\sec x}{\tan x} = \frac{\cot x}{\cos x}.$$

**Beweis.** Die in dem Beweise von (§. 314.) aufgezählten rechtwinkligen Dreiecke sind zu dreien, wie sie zusammengehören, ähnlich, weil je zwei außer dem rechten Winkel, noch einen Winkel, entweder gemein, oder zu gleichen Scheitelwinkeln, oder zu gleichen Wechsel- oder Seiten-Winkeln haben.

Von den drei rechtwinkligen Dreiecken  $ABC$ ,  $EMC$  und  $CGR$  nemlich, haben die beiden ersten den Winkel  $C$  gemein und im dritten ist der Wechselwinkel bei  $R$ , wegen der Parallelen, dem Winkel  $C$  gleich.

Von den Dreiecken  $LPC$ ,  $FMC$  und  $CGQ$  haben die beiden ersten bei  $C$  gleiche Scheitelwinkel und in dem dritten ist der Wechselwinkel bei  $Q$ , wegen der Parallelen, dem Winkel bei  $C$  gleich.

Von den Dreiecken  $TPC$ ,  $EMC$  und  $CGR$  haben die beiden ersten bei  $C$  gleiche Scheitelwinkel und in dem dritten ist der Wechselwinkel bei  $R$ , wegen der Parallelen, dem Winkel bei  $C$  im zweiten und also auch im ersten Dreiecke gleich.

Von den Dreiecken  $DBC$ ,  $FMC$  und  $CGQ$  haben die beiden ersten den Winkel bei  $C$  gemein und in dem dritten ist der Seitenwinkel bei  $Q$ , wegen der Parallelen, den Winkeln bei  $C$  in den ersten beiden Dreiecken gleich.

Es ist also

$$\frac{AB}{BC} = \frac{EM}{MC} = \frac{GC}{GR}, \quad \frac{LP}{PC} = \frac{MF}{MC} = \frac{GC}{GQ},$$

$$\frac{PT}{CP} = \frac{EM}{MC} = \frac{GC}{GR}, \quad \frac{DB}{BC} = \frac{MF}{MC} = \frac{GC}{GQ},$$

das heisst, es ist für jedes beliebige  $x$ :

$$7. \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{1} = \frac{1}{\cot x}.$$

Ferner ist

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EM}{EC} = \frac{GC}{RC}, \quad \frac{LP}{LC} = \frac{MF}{FC} = \frac{GC}{RC},$$

$$\frac{PT}{TC} = \frac{EM}{EC} = \frac{GC}{RC}, \quad \frac{DB}{DC} = \frac{MF}{FC} = \frac{GC}{QC};$$

also ist auch für jedes beliebige  $x$ :

$$8. \frac{\sin x}{1} = \frac{\tan x}{\sec x} = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}.$$

Dividirt man die Gleichungen (8.) durch die Gleichungen (7.), so ist noch für jedes  $x$ :

$$9. \cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x}.$$

Aus diesen Gleichungen (7. 8. 9.) kann man die Gleichungen des Lehrsatzes unmittelbar hernehmen. Z. B.

aus (8.) folgt  $\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$ . Aus (9.) folgt  $\frac{1}{\operatorname{cosec} x}$

$= \frac{1}{\sec x \cot x}$ ; also  $\sin x = \frac{1}{\sec x \cot x}$ . Aus (7.) folgt

$\sin x = \cos x \tan x$ . Aus (8.) folgt  $\sin x = \frac{\tan x}{\sec x}$

$= \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$  und aus (9.)  $\frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{\cos x}{\cot x}$ ; also  $\sin x = \frac{\cos x}{\cot x}$ ;

welches zusammen die Ausdrücke (1.) des Lehrsatzes für  $\sin x$  sind; und so die übrigen.

Die Gleichungen des Lehrsatzes gelten also für jeden beliebigen positiven Bogen  $x$ , weil es sich in den folgenden Quadranten wieder wie in den vier ersten verhält.

Ist  $x$  negativ, so darf man nur wieder, wie in (§. 314.), so oft mal  $2\pi$  hinzuthun, bis man einen positiven Bogen erhält, der dann in einem der vier ersten Quadranten liegen muss. Da nun Bogen, die um  $2\pi$  verschieden sind, völlig dieselben goniometrischen Linien haben (§. 311.), so gelten die Sätze auf diese Weise auch für negative  $x$ , und folglich für jedes beliebige  $x$ .

346.

**Lehrsatz.** Es ist für beliebige Bogen  $x$ ,  $y$  und  $z$ ,

$$1. \sin (y \pm x) = \cos x \sin y \pm \sin x \cos y = \frac{\tan y \pm \tan x}{\sec x \sec y},$$

$$2. \cos (y \pm x) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y = \frac{\cot x \cot y \pm 1}{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y},$$

$$3. \tan (y \pm x) = \frac{\tan y \pm \tan x}{1 \mp \tan x \tan y} = \frac{\cot x \pm \cot y}{\cot x \cot y \mp 1},$$

$$4. \sec (y \pm x) = \frac{\sec x \sec y}{1 \mp \tan x \tan y} = \frac{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}{\cot x \cot y \mp 1},$$

$$5. \cot (y \pm x) = \frac{\cot x \cot y \pm 1}{\cot x \pm \cot y} = \frac{1 \mp \tan x \tan y}{\tan y \pm \tan x},$$

$$6. \operatorname{cosec} (y \pm x) = \frac{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}{\cot x \pm \cot y} = \frac{\sec x \sec y}{\tan y \pm \tan x};$$

$$7. \sin -z = -\sin z,$$

$$8. \cos -z = +\cos z,$$

$$9. \tan -z = -\tan z,$$

$$10. \cot -z = -\cot z,$$

$$11. \sec -z = +\sec z,$$

$$12. \operatorname{cosec} -z = -\operatorname{cosec} z.$$

Die oberen Zeichen gehören zusammen und die unteren gehören zusammen.

**Beweis.** I. (Fig. 165.) Es sind 10 Fälle möglich,

der Bogen  $x$  kann liegen: der Bogen  $y$  kann liegen:

- |                                   |                              |
|-----------------------------------|------------------------------|
| 1) im 1ten Quadr., wie $MA_1$     | im 1ten Quadr. wie $MAB_1$   |
| 2) — — — — —                      | im 2ten Quadr. wie $MGB_2$   |
| 3) — — — — —                      | im 3ten Quadr. wie $MGNB_3$  |
| 4) — — — — —                      | im 4ten Quadr. wie $MGNHB_4$ |
| 5) im 2ten Quadr., wie $MGA_2$    | im 2ten Quadr. wie $MGB_2$   |
| 6) — — — — —                      | im 3ten Quadr. wie $MGNB_3$  |
| 7) — — — — —                      | im 4ten Quadr. wie $MGNHB_4$ |
| 8) im 3ten Quadr., wie $MGNA_3$   | im 3ten Quadr. wie $MGNB_3$  |
| 9) — — — — —                      | im 4ten Quadr. wie $MGNHB_4$ |
| 10) im 4ten Quadr., wie $MGNHA_4$ | im 4ten Quadr. wie $MGNHB_4$ |

Die Summe der Quadrate der Sehnen der Unterschiede der Bogen  $y$  und  $x$ , nemlich der Sehnen,

$$\begin{array}{cccc} A_1 B_1, & A_1 B_2, & A_1 B_3, & A_1 B_4 \\ & A_2 B_2, & A_2 B_3, & A_2 B_4 \\ & & A_3 B_3, & A_3 B_4 \\ & & & A_4 B_4 \end{array}$$

läßt sich in diesen verschiedenen Fällen, wie leicht zu sehen, wie folgt ausdrücken:

$$(\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2;$$

denn z. B. für die Sehne  $A_1 B_1$  ist, wenn  $A_1 P_1$ ,  $B_1 Q_1$

auf  $MC$  perpendicular sind und  $A, B$  mit  $MC$  parallel ist,

$$A, B^2 = A, R^2 + B, R^2, \text{ oder } .$$

$$A, B^2 = (CP_1 - CQ_1)^2 + (B, Q_1 - AP_1)^2, \text{ oder}$$

$$A, B^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin y - \sin x)^2,$$

welches so viel ist als

$$A, B^2 = (\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2.$$

Eben so verhält es sich mit den Sehnen in allen andern Lagen; wie in der Figur, wo  $P, Q, R$ , so wie  $A, B$ , immer an ähnlichen Stellen stehen und mit  $A, B$ , gleiche Zeiger haben, leicht zu sehen ist. Liegen die beiden Endpunkte der Sehne etwa nicht auf einerlei Seite der Durchmesser  $MN$  und  $GH$ , und müssen also die Perpendikel  $AP, BQ$  und ihre Abstände  $CP$  und  $PQ$ , oder die Sinus und Cosinus der beiden Winkel  $y$  und  $x$  nicht subtrahirt, sondern addirt werden, so sind dafür die Sinus und Cosinus negativ, so daß also die Addition der beiden Linien immer wieder durch das Zeichen — ausgedrückt wird. So z. B. ist für die Sehne  $A, B$ ,

$$A, B^2 = (CP_1 + CQ_1)^2 + (A, P_1 + B, Q_1)^2,$$

welches aber, weil  $CQ_1$  und  $B, Q_1$  negativ sind, wieder so viel ist als

$$(\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2.$$

II. Da nun die Sehne jedes Bogens der doppelte Sinus der Hälfte des Bogens ist (§. 309.), so ist in allen obigen Fällen

$$13. \quad 4 \sin^2 \frac{1}{2}(y-x) = (\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2.$$

Daraus folgt

$$4 \sin^2 \frac{1}{2}(y-x) = \cos^2 y - 2 \cos y \cos x + \cos^2 x + \sin^2 y - 2 \sin y \sin x + \sin^2 x,$$

oder, weil  $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$  und  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , ist (§. 314. 1.)

$$4 \sin^2 \frac{1}{2}(y-x) = 2 - 2 \cos y \cos x - 2 \sin y \sin x, \text{ oder}$$

$$\cos y \cos x + \sin y \sin x = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}(y-x),$$

oder weil  $1 = \cos^2 \frac{1}{2}(y-x) + \sin^2 \frac{1}{2}(y-x)$ ,

$$14. \quad \cos y \cos x + \sin y \sin x = \cos^2 \frac{1}{2}(y-x) - \sin^2 \frac{1}{2}(y-x).$$

Diese Gleichung gilt nun für jedes beliebige positive  $x$  und  $y$ , in so fern  $x$  kleiner als  $y$  ist. Sie gilt also auch für  $x=0$ , welches

$$\cos y \cos 0 + \sin y \sin 0 = \cos^2 \frac{1}{2}y - \sin^2 \frac{1}{2}y,$$

oder, weil  $\cos 0 = 1$ ,  $\sin 0 = 0$  ist (§. 312. I. 1.),

$$15. \quad \cos y = \cos^2 \frac{1}{2}y - \sin^2 \frac{1}{2}y$$

giebt. Da diese Gleichung für jedes beliebige  $y$  gilt, so gilt sie auch, wenn man  $y - x$  statt  $y$  schreibt, in so fern  $y$  größer ist als  $x$ . Also ist auch

$$16. \cos(y - x) = \cos \frac{1}{2}(y - x)^2 - \sin \frac{1}{2}(y - x)^2.$$

Es war aber in (14.)  $\cos \frac{1}{2}(y - x)^2 - \sin \frac{1}{2}(y - x)^2 = \cos y \cos x + \sin y \sin x$ ; also ist

$$17. \cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x;$$

für jedes beliebige positive  $y$  und  $x$ , in so fern  $y > x$  ist.

Ist der Bogen  $y$  kleiner als  $x$ , so darf man nur soviel mal  $2\pi$  hinzuthun bis  $y$  größer ist als  $x$ . Die Linien  $\cos y$  und  $\sin y$  bleiben deshalb die nemlichen. Ist  $y$  oder  $x$ , oder sind beide negativ, so thue man ebenfalls so viel mal  $2\pi$  hinzu, bis  $y$  und  $x$  positiv sind und  $y$  größer ist als  $x$ , wodurch in allen Fällen  $y - x$  unter die obigen Bedingungen gebracht werden kann.

Die Gleichung (17.) gilt also ohne Einschränkung,  $y$  und  $x$  mögen seyn was man will, positiv oder negativ, und so groß oder so klein als man will. Sie ist eine der beiden Gleichungen (2.) im Lehrsatz.

Aus dieser einen, aus der Figur erwiesenen Gleichung folgen nun alle übrigen Gleichungen des Lehrsatzes unmittelbar.

III. Man setze nemlich in (17.)  $y$  statt  $x$  und  $x$  statt  $y$ , so erhält man  $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ . Daraus folgt, weilsich der Ausdruck rechterhand gar nicht verändert hat,  $\cos(x - y) = \cos(y - x)$ . Also, wenn man  $z$  statt  $y - x$  schreibt,

$$18. \cos -z = \cos z \text{ (wie im Lehrsatz (8.)).}$$

IV. Man setze in (17.)  $y - x$  statt  $x$ , so erhält man  $\cos(y - (y - x))$ , oder  $\cos x = \cos y \cos(y - x) + \sin y \sin(y - x)$ , oder weil  $\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$  war,  $\cos x = \cos y^2 \cos x + \cos y \sin y \sin x + \sin y \sin(y - x)$ , oder  $\cos x (1 - \cos y^2) - \cos y \sin y \sin x = \sin y \sin(y - x)$ , oder, weil  $1 - \cos y^2 = \sin y^2$  ist (§. 314. I.),  $\cos x \sin y^2 - \cos y \sin y \sin x = \sin y \sin(y - x)$ , oder wenn man mit  $\sin y$  dividirt,

$$19. \sin(y - x) = \cos x \sin y - \cos y \sin x \text{ (wie im Lehrsatz 1.).}$$

V. Man setze in (19.)  $y$  statt  $x$  und  $x$  statt  $y$ , so erhält man  $\sin(x - y) = \cos y \sin x - \cos x \sin y$ , welches, mit (19.) verglichen, so viel ist als  $-\sin(y - x)$ . Also

### 316. Gleichungen zwischen goniom. Linien. 285

ist  $\sin(x - y) = -\sin(y - x)$ , oder  $\sin(-(y - x)) = -\sin(y - x)$ , oder, wenn man  $z$  statt  $y - x$  schreibt,  
 20.  $\sin -z = -\sin z$  (wie im Lehrsatz 7.).

VI. Man setze in (17. und 19.)  $-x$  statt  $+x$ , so erhält man

$$\begin{aligned}\cos(y + x) &= \cos y \cos -x + \sin y \sin -x \text{ und} \\ \sin(y + x) &= \cos -x \sin y - \cos y \sin -x,\end{aligned}$$

oder, weil  $\cos -x = \cos x$  (18.) und  $\sin -x = -\sin x$  (20.)

21.  $\begin{cases} \cos(y + x) = \cos y \cos x - \sin y \sin x \\ \sin(y + x) = \cos x \sin y + \cos y \sin x \end{cases}$  (wie im Lehrsatz 1. und 2.)

VII. Schreibt man den Ausdruck von  $\sin(y \pm x)$  (1.) wie folgt:

$$\sin(y \pm x) = \cos x \cos y \left( \frac{\sin y}{\cos y} \pm \frac{\sin x}{\cos x} \right),$$

so erhält man, wenn man statt  $\frac{\sin y}{\cos y}$  und  $\frac{\sin x}{\cos x}$  nach (§. 315.)  $\tan y$  und  $\tan x$ , und statt  $\cos x$  und  $\cos y$ ,  $\frac{1}{\sec x}$  und  $\frac{1}{\sec y}$  setzt,

22.  $\sin(y \pm x) = \frac{\tan y \pm \tan x}{\sec x \sec y}$  (wie im Lehrsatz 1.).

VIII. Schreibt man den Ausdruck von  $\cos(y \pm x)$  (2.) wie folgt:

$$\cos(y \pm x) = \sin x \sin y \left( \frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} \pm 1 \right),$$

und setzt nach (§. 315.) statt  $\frac{\cos x}{\sin x}$  und  $\frac{\cos y}{\sin y}$ ,  $\cot x$  und  $\cot y$ , und statt  $\sin x$  und  $\sin y$ ,  $\frac{1}{\operatorname{cosec} x}$  und  $\frac{1}{\operatorname{cosec} y}$ , so erhält man

23.  $\cos(y \pm x) = \frac{\cot x \cot y \pm 1}{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}$  (wie im Lehrsatz 2.).

IX. Ferner ist zu Folge (§. 315.)  $\frac{\sin(y \pm x)}{\cos(y \pm x)} = \tan(y \pm x)$ . Also ist, wenn man hierin die Ausdrücke von  $\sin(y \pm x)$  und  $\cos(y \pm x)$  (1. und 2.) setzt,

24.  $\tan(y \pm x) = \frac{\cos x \sin y \pm \sin x \cos y}{\cos x \cos y \pm \sin x \sin y}$

Dieses giebt, wenn man oben und unten mit  $\cos x \cos y$  dividirt,

$$\text{tang}(y \pm x) = \frac{\frac{\sin y}{\cos y} \pm \frac{\sin x}{\cos x}}{1 \pm \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}},$$

oder, weil  $\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tang } x$ ,  $\frac{\sin y}{\cos y} = \text{tang } y$  ist,

$$25. \text{tang}(y \pm x) = \frac{\text{tang } y \pm \text{tang } x}{1 \pm \text{tang } y \text{ tang } x} \text{ (wie im Lehrsatz 3.)}$$

X. Dividirt man in (24.) oben und unten mit  $\sin x \sin y$ , so erhält man

$$\text{tang}(y \pm x) = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} \pm \frac{\cos y}{\sin y}}{\frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} \pm 1},$$

oder, weil  $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ ,  $\frac{\cos y}{\sin y} = \cot y$  (§. 315.),

$$26. \text{tang}(y \pm x) = \frac{\cot x \pm \cot y}{\cot x \cot y \pm 1} \text{ (wie im Lehrsatz 3.)}$$

XI. Ferner ist  $\sec(y \pm x) = \frac{1}{\cos(y \pm x)}$  (§. 315.), welches vermöge (23.)

$$27. \sec(y \pm x) = \frac{\text{cosec } x \text{ cosec } y}{\cot x \cot y \pm 1} \text{ (wie im Lehrsatz 4.)}$$

gibt.

XII. Schreibt man dagegen den Ausdruck von  $\cos(y \pm x)$  (2.) wie folgt:

$$\cos(y \pm x) = \cos x \cos y \left( 1 \pm \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} \right),$$

so erhält man, weil  $\cos x = \frac{1}{\sec x}$ ,  $\cos y = \frac{1}{\sec y}$ ,  $\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tang } x$  und  $\frac{\sin y}{\cos y} = \text{tang } y$  ist,

$$\cos(y \pm x) = \frac{1 \pm \text{tang } x \text{ tang } y}{\sec x \sec y}; \text{ also}$$

$$28. \sec(y \pm x) = \frac{\sec x \sec y}{1 \pm \text{tang } x \text{ tang } y} \text{ (wie im Lehrsatz 4.)}$$

XIII. Aus  $\cot(y \pm x) = \frac{1}{\text{tang}(y \pm x)}$  (§. 315.) folgen die Gleichungen (5.) im Lehrsatz vermöge (3.).

XIV. Da  $\text{cosec}(y \pm x) = \frac{1}{\sin(y \pm x)}$ , so ist vermöge (1.)

$$29. \operatorname{cosec}(y \pm x) = \frac{\sec x \sec y}{\tan y \pm \tan x} \text{ (wie im Lehrsatz 6.)}$$

XV. Schreibt man dagegen den Ausdruck von  $\sin(y \pm x)$  (1.) wie folgt

$$\sin(y \pm x) = \sin x \sin y \left( \frac{\cos x}{\sin x} \pm \frac{\cos y}{\sin y} \right);$$

so erhält man, weil  $\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$ ,  $\sin y = \frac{1}{\operatorname{cosec} y}$ ,  $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$  und  $\frac{\cos y}{\sin y} = \cot y$  ist (§. 315.),

$$\sin(y \pm x) = \frac{\cot x \pm \cot y}{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}; \text{ also}$$

$$30. \operatorname{cosec}(y \pm x) = \frac{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}{\cot x \pm \cot y} \text{ (wie im Lehrsatz 6.)}$$

XVI. Endlich folgt, weil  $\frac{\sin -z}{\cos -z} = \tan -z$  (§. 315.), aus (7. und 8.),

$$31. \tan -z = \frac{-\sin z}{\cos z} = -\tan z \text{ (wie im Lehrsatz 9.)}$$

und weil  $\cot -z = \frac{1}{\tan -z}$  ist (§. 315.),

$$32. \cot -z = \frac{1}{-\tan z} = -\cot z \text{ (wie im Lehrsatz 10.)}$$

Ferner weil  $\sec -z = \frac{1}{\cos -z}$  ist (§. 315.), vermöge  $\cos -z = \cos z$  (8.),

$$33. \sec -z = \frac{1}{\cos z} = \sec z \text{ (wie im Lehrsatz 11.)}$$

und weil  $\operatorname{cosec} -z = \frac{1}{\sin -z}$  ist (§. 315.), vermöge  $\sin -z = -\sin z$  (7.),

$$34. \operatorname{cosec} -z = \frac{1}{-\sin z} = -\operatorname{cosec} z \text{ (wie im Lehrsatz 12.)}^*)$$

\*) Man findet gewöhnlich den Satz  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$  auf folgende Weise, und zwar für zwei Winkel  $\angle ACM = x$  und  $\angle BCA = y$  (Fig. 166.) bewiesen, die zusammen kleiner sind als ein rechter.  $AP$  sey der Sinus von  $x$  und  $BD$  der Sinus von  $y$ ,  $DF$  auf  $MC$  und  $DE$  auf  $BQ$  senkrecht, so ist  $EQ = DF$ . Aber da die rechtwinkligen Dreiecke  $ACP$  und  $DCF$  ähnlich sind, so ist  $\frac{AC}{AP} = \frac{DC}{DF}$ , das heisst,  $\frac{1}{\sin x} = \frac{\cos y}{DF}$ , woraus  $DF = \sin x \cos y$  folgt. Ferner sind die rechtwinkligen Dreiecke  $BDE$  und  $ACP$  ähnlich; denn die Dreiecke  $ACP$  und  $GCP$ ,  $GCP$



. 317!

**Lehrsatz.** Es ist für jeden beliebigen Bogen  $x$

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\sin (2n\pi + x) = + \sin x,$                                 | $\sin ((2n+1)\pi + x) = - \sin x,$                                 |
| $\sin ((2n+\frac{1}{2})\pi + x) = + \cos x,$                      | $\sin ((2n+\frac{1}{2})\pi - x) = + \cos x,$                       |
| 2. $\cos (2n\pi + x) = + \cos x,$                                 | $\cos ((2n+1)\pi + x) = - \cos x,$                                 |
| $\cos ((2n+\frac{1}{2})\pi + x) = - \sin x,$                      | $\cos ((2n+\frac{1}{2})\pi - x) = + \sin x,$                       |
| 3. $\tan g (2n\pi + x) = + \tan g x,$                             | $\tan g ((2n+1)\pi + x) = + \tan g x,$                             |
| $\tan g ((2n+\frac{1}{2})\pi + x) = - \cot x,$                    | $\tan g ((2n+\frac{1}{2})\pi - x) = + \cot x,$                     |
| 4. $\sec (2n\pi + x) = + \sec x,$                                 | $\sec ((2n+1)\pi + x) = - \sec x,$                                 |
| $\sec ((2n+\frac{1}{2})\pi + x) = + \operatorname{cosec} x,$      | $\sec ((2n+\frac{1}{2})\pi - x) = + \operatorname{cosec} x,$       |
| 5. $\cot (2n\pi + x) = + \cot x,$                                 | $\cot ((2n+1)\pi + x) = + \cot x,$                                 |
| $\cot ((2n+\frac{1}{2})\pi + x) = - \tan g x,$                    | $\cot ((2n+\frac{1}{2})\pi - x) = + \tan g x,$                     |
| 6. $\operatorname{cosec} (2n\pi + x) = + \operatorname{cosec} x,$ | $\operatorname{cosec} ((2n+1)\pi + x) = - \operatorname{cosec} x,$ |
| $\operatorname{cosec} ((2n+\frac{1}{2})\pi + x) = + \sec x,$      | $\operatorname{cosec} ((2n+\frac{1}{2})\pi - x) = + \sec x,$       |

wo  $n$  jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeuten kann, und die obern mit den obern, die untern mit den untern Zeichen zusammengehören.

und  $GDE$ , und  $GDE$  und  $BDE$  sind ähnlich. Also ist  $\frac{BD}{BE}$

$= \frac{AC}{PC}$ , das heisst,  $\frac{\sin y}{BE} = \frac{1}{\cos x}$ , woraus  $BE = \sin y \cos x$ , folgt.

Nun war  $EQ = \sin x \cos y$ , und  $BE + EQ$  ist gleich  $BQ = \sin(x+y)$ . Also ist

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Die Ausdrücke von  $\sin(x-y)$  und  $\cos(y \pm x)$  nimmt man auf eben die Weise aus der Figur. Die Sätze für  $\tan g(y \pm x)$ ,  $\sec(y \pm x)$  etc. folgen aus den vorigen nach (§. 315.).

Gegen diese Art zu beweisen, ist nichts zu erinnern; allein die Beweise gelten, wie sie sind, nur für zwei Winkel, die beide im ersten Quadranten liegen. Die Ausdrücke des Lehrsatzes dürfen deshalb noch nicht ohne besondere Rechtfertigung auch von grösseren oder negativen Winkeln angenommen werden. Thut man es, wie es wohl geschieht, so verfällt man in den so häufigen, unhaltbaren Schluss vom Besondern auf das Allgemeine. Will man die Sätze wirklich beweisen, so muss man die Beweise erst noch für jeden der verschiedenen Fälle, wenn einer, oder wenn beide Winkel in einen der übrigen vier Quadranten liegen, wiederholen.

Da solches eine Menge von Figuren und eine weitläufige Auseinandersetzung erfordert, so pflegt man auch die Ausdrücke

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \text{ und}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

nachdem sie von Bogen im ersten Quadranten bewiesen worden, auf grössere Winkel wie folgt auszudehnen. Man beweiset zuerst, dass für jedes beliebige  $x$

$$\sin(\frac{1}{2}\pi + x) = + \cos x \text{ und}$$

$$\cos(\frac{1}{2}\pi + x) = - \sin x$$

ist, welches gewöhnlich aus der Figur geschieht. Daraus folgt, dass

**Beweis. I.** Es ist zu Folge (§. 316. 1.)

$$\sin(2n\pi + x) = \cos x \sin 2n\pi + \sin x \cos 2n\pi$$

$$\sin((2n+1)\pi + x) = \cos x \sin(2n+1)\pi + \sin x \cos(2n+1)\pi$$

$$\sin((2n+\frac{1}{2})\pi + x) = \cos x \sin(2n+\frac{1}{2})\pi + \sin x \cos(2n+\frac{1}{2})\pi$$

$$\sin((2n+\frac{1}{2})\pi - x) = \cos x \sin(2n+\frac{1}{2})\pi - \sin x \cos(2n+\frac{1}{2})\pi.$$

Setzt man hierin die Werthe von  $\sin 2n\pi$ ,  $\cos 2n\pi$ ,  $\sin(2n+1)\pi$ ,  $\cos(2n+1)\pi$  etc. aus (§. 312. 7.), so erhält man die Ausdrücke (1.) des Lehrsatzes.

**II.** Es ist zu Folge (§. 316. 2.)

$$\cos(2n\pi + x) = \cos x \cos 2n\pi - \sin x \sin 2n\pi$$

$$\cos((2n+1)\pi + x) = \cos x \cos(2n+1)\pi - \sin x \sin(2n+1)\pi$$

$$\cos((2n+\frac{1}{2})\pi + x) = \cos x \cos(2n+\frac{1}{2})\pi - \sin x \sin(2n+\frac{1}{2})\pi$$

$$\cos((2n+\frac{1}{2})\pi - x) = \cos x \cos(2n+\frac{1}{2})\pi + \sin x \sin(2n+\frac{1}{2})\pi.$$

Setzt man hierin die Werthe von  $\sin 2n\pi$ ,  $\cos 2n\pi$ ,  $\sin(2n+1)\pi$  etc. aus (§. 312. 7.), so findet man die Ausdrücke (2.) des Lehrsatzes.

$$\sin(\frac{1}{2}\pi + x + y) = + \cos(x + y) \text{ und}$$

$$\cos(\frac{1}{2}\pi + x + y) = - \sin(x + y),$$

mithin wenn  $x$  und  $y$  im ersten Quadranten liegen, daß

$$\sin(\frac{1}{2}\pi + x + y) = + \cos x \cos y - \sin x \sin y \text{ und}$$

$$\cos(\frac{1}{2}\pi + x + y) = - \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$

oder weil  $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi + x)$  und  $\sin x = - \cos(\frac{1}{2}\pi + x)$  ist,

$$\sin(\frac{1}{2}\pi + x + y) = \sin(\frac{1}{2}\pi + x) \cos y + \cos(\frac{1}{2}\pi + x) \sin y \text{ und}$$

$$\cos(\frac{1}{2}\pi + x + y) = \cos(\frac{1}{2}\pi + x) \cos y - \sin(\frac{1}{2}\pi + x) \sin y$$

ist. Nun ist  $\frac{1}{2}\pi + x$  offenbar ein Winkel der schon im zweiten Quadranten liegt. Schreibt man daher blos  $x$  statt  $\frac{1}{2}\pi + x$  und läßt also jetzt  $x$  einen Winkel bedeuten, der im zweiten Quadranten liegt, so findet man

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

welches zeigt, daß die beiden Ausdrücke des Lehrsatzes auch noch gelten, wenn einer von den beiden Winkeln in den zweiten Quadranten reicht. Auf dieselbe Art folgt nun weiter, daß die Ausdrücke gelten, wenn auch der andere Winkel größer als ein rechter und kleiner als zwei rechte ist. Wiederholt man das Verfahren, so folgt, daß die Ausdrücke auch gelten, wenn einer oder beide Winkel zwischen 2 und 3 rechten Winkeln, zwischen 3 und 4 rechten Winkeln liegen; und so für jeden beliebigen Winkel.

Da aber diese Beweisart erst den allgemeinen Beweis der Sätze  $\sin(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x$  und  $\cos(\frac{1}{2}\pi + x) = - \sin x$  für jedes beliebige  $x$  aus der Figur erfordert, so scheint die obige andere, mehr unmittelbare allgemeine Beweisart, deren Grund-Idee von Sarrus ist (Annales des mathematiques tom. XI. p. 225.) klarer und besser. Auch ist es wohl angemessener, wie hier oben, nur einen Satz aus der Figur zu nehmen und die übrigen daraus ohne weitere Hülfe der Figur abzuleiten.

III. Die Ausdrücke (3. 4. 5. 6.) des Lehrsatzes folgen unmittelbar aus  $\frac{\sin z}{\cos z} = \tan z$ ,  $\frac{1}{\cos z} = \sec z$ ,  $\frac{\cos z}{\sin z} = \cot z$  und  $\frac{1}{\sin z} = \operatorname{cosec} z$  (§. 315.); man darf sich nur unter  $z$  der Reihe nach  $x$ ,  $x + 2n\pi$ ,  $x + (2n + 1)\pi$  und  $x + (2n \pm \frac{1}{2})\pi$  vorstellen.

318.

**Lehrsatz.** Es ist für jeden beliebigen Bogen  $x$

1.  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{\sec x^2},$
2.  $\cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2 = 1 - 2 \sin x^2$   
 $= 2 \cos x^2 - 1 = \frac{\cot x^2 - 1}{\operatorname{cosec} x^2},$
3.  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan x^2} = \frac{2 \cot x}{\cot x^2 - 1},$
4.  $\sec 2x = \frac{\sec x^2}{1 - \tan x^2} = \frac{\operatorname{cosec} x^2}{\cot x^2 - 1},$
5.  $\cot 2x = \frac{\cot x^2 - 1}{2 \cot x} = \frac{1 - \tan x^2}{2 \tan x},$
6.  $\operatorname{cosec} 2x = \frac{\operatorname{cosec} x^2}{2 \cot x} = \frac{\sec x^2}{2 \tan x}.$

**Beweis.** Diese Sätze folgen unmittelbar aus (§. 316), wenn man daselbst  $x = y$  setzt und die oberen Zeichen nimmt.

319.

**Lehrsatz.** Es ist für einen beliebigen Bogen  $x$ :

$$1. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x \begin{cases} = + \sqrt{\frac{2 \sec x}{\sec x - 1}} \\ = + \frac{\sqrt{2(1 + \cos x)}}{\sin x} \end{cases} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $4n\pi$  und  $(4n + 2)\pi$  und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - 2)\pi$  und  $(4n - 4)\pi$ .

$$2. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = -\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x \begin{cases} = -\sqrt{\left(\frac{2\sec x}{\sec x - 1}\right)} \\ = -\frac{\sqrt{2(1+\cos x)}}{\sin x} \end{cases} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n+2)\pi$  und  $(4n+4)\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $4n\pi$  und  $(4n-2)\pi$ .

$$3. \begin{cases} \cos \frac{1}{2}x = +\sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)} \\ \sec \frac{1}{2}x \begin{cases} = +\sqrt{\left(\frac{2\sec x}{\sec x + 1}\right)} \\ = +\frac{\sqrt{2(1-\cos x)}}{\sin x} \end{cases} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n+3)\pi$  und  $(4n+5)\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n-3)\pi$  und  $(4n-5)\pi$ .

$$4. \begin{cases} \cos \frac{1}{2}x = -\sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)} \\ \sec \frac{1}{2}x \begin{cases} = -\sqrt{\left(\frac{2\sec x}{\sec x + 1}\right)} \\ = -\frac{\sqrt{2(1-\cos x)}}{\sin x} \end{cases} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n+1)\pi$  und  $(4n+3)\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n-1)\pi$  und  $(4n-3)\pi$ .

$$5. \sin \frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{2\cos \frac{1}{2}x}; \cos \frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{2\sin \frac{1}{2}x}.$$

$$6. \tan \frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}; \cot \frac{1}{2}x = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos x}.$$

$$7. \cot \frac{1}{2}x + \tan \frac{1}{2}x = 2\operatorname{cosec} x; \cot \frac{1}{2}x - \tan \frac{1}{2}x = 2\cot x.$$

$$8. \frac{\cot \frac{1}{2}x - \tan \frac{1}{2}x}{\cot \frac{1}{2}x + \tan \frac{1}{2}x} = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}x} = \cos x.$$

$$9. \frac{1}{\cot \frac{1}{2}x - \cot x} = \frac{1}{\tan \frac{1}{2}x + \cot x} = \sin x.$$

$$10. \frac{1}{\tan x \tan \frac{1}{2}x + 1} = \frac{1}{\tan x \cot \frac{1}{2}x - 1} = \cos x.$$

$$11. \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x^2 - \sec \frac{1}{2}x^2 = \cot \frac{1}{2}x^2 - \tan \frac{1}{2}x^2 = 4\cot x \operatorname{cosec} x.$$

$$12. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \cos \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \sec \frac{1}{2}x = \frac{+ \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \frac{+ \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{7}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{9}{2})\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - \frac{7}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{9}{2})\pi$ .

$$13. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \cos \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \sec \frac{1}{2}x = \frac{+ \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \frac{+ \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{3}{2})\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{3}{2})\pi$ .

$$14. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \cos \frac{1}{2}x = - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \sec \frac{1}{2}x = \frac{- \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \frac{- \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{3}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{5}{2})\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - \frac{3}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{5}{2})\pi$ .

$$15. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \cos \frac{1}{2}x = - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \sec \frac{1}{2}x = \frac{- \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \frac{- \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{5}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{7}{2})\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - \frac{5}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{7}{2})\pi$ .

$$16. \begin{cases} \tan \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} \\ \cot \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{3}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{5}{2})\pi$  und  
zwischen  $(4n + \frac{7}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{9}{2})\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - \frac{3}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{5}{2})\pi$  und  
zwischen  $(4n - \frac{7}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{9}{2})\pi$ .

$$17. \begin{cases} \tan \frac{1}{2} x = \frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}} \\ \cot \frac{1}{2} x = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{3}{2})\pi$  und  
zwischen  $(4n + \frac{5}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{7}{2})\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - \frac{3}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{1}{2})\pi$  und  
zwischen  $(4n - \frac{5}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{7}{2})\pi$ .

**Beweis.** I. Nach (§. 318. 2.) ist  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ . Also ist

$$1 - \cos 2x = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x \text{ und} \\ 1 + \cos 2x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Nun ist  $1 - \cos x^2 = \sin x^2$  und  $1 - \sin x^2 = \cos x^2$ , also

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \text{ und } 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x, \text{ oder} \\ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ und } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

oder, wenn man  $x$  statt  $2x$  schreibt,

$$18. \sin^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{2} \text{ und } \cos^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Daraus folgt

$$19. \sin \frac{1}{2} x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \text{ und } \cos \frac{1}{2} x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Das zwiefache Zeichen kommt daher, daß  $\cos x = \cos(2n\pi \pm x)$  ist (§. 317. 2.). Deshalb sind die Gleichungen (18.) vollständig, eigentlich

$$\sin(n\pi \pm \frac{1}{2}x)^2 = \frac{1 - \cos x}{2} \text{ und } \cos(n\pi \pm \frac{1}{2}x)^2 = \frac{1 + \cos x}{2},$$

woraus

$$20. \sin(n\pi \pm \frac{1}{2}x) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \text{ und} \\ \cos(n\pi \pm \frac{1}{2}x) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

folgt. Nun haben z. B.

$$\sin \pm \frac{1}{2}x, \sin(\pi \pm \frac{1}{2}x), \sin(2\pi \pm \frac{1}{2}x) \dots \\ \cos \pm \frac{1}{2}x, \cos(\pi \pm \frac{1}{2}x), \cos(2\pi \pm \frac{1}{2}x) \dots$$

der Reihe nach entgegengesetzte Zeichen, obgleich zu allen den Bogen  $2n\pi \pm x$  ein und derselbe Cosinus, nemlich  $\cos x$ , gehört; also müssen die Ausdrücke von  $\sin \frac{1}{2}x$  und  $\cos \frac{1}{2}x$  nothwendig doppelte Zeichen haben.

Das obere Zeichen  $+$  in dem Ausdruck von  $\sin \frac{1}{2}x$  (19.) gilt, wenn

für positive Bogen  $x$ ,  $\frac{1}{2}x$  zwischen  $2n\pi$  und  $(2n+1)\pi$ ,  
 für negative Bogen  $x$ ,  $\frac{1}{2}x$  zwischen  $2(n-1)\pi$  und  $(2n-2)\pi$   
 liegt; denn die Sinus solcher Bogen sind positiv.  
 Das untere Zeichen — gilt, wenn

für positive Bogen  $x$ ,

$\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n+1)\pi$  und  $(2n+2)\pi$ ,

für negative Bogen  $x$ ,

$\frac{1}{2}x$  zwischen  $2n\pi$  und  $(2n-1)\pi$

liegt; denn die Sinus solcher Bogen sind negativ.

Das obere Zeichen + in dem Ausdruck von  $\cos \frac{1}{2}x$  gilt, wenn

für positive Bogen  $x$ ,

$\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n+\frac{1}{2})\pi$  und  $(2n+\frac{3}{2})\pi$ ,

für negative Bogen  $x$ ,

$\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n-\frac{1}{2})\pi$  und  $(2n-\frac{3}{2})\pi$

liegt; denn die Cosinus solcher Bogen sind positiv.

Das untere Zeichen — gilt, wenn

für positive Bogen  $x$ ,

$\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n+\frac{3}{2})\pi$  und  $(2n+\frac{5}{2})\pi$ ,

für negative Bogen  $x$ ,

$\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n-\frac{3}{2})\pi$  und  $(2n-\frac{5}{2})\pi$

liegt; denn die Cosinus solcher Bogen sind negativ.

Nimmt man also die Wurzelgrößen ohne Rücksicht auf ihre Zeichen und blos den Zahlenwerth derselben, so ist

$$21. \sin \frac{1}{2}x = + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

für positive  $x$ , wenn  $x$  zwischen  $4n\pi$  und  $(4n+2)\pi$   
 liegt; und für negative  $x$ , wenn  $x$  zwischen  $(4n-2)\pi$   
 und  $(4n-4)\pi$  liegt;

$$22. \sin \frac{1}{2}x = - \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

für positive  $x$ , wenn  $x$  zwischen  $(4n+2)\pi$  und  $(4n+4)\pi$   
 liegt; und für negative  $x$ , wenn  $x$  zwischen  $4n\pi$   
 und  $(4n-2)\pi$  liegt;

$$23. \cos \frac{1}{2}x = + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

für positive  $x$ , wenn  $x$  zwischen  $(4n+3)\pi$  und  $(4n+5)\pi$   
 liegt; und für negative  $x$ , wenn  $x$  zwischen  $(4n-3)\pi$   
 und  $(4n-5)\pi$  liegt;

$$24. \cos \frac{1}{2}x = - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

für positive  $x$ , wenn  $x$  zwischen  $(4n+1)\pi$  und  $(4n+3)\pi$   
 liegt; und für negative  $x$ , wenn  $x$  zwischen  $(4n-1)\pi$   
 und  $(4n-3)\pi$  liegt; wie im Lehrsatz (1. 2. 3. 4.)

II. Ferner folgt aus (§. 318. 1.)  $\sin x = \frac{\sin 2x}{2 \cos x}$  und  $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$ , oder, wenn man  $x$  statt  $2x$  schreibt,

$$25. \sin \frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{2 \cos \frac{1}{2}x} \text{ und } \cos \frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{2 \sin x}; \text{ wie (5.)}$$

III. Sodann folgt aus  $\frac{1}{\cos \frac{1}{2}x} = \sec \frac{1}{2}x$ , wenn man aus (19.)  $\cos \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)}$  setzt,

$$\sec \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{1 + \cos x}\right)} = \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{2}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x} + 1}\right)}, \text{ oder}$$

$$26. \sec \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\left(\frac{2 \sec x}{\sec x + 1}\right)}; \text{ wie (3. 4.)}$$

Desgleichen giebt  $\sec \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{1 + \cos x}\right)}$ , wenn man oben und unten mit  $1 - \cos x$  multiplicirt,

$$\sec \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\left(\frac{2(1 - \cos x)}{1 - \cos x^2}\right)}, \text{ oder, weil } 1 - \cos x^2 = \sin x^2 \text{ ist,}$$

$$27. \sec \frac{1}{2}x = \pm \frac{\sqrt{2(1 - \cos x)}}{\sin x}; \text{ wie (3. 4.)}$$

Da diese Ausdrücke von  $\cos \frac{1}{2}x$  hergenommen sind, so sind ihre Zeichen denselben Regeln unterworfen, wie beim Cosinus.

III. Aus  $\frac{1}{\sin \frac{1}{2}x} = \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x$  folgt, wenn man

$$\sin \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \cos x}{2}\right)} \text{ setzt, } \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{1 - \cos x}\right)}$$

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{2}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x} - 1}\right)}, \text{ oder}$$

$$28. \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\left(\frac{2 \sec x}{\sec x - 1}\right)}; \text{ wie (1. 2.)}$$

Desgleichen giebt  $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{1 - \cos x}\right)}$ , wenn man oben und unten mit  $1 + \cos x$  multiplicirt,

$$\operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\left(\frac{2(1 + \cos x)}{1 - \cos x^2}\right)}, \text{ und weil } 1 - \cos x^2 = \sin x^2,$$



$$29. \operatorname{cosec} \frac{1}{2} x = \pm \frac{\sqrt{2(1 + \cos x)}}{\sin x}; \text{ wie (1. 2.).}$$

Da diese Ausdrücke von  $\sin \frac{1}{2} x$  hergenommen sind, so sind ihre Zeichen denselben Regeln unterworfen, wie beim Sinus.

IV. Multiplicirt man  $\operatorname{tang} \frac{1}{2} x = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x}$  oben und unten mit  $2 \cos \frac{1}{2} x$ ; so erhält man

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} x = \frac{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}{2 \cos^2 \frac{1}{2} x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}{1 + \cos \frac{1}{2} x^2 - \sin^2 \frac{1}{2} x^2}; \text{ folglich}$$

weil  $2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x = \sin x$  und  $\cos^2 \frac{1}{2} x - \sin^2 \frac{1}{2} x = \cos x$  (§. 318.)

$$30. \operatorname{tang} \frac{1}{2} x = \frac{\sin x}{1 + \cos x}; \text{ wie (6.).}$$

Multiplicirt man oben und unten mit  $2 \sin \frac{1}{2} x$ , so erhält man  $\operatorname{tang} \frac{1}{2} x = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} x}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \frac{1 - \cos \frac{1}{2} x^2 + \sin^2 \frac{1}{2} x^2}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}$   
 $= \frac{1 - (\cos^2 \frac{1}{2} x - \sin^2 \frac{1}{2} x)}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}$ , also

$$31. \operatorname{tang} \frac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{\sin x}; \text{ wie (6.).}$$

Die Ausdrücke

$$32. \cot \frac{1}{2} x = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \quad (6.)$$

folgen aus (30. u. 31.) unmittelbar, weil  $\cot \frac{1}{2} x = \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} x}$ .

V. Addirt man die Ausdrücke von  $\cot \frac{1}{2} x$  und  $\operatorname{tang} \frac{1}{2} x$  (30. 31. 32), so erhält man

$$\begin{aligned} \cot \frac{1}{2} x + \operatorname{tang} \frac{1}{2} x &= \frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\ &= \frac{1 + 2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{1 + 2 \cos x + 1}{\sin x (1 + \cos x)} \\ &= \frac{2(1 + \cos x)}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{2}{\sin x} = 2 \operatorname{cosec} x \text{ und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot \frac{1}{2} x + \operatorname{tang} \frac{1}{2} x &= \frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x} \\ &= \frac{1 - 2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x (1 - \cos x)} = \frac{1 - 2 \cos x + 1}{\sin x (1 - \cos x)} \\ &= \frac{2(1 - \cos x)}{\sin x (1 - \cos x)} = \frac{2}{\sin x} = 2 \operatorname{cosec} x, \end{aligned}$$

also auf beide Arten

$$33. \cot \frac{1}{2} x + \operatorname{tang} \frac{1}{2} x = 2 \operatorname{cosec} x; \text{ wie (7.).}$$

Subtrahirt man  $\tan \frac{1}{2}x$  von  $\cot \frac{1}{2}x$ , nach (30. 31. 32.) ausgedrückt, so erhält man

$$\begin{aligned}\cot \frac{1}{2}x - \tan \frac{1}{2}x &= \frac{1 + \cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\&= \frac{1 + 2 \cos x + \cos x^2 - \sin x^2}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{\cos x^2 + 2 \cos x + \cos x^2}{\sin x (1 + \cos x)} \\&= \frac{2 \cos x (1 + \cos x)}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{2 \cos x}{\sin x} = 2 \cot x \text{ und} \\ \cot \frac{1}{2}x - \tan \frac{1}{2}x &= \frac{1 - \cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{1 - \cos x} \\&= \frac{1 - 2 \cos x + \cos x^2 - \sin x^2}{\sin x (1 - \cos x)} = \frac{\cos x^2 - 2 \cos x + \cos x^2}{\sin x (1 - \cos x)} \\&= \frac{2 \cos x (1 - \cos x)}{\sin x (1 - \cos x)} = \frac{2 \cos x}{\sin x} = 2 \cot x;\end{aligned}$$

also auf beide Arten

$$34. \cot \frac{1}{2}x - \tan \frac{1}{2}x = 2 \cot x; \text{ wie (7.)}$$

VI. Dividirt man (34.) durch (33.), so erhält man

$$35. \frac{\cot \frac{1}{2}x - \tan \frac{1}{2}x}{\cot \frac{1}{2}x + \tan \frac{1}{2}x} = \frac{2 \cot x}{2 \operatorname{cosec} x} = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \cos x;$$

wie (8.), oder auch weil  $\cot \frac{1}{2}x = \frac{1}{\tan \frac{1}{2}x}$ ,

$$36. \frac{\cot \frac{1}{2}x - \tan \frac{1}{2}x}{\cot \frac{1}{2}x + \tan \frac{1}{2}x} = \frac{\frac{1}{\tan \frac{1}{2}x} - \tan \frac{1}{2}x}{\frac{1}{\tan \frac{1}{2}x} + \tan \frac{1}{2}x} = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}x};$$

wie (8.).

$$\text{VII. Da } \cot \frac{1}{2}x = \frac{1 + \cos x}{\sin x} \text{ (32.)} = \frac{1}{\sin x} + \cot x$$

$$\text{und } \tan \frac{1}{2}x = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \text{ (31.)} = \frac{1}{\sin x} - \cot x,$$

so ist  $\cot \frac{1}{2}x - \cot x = \frac{1}{\sin x} = \tan \frac{1}{2}x + \cot x$ , also

$$37. \frac{1}{\cot \frac{1}{2}x - \cot x} = \frac{1}{\tan \frac{1}{2}x + \cot x} = \sin x; \text{ wie (9.)}$$

$$\text{Da } \tan \frac{1}{2}x = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \text{ (31.) und } \cot \frac{1}{2}x = \frac{1 + \cos x}{\sin x} \text{ (32.),}$$

$$\text{so ist } \tan \frac{1}{2}x \tan x = \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - 1$$

$$\text{und } \cot \frac{1}{2}x \tan x = \left( \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + 1,$$

also  $\tan \frac{1}{2}x \tan x + 1 = \cot \frac{1}{2}x \tan x - 1 = \frac{1}{\cos x}$ , folglich

$$38. \frac{1}{\tan x \tan \frac{1}{2}x + 1} = \frac{1}{\tan x \cot \frac{1}{2}x - 1} = \cos x; \text{ wie (10.)}$$

$$\text{VIII. Da } \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}x} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}x}{\sin x} \quad (5.)$$

$$\text{und } \sec \frac{1}{2}x = \frac{1}{\cos \frac{1}{2}x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}x}{\sin x} \quad (5.),$$

$$\text{so ist } \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x^2 - \sec \frac{1}{2}x^2 = \frac{4(\cos \frac{1}{2}x^2 - \sin \frac{1}{2}x^2)}{\sin x^2}.$$

Aber  $\cos \frac{1}{2}x^2 - \sin \frac{1}{2}x^2 = \cos x$ , also

$$39. \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x^2 - \sec \frac{1}{2}x^2 = \frac{4 \cos x}{\sin x^2} = 4 \cot x \operatorname{cosec} x; \text{ wie (11.)}$$

Auch ist  $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}x^2 = 1 + \cot \frac{1}{2}x^2$  und  $\sec \frac{1}{2}x^2 = 1 + \tan \frac{1}{2}x^2$ , also

$$40. \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x^2 - \sec \frac{1}{2}x^2 = \cot \frac{1}{2}x^2 - \tan \frac{1}{2}x^2; \text{ wie (11.)}$$

IX. Es ist

$$41. \sin \frac{1}{2}x^2 + \cos \frac{1}{2}x^2 = 1 \text{ und } 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x = \sin x.$$

Addirt und subtrahirt man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$\sin \frac{1}{2}x^2 + 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x^2 = 1 + \sin x \text{ und}$$

$$\sin \frac{1}{2}x^2 - 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x^2 = 1 - \sin x, \text{ oder}$$

$$(\sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x)^2 = 1 + \sin x \text{ und}$$

$$(\sin \frac{1}{2}x - \cos \frac{1}{2}x)^2 = 1 - \sin x; \text{ also}$$

$$42. \sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{1 + \sin x} \text{ und}$$

$$43. \sin \frac{1}{2}x - \cos \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{1 - \sin x},$$

woraus, wenn man addirt und subtrahirt und durch 2 dividirt,

$$44. \sin \frac{1}{2}x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} + (\pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x}) \text{ und}$$

$$45. \cos \frac{1}{2}x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} - (\pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x})$$

folgt. Welche Zeichen zusammengehören, findet man auf eine ähnliche Art wie in (I.), nemlich:

$\alpha)$  Für positive  $x$ .

1. Es liege  $x$  zwischen  $4n\pi$  und  $(4n + \frac{1}{2})\pi$ , so fällt  $\frac{1}{2}x$  zwischen  $2n\pi$  und  $(2n + \frac{1}{4})\pi$ . Also liegt alsdann  $\frac{1}{2}x$  wie ein Bogen in der ersten Hälfte des ersten Quadranten, z. B. wie der Bogen  $MA_1$  (Fig. 165.), wenn dazwischen  $MV = VG = \frac{1}{4}\pi$  ist. Die Sinus und Cosinus solcher Bogen sind beide positiv, und der Cosinus ist größer als der Sinus, denn es ist  $VV_1 = V_1C$  und  $A_1P_1 < VV_1$ , hingegen  $P_1C > V_1C$ ; also  $P_1C > A_1P_1$ . Also ist für solche Bogen nothwen-

dig  $\sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$  positiv, und, weil  $\sin \frac{1}{2}x < \cos \frac{1}{2}x$  ist,  $\sin \frac{1}{2}x - \cos \frac{1}{2}x$  negativ; daher ist nothwendig in (42. u. 43.)

$$\sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x = + \sqrt{(1 + \sin x)} \text{ und } \sin \frac{1}{2}x - \cos \frac{1}{2}x = - \sqrt{(1 - \sin x)}, \text{ woraus}$$

$$46. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin x)} - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin x)} \text{ und} \\ \cos \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin x)} + \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin x)} \end{cases}$$

folgt; für positive  $x$  zwischen  $4n\pi$  und  $(4n + \frac{1}{2})\pi$ .

2. Es liege  $x$  zwischen  $(4n + \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n + 1)\pi$ , so fällt  $\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n + \frac{1}{4})\pi$  und  $(2n + \frac{3}{4})\pi$ . Also liegt alsdann  $\frac{1}{2}x$  wie ein Bogen in der zweiten Hälfte des ersten Quadranten. Z. B. wie der Bogen  $MB_1$ . Die Sinus und Cosinus solcher Bogen sind beide positiv, und der Sinus ist größer als der Cosinus, was sich auf gleiche Weise wie in (1.) zeigen läßt. Also ist  $\sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$  positiv und  $\sin \frac{1}{2}x - \cos \frac{1}{2}x$  ebenfalls positiv, folglich gilt in (42.) wie in (43.) das obere Zeichen, und es ist folglich

$$47. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin x)} + \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin x)} \text{ und} \\ \cos \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin x)} - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin x)}; \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n + 1)\pi$ .

3. Es liege  $x$  zwischen  $(4n + 1)\pi$  und  $(4n + \frac{3}{2})\pi$ , so liegt  $\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n + \frac{1}{2})\pi$  und  $(2n + \frac{3}{4})\pi$ , folglich wie z. B. der Bogen  $MGA_2$ , wenn  $GV_2 = NV_2$ . Die Sinus solcher Bogen sind positiv, die Cosinus negativ und es ist  $\sin \frac{1}{2}x > -\cos \frac{1}{2}x$ . Also ist  $\sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$  positiv, und  $\sin \frac{1}{2}x - \cos \frac{1}{2}x$  ebenfalls positiv; mithin ist, wie im 2ten Falle,

$$48. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin x)} + \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin x)}, \\ \cos \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin x)} - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin x)}. \end{cases}$$

4. Es liege  $x$  zwischen  $(4n + \frac{3}{2})\pi$  und  $(4n + 2)\pi$ , so fällt  $\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n + \frac{3}{4})\pi$  und  $(2n + 1)\pi$ , wie  $MGB_2$ .  $\sin \frac{1}{2}x$  ist positiv,  $\cos \frac{1}{2}x$  negativ und  $\sin \frac{1}{2}x > -\cos \frac{1}{2}x$ . Also ist  $\sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$  negativ und  $\sin \frac{1}{2}x - \cos \frac{1}{2}x$  positiv. Folglich gilt in (42.) das untere und in (43.) das obere Zeichen und man erhält:

$$49. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = - \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin x)} + \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin x)}, \\ \cos \frac{1}{2}x = - \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin x)} - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin x)}. \end{cases}$$

5. Es liege  $x$  zwischen  $(4n + 2)\pi$  und  $(4n + \frac{5}{2})\pi$ , so fällt  $\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n + 1)\pi$  und  $(2n + \frac{3}{4})\pi$ , wie  $MGNA_2$ .  $\sin \frac{1}{2}x$  und  $\cos \frac{1}{2}x$  sind beide negativ, und es ist  $-\sin \frac{1}{2}x < -\cos \frac{1}{2}x$ , oder  $\cos \frac{1}{2}x < \sin \frac{1}{2}x$ . Also ist  $\sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$  negativ und  $\sin \frac{1}{2}x - \cos \frac{1}{2}x$  positiv. Folglich ist, wie im 4ten Falle,

$$50. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin x} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin x}, \\ \cos \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin x} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin x}. \end{cases}$$

6. Es liege  $x$  zwischen  $(4n + \frac{5}{2})\pi$  und  $(4n + 3)\pi$ , so fällt  $\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n + \frac{1}{2})\pi$  und  $(2n + \frac{3}{2})\pi$ , wie  $MGNB_3$ .  $\sin \frac{1}{2}x$  und  $\cos \frac{1}{2}x$  sind beide negativ und es ist  $-\sin \frac{1}{2}x > -\cos \frac{1}{2}x$ , oder  $\cos \frac{1}{2}x > \sin \frac{1}{2}x$ . Also ist  $\sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$  negativ und  $\sin \frac{1}{2}x - \cos \frac{1}{2}x$  ebenfalls negativ. Folglich gelten in (42.) und (43.) die untern Zeichen, und man findet:

$$51. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin x} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin x}, \\ \cos \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin x} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin x}. \end{cases}$$

7. Es liege  $x$  zwischen  $(4n + 3)\pi$  und  $(4n + \frac{7}{2})\pi$ , so fällt  $\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n + \frac{3}{2})\pi$  und  $(2n + \frac{7}{4})\pi$ , wie  $MGNHA_4$ .  $\sin \frac{1}{2}x$  ist negativ und  $\cos \frac{1}{2}x$  positiv und  $-\sin \frac{1}{2}x > \cos \frac{1}{2}x$ . Also ist  $\sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$  negativ und  $\sin \frac{1}{2}x - \cos \frac{1}{2}x$  ebenfalls negativ, folglich, wie im 6ten Falle,

$$52. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin x} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin x}, \\ \cos \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin x} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin x}. \end{cases}$$

8. Es liege  $x$  zwischen  $(4n + \frac{7}{2})\pi$  und  $(4n + 4)\pi$ , so fällt  $\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n + \frac{7}{4})\pi$  und  $(2n + 2)\pi$ , wie  $MGNHB_4$ .  $\sin \frac{1}{2}x$  ist negativ und  $\cos \frac{1}{2}x$  positiv und  $-\sin \frac{1}{2}x < \cos \frac{1}{2}x$ . Also ist  $\sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$  positiv und  $\sin \frac{1}{2}x - \cos \frac{1}{2}x$  negativ. Folglich ist wie im 1sten Falle

$$53. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = +\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin x} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin x}, \\ \cos \frac{1}{2}x = +\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin x} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin x}. \end{cases}$$

Größere Bogen sind wieder in einem der vorigen Fälle, weil  $(4n + 4)\pi$  oder  $4(n + 1)\pi$  auch eben so wohl durch  $4n\pi$  bezeichnet wird. Die darauf folgenden Bogen sind also wieder unter den vorigen mitbegriffen und die aufgezählten 8 Fälle umfassen alle mögliche positive Bogen.

### $\beta$ . Für negative $x$ .

9. Es liege  $x$  zwischen  $4n\pi$  und  $(4n - \frac{1}{2})\pi$ , so fällt  $\frac{1}{2}x$  zwischen  $2n\pi$  und  $(2n - \frac{1}{4})\pi$ , wie  $MB_4$ . Der Fall kommt also mit dem 8ten überein und die Resultate stimmen mit (53.).

10. Es liege  $x$  zwischen  $(4n - \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n - 1)\pi$ , so fällt  $\frac{1}{2}x$  zwischen  $(2n - \frac{1}{4})\pi$  und  $(2n - \frac{1}{2})\pi$ , wie  $MA_4$ . Also kommt der Fall mit dem 7ten überein und die Resultate stimmen mit (52.).

11. Eben so erhält man, wenn  $x$  zwischen  $(4n - 1)\pi$  und  $(4n - \frac{3}{2})\pi$  liegt, die Resultate des 6ten Falles (51.).

12. Wenn  $x$  zwischen  $(4n - \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n - 2)\pi$  fällt, findet man die Resultate des 5ten Falles (50.).

13. Wenn  $x$  zwischen  $(4n - 2)\pi$  und  $(4n - \frac{3}{2})\pi$  fällt, findet man die Resultate des 4ten Falles (49.).

14. Wenn  $x$  zwischen  $(4n - \frac{3}{2})\pi$  und  $(4n - 3)\pi$  fällt, findet man die Resultate des 3ten Falles (48.).

15. Wenn  $x$  zwischen  $(4n - 3)\pi$  und  $(4n - \frac{7}{2})\pi$  fällt, findet man die Resultate des 2ten Falles (47.).

16. Wenn  $x$  zwischen  $(4n - \frac{7}{2})\pi$  und  $(4n - 4)\pi$  fällt, findet man die Resultate des 1ten Falles (46.).

Die folgenden Bogen sind, wie bei den positiven  $x$ , wieder unter den vorigen mitbegriffen und die aufgezählten 8 Fälle (9. bis 16.) umfassen alle mögliche negative Bogen.

Die Resultate

im 1ten, 8ten, 9ten und 16ten Falle

im 2ten, 5ten, 14ten — 15ten —

im 4ten, 6ten, 12ten — 13ten —

im 6ten, 7ten, 10ten — 11ten —

sind einander gleich, woraus die Gleichungen (12. 13. 14. 15.) des Lehrsatzes folgen.

$$\text{X. Da } \sec \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\sin x}$$

$$\text{und } \operatorname{cosec} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \cos \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \cos \frac{x}{2}}{\sin x},$$

so findet man die Ausdrücke von  $\sec \frac{x}{2}$  und  $\operatorname{cosec} \frac{x}{2}$  (12. 13. 14. 15.) durch  $\sin x$  in den verschiedenen Fällen, wenn man aus (IX.) die Ausdrücke von  $2 \sin \frac{x}{2}$  und  $2 \cos \frac{x}{2}$  durch  $\sin x$  dividirt.

$$\text{XI. Die Ausdrücke } \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \text{ und } \cot \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \text{ (16. 17.) findet man, wenn man diejenigen von } \sin \frac{x}{2} \text{ und } \cos \frac{x}{2} \text{ für die verschiedenen Fälle mit einander dividirt.}$$

320.

**Lehrsatz.** Der Sinus von einem Drittheil des rechten Winkels, oder  $\frac{\pi}{6}$ , und der ihm gleiche Cosinus von  $\frac{\pi}{3}$  oder  $\frac{\pi}{2}$  ist der Hälfte der Halbmessers gleich, so daß

$$1. \sin \left( 2n \pm \frac{\pi}{6} \right) = \pm \frac{1}{2}, \sin \left( 2n + 1 \pm \frac{\pi}{6} \right) = \mp \frac{1}{2}$$

$$2. \cos \left( 2n \pm \frac{\pi}{3} \right) = \pm \frac{1}{2}, \cos \left( 2n + 1 \pm \frac{\pi}{3} \right) = \mp \frac{1}{2}.$$

Die Tangente der Hälfte des rechten Winkels, oder von  $\frac{\pi}{4}$ , und die ihr gleiche Cotangente des nemlichen Win-

kels sind dem Halbmesser selbst gleich, so daß

$$3. \quad \text{tang} \left( 2n \pm \frac{1}{4} \right) \pi = \pm 1, \quad \text{tang} \left( 2n + 1 \pm \frac{1}{4} \right) \pi = \pm 1;$$

$$4. \quad \cot \left( 2n \pm \frac{1}{4} \right) \pi = \pm 1, \quad \cot \left( 2n + 1 \pm \frac{1}{4} \right) \pi = \pm 1.$$

Alle übrigen goniometrischen Linien von rationalen Theilen des Umfangs sind irrational.

Der Sinus und der ihm gleiche Cosinus von  $\frac{1}{4}\pi$  ist  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ , so daß

$$5. \quad \sin \left( 2n \pm \frac{1}{4} \right) \pi = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \sin \left( 2n + 1 \pm \frac{1}{4} \right) \pi = \mp \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$6. \quad \cos \left( 2n \pm \frac{1}{4} \right) \pi = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \cos \left( 2n + 1 \pm \frac{1}{4} \right) \pi = \mp \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Ueberall gehören die obern Zeichen zusammen, wie die untern.

**Beweis.** Der Sinus von  $\frac{1}{4}\pi$  ist die Hälfte der Sehne von  $\frac{1}{2}\pi$ . Diese Sehne aber ist die Seite des regelmäßigen, eingeschriebenen Sechsecks, denn  $\frac{1}{4}\pi$  ist der sechste Theil des Umfangs. Nun ist die Seite des regelmäßigen Sechsecks dem Halbmesser seiner Ecken gleich, also gleich 1. Folglich ist  $\sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}$ . Daraus folgen die Gleichungen (1.), wenn man in (§. 317. 1.)  $\pm \frac{1}{4}\pi$  statt  $x$  setzt.

Ferner ist  $\cos \frac{1}{4}\pi = \sin \frac{1}{4}\pi$ , weil zu Folge (§. 317. 2.)  $\cos \left( \frac{1}{2}\pi - x \right) = \sin x$  ist, welches  $\cos \left( \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi \right)$ , oder  $\cos \frac{1}{4}\pi = \sin \frac{1}{4}\pi$  giebt. Daraus folgen die Gleichungen (2.) wenn man in (§. 317. 2.)  $\pm \frac{1}{4}\pi$  statt  $x$  setzt.

Die Tangente von  $\frac{1}{4}\pi$  ist die Hälfte der Seite des regelmäßigen, umschriebenen Vierecks; denn  $\frac{1}{4}\pi$  ist der achte Theil des Umfangs. Die Seite dieses Quadrats aber ist 2. Also ist  $\text{tang} \frac{1}{4}\pi = 1$ . Daraus folgen die Gleichungen (3.) wenn man in (§. 317. 3.)  $\pm \frac{1}{4}\pi$  statt  $x$  setzt.

Eben so folgen die Gleichungen (4.) aus (§. 317. 5.) wenn man  $\pm \frac{1}{4}\pi$  statt  $x$  setzt; denn die Cotangente von  $\frac{1}{4}\pi$  ist ebenfalls die Hälfte der Seite des umschriebenen Quadrats.

Der Sinus von  $\frac{1}{4}\pi$  ist dem Cosinus von  $\frac{1}{4}\pi$  gleich; also ist sein Quadrat die Hälfte von 1 und mithin der Sinus, wie der Cosinus, gleich  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ , welches vermöge (§. 317. 1. 2.) die Ausdrücke (5. und 6.) giebt.

### 321.

**Lehrsatz.** Die Quadrate der Sinus von  $(n + \frac{1}{8})\pi$  und von  $(n + \frac{3}{8})\pi$ , und nur diese, sind von den Quadraten der Sinus der doppelten Winkel um das Quadrat des Sinus von  $(n + \frac{1}{4})\pi$ , oder um  $\frac{1}{4}$  (§. 320.) verschieden, so daß

1.  $\begin{cases} \sin((n + \frac{1}{10})\pi)^2 + \sin((n + \frac{1}{5})\pi)^2 = \sin(2(n + \frac{1}{10})\pi)^2 \text{ und} \\ \sin((n + \frac{1}{10})\pi)^2 + \sin((n + \frac{1}{5})\pi)^2 = \sin(2(n + \frac{1}{10})\pi)^2, \end{cases}$   
 oder, wenn man den Umfang in 360 Grade theilt und statt  $(n + \frac{1}{5})\pi$  seinen Werth  $\pm \frac{1}{5}$  setzt,

$$2. \begin{cases} \sin(n\pi + 18^\circ)^2 + \frac{1}{4} = \sin(2n\pi + 36^\circ)^2 \text{ und} \\ \sin(n\pi + 54^\circ)^2 + \frac{1}{4} = \sin(2n\pi + 108^\circ)^2 \end{cases}$$

ist. Die Werthe dieser Sinus sind

$$3. \begin{cases} \sin(n + \frac{1}{10})\pi = \pm \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}), \\ \sin 2(n + \frac{1}{10})\pi = \frac{1}{4}\sqrt{+10 - 2\sqrt{5}}, \\ \sin(n + \frac{1}{5})\pi = \pm \frac{1}{4}(+1 + \sqrt{5}), \\ \sin 2(n + \frac{1}{5})\pi = \frac{1}{4}\sqrt{+10 + 2\sqrt{5}}. \end{cases}$$

$n$  ist eine beliebige ganze Zahl und das obere Zeichen gilt, wenn  $n$  grade, das untere, wenn  $n$  ungrade ist.

**Beweis.** I. Um zu sehen wie viel Sinus es giebt, deren Quadrate von den Quadraten der Sinus der doppelten Winkel um  $\frac{1}{4}$  verschieden sind, setze man einen solchen Sinus gleich  $z = \sin \varphi$ , so ist der Sinus des doppelten Winkels, vermöge (§. 318. 1.)  $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = z\sqrt{1 - z^2}$ . Es muß also, der Bedingung zu Folge

$$4. \quad z^2 + \frac{1}{4} = (2z\sqrt{1 - z^2})^2$$

seyn. Daraus folgt  $4z^2 + 1 = 16z^2(1 - z^2)$ , oder  $16z^4 - 12z^2 + 1 = 0$ , oder  $(4z^2 - 1)^2 - 4z^2 = 0$ , oder

$$5. \quad (4z^2 - 1 - 2z)(4z^2 - 1 + 2z) = 0;$$

also

$$6. \quad \begin{cases} 4z^2 - 2z - 1 = 0, \text{ oder } z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} = 0 \text{ und} \\ 4z^2 + 2z - 1 = 0, \text{ oder } z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{4} = 0. \end{cases}$$

Dieses giebt

$$7. \quad \begin{cases} z = +\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(\pm 1 \pm \sqrt{5}) \\ z = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5}). \end{cases}$$

Je zwei dieser vier Werthe von  $z$  sind an Gröfse gleich und haben nur entgegengesetzte Zeichen. Man kann also schreiben

$$8. \quad \begin{cases} z = \pm \frac{1}{4}(+1 + \sqrt{5}) \text{ und} \\ z = \pm \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}). \end{cases}$$

Es giebt demnach zwar vier verschiedene Sinus, welche die vorgeschriebene Bedingung erfüllen, aber je zwei gehören zu Winkeln, die nur um eine ungerade Zahl von halben Umfängen verschieden seyn können, indem sie an Gröfse gleich sind, und nur entgegengesetzte Zeichen haben. Abgesehen von demjenigen Unterschiede der ungleichen Winkel, die nur irgend eine Zahl von halben oder ganzen Umfängen seyn kann, giebt es also nur zwei Winkel von der vorausgesetzten Eigenschaft, nemlich, daß die



Quadrate ihrer Sinus von den Quadraten der Sinus der doppelten Winkel um  $\frac{1}{4}$  verschieden sind.

II. Die Winkel selbst kann man vermittelt der Bedingung (6.), welche soviel ist als

$$9. \quad 4z^2 \pm 2z - 1 = 0, \text{ oder}$$

$$10. \quad \frac{2z}{1 \pm 2z} = \frac{1}{2z},$$

und zwar mit Hülfe einer Figur, wie folgt finden. Weiter unten wird sich zeigen, daß sich die Winkel auch ohne Figur finden lassen.

Man setze, die Hälften der Winkel  $ACB$  und  $ACD$  (Fig. 167.) wären die gesuchten doppelten Winkel, und nehme  $AC = BC = DC = 1$  an, so daß die Dreiecke  $ACB$  und  $ACD$  gleichschenkelig sind, so sind  $AB$  und  $AD$  die doppelten Sinus der halben Winkel  $ACB$  und  $ACD$ , und folglich gleich  $2z$ . Nun nehme man die verschiedenen  $2z$  positiv und negativ, auf dem einen Schenkel, von  $C$  aus nach  $E$  und nach  $F$ , so daß  $EC = AB = 2z$ ,  $CF = AD = 2z$ ,  $AE = 1 - 2z$  und  $AF = 1 + 2z$  ist, so müssen die Winkel  $ACB$  und  $ACD$  von der Art seyn, daß sie die Bedingung  $\frac{2z}{1 \pm 2z} = \frac{1}{2z}$  erfüllen, und daß also

$$11. \quad \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AB} \text{ und } \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AD}$$

ist. Die Seiten, welche in den Dreiecken  $ABE$ ,  $ABC$  und  $ADC$ ,  $ADF$  die Winkel bei  $A$  einschließen, müssen also Gleichvielfache seyn, das heißt: die Dreiecke  $ABE$ ,  $ACB$  und  $ADF$ ,  $ACD$  müssen ähnlich seyn. Es muß also  $BE = AB = 2z$  seyn, weil  $BC = AC$  ist, und  $DF = AD = 2z$ , weil  $AC = CD$  ist. Also müssen auch die Dreiecke  $BEC$  und  $DFC$  gleichschenkelig und folglich die Winkel  $ECB$ ,  $CBE$ ,  $ABE$ , so wie  $ACD$ ,  $ADF$ , und  $DCF$ ,  $CDF$  einander gleich seyn.

Daraus folgt  $ABC = 2BCA$  und weil  $BAC = ABC$ ,

$$12. \quad BCA = \frac{1}{3}(2\varrho)$$

desgleichen  $CDF = DCF = 2\varrho - ACD$ . Also da  $ADF = ACD$  seyn soll,  $ADC$  oder  $ADF - CDF$  gleich  $ACD - (2\varrho - ACD) = 2ACD - 2\varrho$ . Eben so der gleiche Winkel  $DAC = 2ACD - 2\varrho$ . Also  $ACD = 2\varrho - 2(2ACD - 2\varrho) = 2\varrho - 4ACD + 4\varrho$ , woraus

$$13. \quad ACD = \frac{1}{3}(6\varrho)$$

folgt.

Da nun  $ACB$  und  $ACD$  die doppelten Winkel  $\varphi$  sind, so ist

$$14. \quad \varphi = \frac{1}{10}(2\rho) \text{ und } \varphi = \frac{1}{10}(6\rho),$$

oder, wenn man die Bogen nimmt,

$$15. \quad \varphi = \frac{1}{10}\pi \text{ und } \varphi = \frac{3}{10}\pi,$$

und weil, wie oben gefunden, die Sinus auch negativ seyn können, also noch eine beliebige Zahl von halben Umfängen hinzugesetzt oder hinweggenommen werden kann,

$$16. \quad \varphi = (n + \frac{1}{10})\pi \text{ und } \varphi = (n + \frac{3}{10})\pi;$$

das heisst: die Winkel, welche die Eigenschaft haben, daß die Quadrate ihrer Sinus von den Quadraten der Sinus der doppelten Winkel um  $\frac{1}{4}$  verschieden sind, sind  $(n + \frac{1}{10})\pi$  und  $(n + \frac{3}{10})\pi$ ; wie behauptet wurde.

III. Ihre Sinus sind zu Folge (8.)  $\pm \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$  und  $\pm \frac{1}{4}(+1 + \sqrt{5})$  wie (5.), und da die Quadrate der Sinus der doppelten Winkel um  $\frac{1}{4}$  grösser sind, so sind diese Quadrate  $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}(1 - 2\sqrt{5} + 5)$  und  $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}(1 + 2\sqrt{5} + 5)$ , oder  $\frac{1}{16}(10 - 2\sqrt{5})$  und  $\frac{1}{16}(10 + 2\sqrt{5})$ , also die Sinus der doppelten Winkel selbst,

$$17. \quad \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \text{ und } \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

wie (3.).

## 322.

*Anmerkung.* Durch die Ausdrücke der Sinus von  $\frac{1}{6}\pi$ ,  $\frac{1}{4}\pi$ ,  $\frac{1}{3}\pi$ ,  $\frac{1}{10}\pi$ ,  $\frac{3}{10}\pi$ ,  $\frac{2}{5}\pi$  und  $\frac{6}{10}\pi$ , in den beiden vorigen Paragraphen, oder, nach der Eintheilung des Umfanges in 360 Grade, der Sinus von  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $54^\circ$ ,  $36^\circ$  und  $108^\circ$ , oder was dasselbe ist,  $72^\circ$ , welche Ausdrücke auch, weil  $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$  ist, unmittelbar die Cosinus und daraus weiter die Tangenten, Secanten etc. der nemlichen Winkel geben, kann man ohne andere Hülfe die goniometrischen Linien aller Winkel von  $\frac{1}{60}\pi$  zu  $\frac{1}{60}\pi$  oder von 3 zu 3 Graden finden, und zwar durch bloße Quadrat-Wurzeln.

Durch die Ausdrücke  $\sin(y+x) = \sin y \cos x + \cos y \sin x$  und  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  nemlich findet man die Sinus der Winkel von  $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ , von  $18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ , von  $2 \cdot 3^\circ = 6^\circ$ , von  $3^\circ + 6^\circ = 9^\circ$ , von  $3^\circ + 9^\circ = 12^\circ$ ; u. s. w. von drei zu drei Graden. Aus den Sinus und Cosinus findet man die Tangenten, Secanten, Cotangenten und Cosecanten.

Man kann auch noch, wenn man will, mittelst des Ausdrucks  $\sin \frac{1}{2}x = \pm \frac{\sqrt{(1 - \cos x)}}{2}$  die Winkel wiederholt und immerfort halbiren, und folglich die Sinus so kleiner Winkel finden als man will.

Die Theilung des Winkels in andere Theile als Hälften ist aber hierunter nicht mit begriffen. Kommt es blos darauf an, die Zahlenwerthe der goniometrischen Linien gegebener Winkel zu finden, so ist die Berechnung durch Reihen, weiter unten, viel bequemer und leichter.

323.

*Lehrsatz.* Es ist für beliebige Bogen  $x$  und  $y$

1.  $\sin(x + y) + \sin(x - y) = + 2 \sin x \cos y.$
2.  $\sin(x + y) - \sin(x - y) = + 2 \cos x \sin y.$
3.  $\cos(x + y) + \cos(x - y) = + 2 \cos x \cos y.$
4.  $\cos(x + y) - \cos(x - y) = - 2 \sin x \sin y.$
5.  $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y). \\ \sin x \cos x + \sin y \cos y = \sin(x + y) \cos(x - y). \end{cases}$
6.  $\begin{cases} \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y). \\ \sin x \cos x - \sin y \cos y = \cos(x + y) \sin(x - y). \end{cases}$
7.  $\cos x + \cos y = + 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y).$
8.  $\cos x - \cos y = - 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y).$
9.  $\sin x^2 - \sin y^2 = \cos y^2 - \cos x^2 = \sin(x + y) \sin(x - y).$
10.  $\cos x^2 - \sin y^2 = \cos y^2 - \sin x^2 = \cos(x + y) \cos(x - y).$
11.  $\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$
12.  $\cot y \pm \cot x = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}.$
13.  $\cot x \mp \tan y = \frac{\cos(x \pm y)}{\sin x \cos y}.$
14.  $\frac{\tan x \pm \tan y}{\cot y \pm \cot x} = \tan x \tan y.$
15.  $\frac{\tan x \pm \tan y}{\cot x \pm \tan y} = \tan x \tan(x \pm y).$
16.  $\frac{\cot y \pm \cot x}{\cot x \mp \tan y} = \cot y \tan(x \pm y).$
17.  $\tan x^2 - \tan y^2 = \frac{\sin(x + y) \sin(x - y)}{\cos x^2 \cos y^2}.$
18.  $\cot y^2 - \cot x^2 = \frac{\sin(x + y) \sin(x - y)}{\sin x^2 \sin y^2}.$
19.  $\cot x^2 - \tan y^2 = \frac{\cos(x + y) \cos(x - y)}{\sin x^2 \cos y^2}.$

$$20. \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\operatorname{cosec} y + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} y - \operatorname{cosec} x} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)}$$

$$21. \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) \text{ oder } \frac{\cos x + \cos y}{\sin x + \sin y} = \cot \frac{1}{2}(x+y).$$

$$22. \frac{\cos y - \cos x}{\sin x + \sin y} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) \text{ oder } \frac{\sin x + \sin y}{\cos y - \cos x} = \cot \frac{1}{2}(x+y).$$

$$23. \frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{\sec y - \sec x}{\sec y + \sec x} = -\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y).$$

$$24. \frac{\sin(x+y)}{\sin x + \sin y} = \frac{\cos \frac{1}{2}(x+y)}{\cos \frac{1}{2}(x-y)}.$$

$$25. \frac{\sin(x+y)}{\sin x - \sin y} = \frac{\sin \frac{1}{2}(x+y)}{\sin \frac{1}{2}(x-y)}.$$

$$26. \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2 \sin x}{\cos x + \cos y}.$$

$$27. \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2 \sin y}{\cos x + \cos y}.$$

$$28. \cot \frac{1}{2}(x-y) + \cot \frac{1}{2}(x+y) = \frac{2 \sin x}{\cos y - \cos x}.$$

$$29. \cot \frac{1}{2}(x-y) - \cot \frac{1}{2}(x+y) = \frac{2 \sin y}{\cos y - \cos x}.$$

$$30. \cot \frac{1}{2}(x+y) - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2 \cos x}{\sin x + \sin y}.$$

$$31. \cot \frac{1}{2}(x+y) + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2 \cos y}{\sin x + \sin y}.$$

$$32. \cot \frac{1}{2}(x-y) - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) = \frac{2 \cos x}{\sin x - \sin y}.$$

$$33. \cot \frac{1}{2}(x-y) + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) = \frac{2 \cos y}{\sin x - \sin y}.$$

$$34. \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\cot y + \cot x}{\cot y - \cot x} = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y}.$$

$$35. \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{\cot y - \operatorname{tang} x}{\cot y + \operatorname{tang} x} = \frac{\cot x - \operatorname{tang} y}{\cot x + \operatorname{tang} y}.$$

Ueberall gehören die oberen Zeichen zusammen, wie die unteren.

**Beweis.** I. Es ist

$$\begin{aligned} 36. \quad \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ 37. \quad \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ 38. \quad \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ 39. \quad \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned} \quad (\S. 316. 1, 2.)$$

Addirt man (36. und 37.), so erhält man (1.). Subtrahirt man (37.) von (36.), so erhält man (2.). Addirt und subtrahirt man (38.) und (39.), so erhält man (3. und 4.).

II. Setzt man  $\frac{1}{2}(x+y)$  statt  $x$  und  $\frac{1}{2}(x-y)$  statt  $y$ , so muß man  $\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) = x$  statt  $x+y$  und  $\frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y) = y$  statt  $x-y$  setzen. Geschieht dieses in (1. 2. 3. 4.), so erhält man die ersten Ausdrücke in (5. 6.), desgleichen (7. 8.).

Die zweiten Ausdrücke in (5. und 6.) findet man, wenn man in die ersten  $2x$  statt  $x$  und  $2y$  statt  $y$  setzt, weil  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  und  $\sin 2y = 2 \sin y \cos y$  ist (§. 318.).

III. Multiplicirt man den ersten Ausdruck (5.) mit dem ersten Ausdruck (6.), und (7.) mit (8.), so erhält man linkerhand  $\sin x^2 - \sin y^2$  und  $\cos x^2 - \cos y^2$ , rechterhand aber für Beides  $4 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y) \cos \frac{1}{2}(x-y)$ , welches letztere, weil  $2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+y) = \sin 2 \cdot \frac{1}{2}(x+y)$  (§. 318. 1.)  $= \sin(x+y)$  und  $2 \sin \frac{1}{2}(x-y) \cos \frac{1}{2}(x-y) = \sin(x-y)$  ist, so viel ist als  $\sin(x+y) \sin(x-y)$ . Also ist  $\sin x^2 - \sin y^2 = \cos x^2 - \cos y^2 = \sin(x+y) \sin(x-y)$ , wie (9.).

IV. Multiplicirt man (38.) mit (39.), so erhält man  $\cos(x+y) \cos(x-y) = \cos x^2 \cos y^2 - \sin x^2 \sin y^2$   
 $= \cos x^2 (1 - \sin y^2) - (1 - \cos x^2) \sin y^2$   
 $= \cos x^2 - \sin y^2$ , wie (10.).

Auch ist  $\cos x^2 - \sin y^2 = 1 - \sin x^2 - 1 + \cos y^2 = \cos y^2 - \sin x^2$ , wie (10.).

V. Dividirt man (36.) und (37.) auf beiden Seiten mit  $\cos x \cos y$  und  $\sin x \sin y$ , so erhält man

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \tan x + \tan y, \text{ wie (11.),}$$

und

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin x \sin y} = \frac{\cos y}{\sin y} + \frac{\cos x}{\sin x} = \cot y + \cot x, \text{ wie (12.).}$$

Dividirt man (38.) und (39.) auf beiden Seiten mit  $\sin x \cos y$ , so erhält man (13.).

Dividirt man (11.) mit (12.), so erhält man (14.).

Dividirt man (11.) und (12.) durch (13.), so erhält man (15.) und (16.).

VI. Multiplicirt man mit einander die beiden Gleichungen, welche, nachdem man die oberen oder die unteren Zeichen nimmt, (11.) ausdrückt, so erhält man (17.). Multiplicirt man die beiden Gleichungen (12.), so erhält man (18.). Multiplicirt man die beiden Gleichungen (13.), so erhält man (19.).

VII. Da  $\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$  und  $\sin y = \frac{1}{\operatorname{cosec} y}$ , so ist

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\frac{1}{\operatorname{cosec} x} + \frac{1}{\operatorname{cosec} y}}{\frac{1}{\operatorname{cosec} x} - \frac{1}{\operatorname{cosec} y}}, \text{ oder wenn man oben}$$

und unten mit  $\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y$  multiplicirt,

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\operatorname{cosec} y + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} y - \operatorname{cosec} x}, \text{ wie (20.).}$$

Die andere Gleichung (20.) erhält man, wenn man die ersten Gleichungen (5.) und (6.) mit einander dividirt, nemlich

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\sin \frac{1}{2}(x+y)}{\cos \frac{1}{2}(x+y)} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(x-y)}{\sin \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)}.$$

VIII. Die Gleichungen (21.) erhält man, wenn man (5.) und (6.) durch (7.) dividirt, die Gleichungen (22.), wenn man (8.) durch (5.) und (6.) dividirt, und die Gleichung (23.), wenn man (8.) durch (7.) dividirt.

IX. Die Gleichungen (24. und 25.) erhält man, wenn man  $\sin(x+y) = 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+y)$  durch die ersten Gleichungen (5.) und (6.) dividirt.

X. Die Gleichungen (26.) und (27.) erhält man, wenn man die beiden Gleichungen (21.) addirt und subtrahirt. Eben so (28.) und (29.), wenn man die Gleichungen (22.) in der zweiten Gestalt addirt und subtrahirt. Die beiden Gleichungen (30.) und (31.) erhält man, wenn man  $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)$  aus (22.) und  $\cot \frac{1}{2}(x+y)$  aus (21.) subtrahirt und addirt. Die Gleichungen (32.) und (33.) eben so, wenn man  $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)$  aus (22.) und  $\cot \frac{1}{2}(x-y)$  aus (21.) nimmt.

XI. Die Gleichung (34.) findet man, wenn man (36.) durch (37.) beide aber vorher durch  $\sin x \sin y$  und  $\cos x \cos y$  dividirt, und die Gleichung (35.) wenn man,

(38.) durch (39.) und beide vorher durch  $\cos x \sin y$  und  $\sin x \cos y$  dividirt.

324.

**Lehrsatz.** Es ist für jeden beliebigen Bogen  $x$

$$1. \sin\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) = \cos\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right).$$

$$2. \tan\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) = \cot\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right) = \frac{1 \pm \sin 2x}{\cos 2x}$$

$$= \frac{\cos 2x}{1 \pm \sin 2x} = \frac{1 \pm \tan x}{1 \mp \tan x} = \frac{\cos x \pm \sin x}{\cos x \mp \sin x} \\ = \sec 2x \pm \tan 2x.$$

$$3. \tan\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) \pm \tan\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right) \\ = \cot\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right) \pm \cot\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) = 2 \sec 2x.$$

$$4. \tan\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) - \tan\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right) \\ = \cot\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right) - \cot\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) = 2 \tan 2x.$$

$$5. \tan\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) \tan\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right) = \cot\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) \cot\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right) = 1.$$

$$6. 2 \cos\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) \cos\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right) = 2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) \sin\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right) = \cos 2x$$

$$= \frac{2}{\tan\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) + \tan\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right)} = \frac{2}{\cot\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) + \cot\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right)}$$

$$7. \sin 2x = \frac{\tan\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right)^2 - 1}{\tan\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right)^2 + 1} = \frac{1 - \tan\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right)^2}{1 + \tan\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right)^2} \\ = \frac{\tan\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) - \tan\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right)}{\tan\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) + \tan\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right)}.$$

$$8. \frac{\tan\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) - 1}{\tan\left(\frac{1}{4}\pi \pm x\right) + 1} = \frac{1 - \tan\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right)}{1 + \tan\left(\frac{1}{4}\pi \mp x\right)} = \tan x.$$

$$9. \sin\left(\frac{1}{3}\pi \pm x\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi \mp x\right).$$

$$10. \cos\left(\frac{1}{3}\pi \pm x\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi \mp x\right).$$

$$11. \sin\left(\frac{1}{3}\pi \pm x\right) - \sin\left(\frac{1}{3}\pi \mp x\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi \mp x\right) - \cos\left(\frac{1}{6}\pi \pm x\right) = \sin x.$$

$$12. \cos\left(\frac{1}{3}\pi \pm x\right) + \cos\left(\frac{1}{3}\pi \mp x\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi \mp x\right) + \sin\left(\frac{1}{6}\pi \pm x\right) = \cos x.$$

$$13. 4 \sin\left(\frac{1}{3}\pi \pm x\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi \mp x\right) = 4 \cos\left(\frac{1}{6}\pi \mp x\right) \cos\left(\frac{1}{6}\pi \pm x\right) \\ = 2 \cos 2x + 1 = 4 \cos^2 x - 1.$$

$$14. 4 \cos\left(\frac{1}{3}\pi \pm x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{3}\pi \mp x\right) = 4 \sin\left(\frac{1}{6}\pi \mp x\right) \sin\left(\frac{1}{6}\pi \pm x\right) \\ = 2 \cos 2x - 1 = 1 - 4 \sin^2 x.$$

$$15. \tan\left(\frac{1}{3}\pi \pm x\right) \tan\left(\frac{1}{3}\pi \mp x\right) = \cot\left(\frac{1}{6}\pi \mp x\right) \cot\left(\frac{1}{6}\pi \pm x\right) \\ = \frac{2 \cos 2x + 1}{2 \cos 2x - 1}.$$

$$16. \sin\left(\frac{1}{10}\pi \pm x\right) - \sin\left(\frac{1}{10}\pi \mp x\right) + \sin\left(\frac{1}{10}\pi \mp x\right) - \sin\left(\frac{1}{10}\pi \pm x\right) \\ = \cos x.$$

$$17. \cos\left(\frac{1}{10}\pi \pm x\right) - \cos\left(\frac{1}{10}\pi \mp x\right) - \cos\left(\frac{1}{10}\pi \mp x\right) + \cos\left(\frac{1}{10}\pi \pm x\right) \\ = \sin x.$$

Die oberen Zeichen gehören mit den oberen, die unteren mit den unteren zusammen.

**Beweis.** I. Da  $\sin z = \cos(\frac{1}{2}\pi - z)$  (§. 317. 1.), so ist  $\sin(\frac{1}{4}\pi \pm x) = \cos(\frac{1}{2}\pi - (\frac{1}{4}\pi \pm x)) = \cos(\frac{1}{4}\pi \pm x)$ ; wie (1.).

II. Der erste Ausdruck von  $\tan(\frac{1}{4}\pi \pm x)$  (2.) folgt, weil  $\tan z = \cot(\frac{1}{2}\pi - z)$  ist, (§. 317. 5.), welches  $\tan(\frac{1}{4}\pi \pm x) = \cot(\frac{1}{2}\pi - (\frac{1}{4}\pi \pm x)) = \cot(\frac{1}{4}\pi \mp x)$  giebt.

Die andern Ausdrücke (2.) folgen aus

$$\tan(\frac{1}{4}\pi \pm x) = \frac{\sin(\frac{1}{4}\pi \pm x)}{\cos(\frac{1}{4}\pi \pm x)} = \frac{\sin \frac{1}{4}\pi \cos x \pm \cos \frac{1}{4}\pi \sin x}{\cos \frac{1}{4}\pi \cos x \mp \sin \frac{1}{4}\pi \sin x},$$

welches erstlich, weil  $\sin \frac{1}{4}\pi = \cos \frac{1}{4}\pi$  ist (§. 320. 5. 6.),

$$\tan(\frac{1}{4}\pi \pm x) = \frac{\cos x \pm \sin x}{\cos x \mp \sin x} \text{ giebt. Dieses ist der 5te Aus-}$$

druck von  $\tan(\frac{1}{4}\pi \pm x)$  (2.). Dividirt man oben und unten mit  $\cos x$ , so erhält man den 4ten Ausdruck:  $\frac{1 \pm \tan x}{1 \mp \tan x}$ .

Multiplcirt man oben und unten mit  $\cos x \pm \sin x$ , so erhält man  $\frac{(\cos x \pm \sin x)^2}{\cos x^2 - \sin x^2} = \frac{\cos x^2 \pm 2 \sin x \cos x + \sin x^2}{\cos x^2 - \sin x^2}$

$$= \frac{1 \pm \sin 2x}{\cos 2x}; \text{ welches der zweite Ausdruck ist. Multi-}$$

plicirt man oben und unten mit  $\cos x \mp \sin x$ , so findet

$$\text{man } \frac{\cos x^2 - \sin x^2}{(\cos x \mp \sin x)^2} = \frac{\cos x^2 - \sin x^2}{\cos x^2 \mp 2 \sin x \cos x + \sin x^2}$$

$$= \frac{\cos 2x}{1 \mp \sin 2x}; \text{ welches der dritte Ausdruck ist. Der 6te}$$

Ausdruck folgt unmittelbar aus dem zweiten, weil  $\frac{1}{\cos 2x}$

$$= \sec 2x \text{ und } \pm \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \pm \tan 2x \text{ ist.}$$

III. Die Gleichungen (3. und 4.) folgen aus (2.), wenn man den ersten und sechsten Ausdruck von  $\tan(\frac{1}{4}\pi \pm x)$  und  $\tan(\frac{1}{4}\pi - x)$  addirt und subtrahirt.

IV. Die Gleichung (5.) folgt aus (2.), weil z. B.  $\tan(\frac{1}{4}\pi - x) = \cot(\frac{1}{4}\pi \pm x)$  und  $\tan(\frac{1}{4}\pi \pm x) \cot(\frac{1}{4}\pi \pm x) = 1$  ist.

V.  $2 \cos(\frac{1}{4}\pi \pm x) \cos(\frac{1}{4}\pi - x) = 2 \sin(\frac{1}{4}\pi \pm x) \sin(\frac{1}{4}\pi - x)$  (6.) folgt aus (1.); wie (5.) aus (2.). Ferner ist, wenn man in (§. 323. 7.)  $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi$  und  $\frac{1}{2}y = x$  setzt,  $2 \cos(\frac{1}{4}\pi \pm x) \cos(\frac{1}{4}\pi - x) = \cos \frac{1}{2}\pi \pm \cos 2x = \cos 2x$  weil  $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ ; welches der 2te Ausdruck in (6.) ist. Der vierte und fünfte Ausdruck (6.) folgt aus (3.), weil

$$2 \sec 2x = \frac{2}{\cos 2x} \text{ ist.}$$



VI. Den dritten Ausdruck von  $\sin 2x$  (7.) erhält man unmittelbar, wenn man (4.) durch (3.) dividirt; denn es ist  $\frac{2 \tan 2x}{2 \sec 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} : \frac{1}{\cos 2x} = \sin 2x$ . Multiplirt man nun diesen dritten Ausdruck oben und unten mit  $\cot(\frac{1}{4}\pi - x)$ , so erhält man den zweiten Ausdruck von  $\sin 2x$ , weil  $\cot(\frac{1}{4}\pi - x) = \tan(\frac{1}{4}\pi + x)$  (2.) und  $\cot(\frac{1}{4}\pi - x) \tan(\frac{1}{4}\pi - x) = 1$  ist. Eben so findet man den ersten Ausdruck von  $\sin 2x$ , wenn man oben und unten mit  $\cot(\frac{1}{4}\pi + x)$  multiplicirt.

VII. Die Gleichung (8.) folgt aus  $\tan(\frac{1}{4}\pi \pm x) = \frac{1 \pm \tan x}{1 \mp \tan x}$  (2.); denn dieses giebt  $\tan(\frac{1}{4}\pi \pm x) \mp \tan x \tan(\frac{1}{4}\pi \pm x) = 1 \pm \tan x$ , oder  $\tan(\frac{1}{4}\pi \pm x) - 1 = \pm \tan x (1 \mp \tan(\frac{1}{4}\pi \pm x))$ , also  $\pm \tan x = \frac{\tan(\frac{1}{4}\pi \pm x) - 1}{\tan(\frac{1}{4}\pi \pm x) \mp 1}$ ; wie (8.)

VIII. Vermöge (§. 316. 1. und 2.) und weil  $\sin \frac{1}{2}\pi = \sqrt{1 - \cos \frac{1}{2}\pi^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$  (§. 320. 2.)  $= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  und  $\cos \frac{1}{2}\pi = \sqrt{1 - \sin \frac{1}{2}\pi^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$  (§. 320. 1.)  $= \frac{\sqrt{2}}{2}$  ist, ist

$$18. \sin(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{1}{2},$$

$$19. \sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{1}{2},$$

$$20. \sin(\frac{3}{4}\pi + x) = \cos x \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$21. \sin(\frac{3}{4}\pi - x) = \cos x \cdot \frac{1}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$22. \cos(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x \cdot \frac{1}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$23. \cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$24. \cos(\frac{3}{4}\pi + x) = \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{1}{2},$$

$$25. \cos(\frac{3}{4}\pi - x) = \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{1}{2}.$$

Aus (18.) und (25.) und aus (19.) und (24.) folgt, daß  $\sin(\frac{1}{2}\pi \pm x) = \cos(\frac{1}{2}\pi \mp x)$  und aus (20.) und (23.), (21.) und (22.), daß  $\cos(\frac{1}{2}\pi \pm x) = \sin(\frac{1}{2}\pi \mp x)$  ist; welches die Ausdrücke (9.) und (10.) sind.

Ferner erhält man, wenn man (19.) von (18.) und (24.) von (25.) subtrahirt, die Gleichung (11.).

Addirt man die Gleichungen (22. und 23.) und (20. und 21.), so erhält man die Gleichungen (12.).

Multiplieirt man (18.) mit (19.), so findet man  $4 \sin(\frac{1}{3}\pi + x) \sin(\frac{1}{3}\pi - x) = 3 \cos x^2 - \sin x^2 = 2(\cos x^2 - \sin x^2) + \cos x^2 + \sin x^2 = 2 \cos 2x + 1$ , oder gleich  $4 \cos x^2 - \cos x^2 - \sin x^2 = 4 \cos x^2 - 1$ , welches auch zugleich, vermöge (9.), das Product von  $\cos(\frac{1}{3}\pi - x) \cos(\frac{1}{3}\pi + x)$  ist; wie (13.).

Eben so findet man (14.) aus (22. 23. und 10.).

Die Gleichung (15.) erhält man, wenn man (13.) mit (14.) dividirt.

IX. Es ist vermöge (§. 316. 1.)

$$\sin\left(\frac{1}{10}\pi + x\right) = \sin\frac{1}{10}\pi \cos x + \cos\frac{1}{10}\pi \sin x,$$

$$\sin\left(\frac{1}{10}\pi - x\right) = \sin\frac{1}{10}\pi \cos x - \cos\frac{1}{10}\pi \sin x,$$

$$\sin\left(\frac{1}{10}\pi + x\right) = \sin\frac{1}{10}\pi \cos x + \cos\frac{1}{10}\pi \sin x,$$

$$\sin\left(\frac{1}{10}\pi - x\right) = \sin\frac{1}{10}\pi \cos x - \cos\frac{1}{10}\pi \sin x,$$

$$\cos\left(\frac{1}{10}\pi + x\right) = \cos\frac{1}{10}\pi \cos x - \sin\frac{1}{10}\pi \sin x,$$

$$\cos\left(\frac{1}{10}\pi - x\right) = \cos\frac{1}{10}\pi \cos x + \sin\frac{1}{10}\pi \sin x,$$

$$\cos\left(\frac{1}{10}\pi + x\right) = \cos\frac{1}{10}\pi \cos x - \sin\frac{1}{10}\pi \sin x,$$

$$\cos\left(\frac{1}{10}\pi - x\right) = \cos\frac{1}{10}\pi \cos x + \sin\frac{1}{10}\pi \sin x.$$

Also ist die Summe linkerhand

$$\text{in (16.) gleich } + (2 \sin\frac{1}{10}\pi - 2 \sin\frac{1}{10}\pi) \cos x,$$

$$\text{in (17.) gleich } - (2 \sin\frac{1}{10}\pi - 2 \sin\frac{1}{10}\pi) \sin x.$$

Nun ist  $\sin\frac{1}{10}\pi = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$  und  $\sin\frac{1}{10}\pi = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5})$  (§. 321. 3.); also ist  $2 \sin\frac{1}{10}\pi - 2 \sin\frac{1}{10}\pi = 1$ ; welches die beiden Gleichungen (16.) und (17.) giebt.

325.

**Lehrsatz.** Es ist für beliebige Bogen  $u, x, y, z$  etc.

$$1. \quad 4 \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = - \sin(x + y + z) + \sin(x + y - z) + \sin(x - y + z) + \sin(-x + y + z),$$

$$2. \quad \sin x + \sin y + \sin z = \sin(x + y + z) + 4 \sin\frac{1}{2}(x + y) \sin\frac{1}{2}(x + z) \sin\frac{1}{2}(y + z).$$

$$3. \quad 4 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = \cos(x + y + z) + \cos(x + y - z) + \cos(x - y + z) + \cos(-x + y + z).$$

$$4. \quad \cos x + \cos y + \cos z = - \cos(x + y + z) + 4 \cos\frac{1}{2}(x + y) \cos\frac{1}{2}(x + z) \cos\frac{1}{2}(y + z).$$

$$5. \quad \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z = \frac{\tan x + \tan y + \tan z}{\sin(x + y + z)} - \frac{\sin(x + y + z)}{\cos x \cos y \cos z}.$$

$$6. \cot x \cot y \cot z = \cot x + \cot y + \cot z + \frac{\cos(x+y+z)}{\sin x \sin y \sin z}.$$

$$7. 4 \sin x \cos y \cos z = \sin(x+y+z) + \sin(x+y-z) + \sin(x-y+z) - \sin(-x+y+z).$$

$$8. \sin x + \sin y - \sin z = 4 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+z) \cos \frac{1}{2}(y+z) - \sin(x+y+z).$$

$$9. 8 \sin u \sin x \sin y \sin z = \cos(u+x+y+z) - \cos(u+x+y-z) + \cos(u+x-y-z) - \cos(u+x-y+z) + \cos(u-x+y-z) - \cos(u-x+y+z) + \cos(-u+x+y-z) - \cos(-u+x+y+z).$$

$$10. 8 \cos u \cos x \cos y \cos z = \cos(u+x+y+z) + \cos(u+x+y-z) + \cos(u+x-y-z) + \cos(u+x-y+z) + \cos(u-x+y-z) + \cos(u-x+y+z) + \cos(-u+x+y-z) + \cos(-u+x+y+z).$$

$$11. 4 \cos u \cos x \cos y \cos z + 4 \sin u \sin x \sin y \sin z = \cos(u+x+y+z) + \cos(u+x-y+z) + \cos(u-x+y+z) + \cos(-u+x+y+z).$$

$$12. \cos u + \cos x + \cos y + \cos z = \cos \frac{u+x+y+z}{2} + \cos \frac{u+x-y-z}{2} + \cos \frac{u-x+y-z}{2} + \cos \frac{-u+x+y-z}{2} - 8 \sin \frac{u+x+y-z}{4} \sin \frac{u+x-y+z}{4} \sin \frac{u-x+y+z}{4} \sin \frac{-u+x+y+z}{4} = + 8 \cos \frac{u+x+y-z}{4} \cos \frac{u+x-y+z}{4} \cos \frac{u-x+y+z}{4} \cos \frac{-u+x+y+z}{4} - \cos \frac{u+x+y+z}{2} - \cos \frac{u+x-y-z}{2} - \cos \frac{u-x+y-z}{2} + \cos \frac{-u+x+y-z}{2}.$$

$$13. 1 - \cos x^2 - \cos y^2 - \cos z^2 + 2 \cos x \cos y \cos z = 4 \sin \frac{x+y+z}{2} \sin \frac{x+y-z}{2} \sin \frac{x-y+z}{2} \sin \frac{-x+y+z}{2}.$$

$$14. 1 - \cos x^2 - \cos y^2 - \cos z^2 - 2 \cos x \cos y \cos z = -4 \cos \frac{x+y+z}{2} \cos \frac{x+y-z}{2} \cos \frac{x-y+z}{2} \cos \frac{-x+y+z}{2}.$$

$$15. 1 - \cos x^2 - \cos y^2 + \cos z^2 - 2 \sin x \sin y \cos z = -4 \cos \frac{x+y+z}{2} \cos \frac{x+y-z}{2} \sin \frac{x-y+z}{2} \sin \frac{-x+y+z}{2}.$$

$$16. 1 - \cos x^2 - \cos y^2 + \cos z^2 + 2 \sin x \sin y \cos z = + 4 \sin \frac{x+y+z}{2} \sin \frac{x+y-z}{2} \cos \frac{x-y+z}{2} \cos \frac{-x+y+z}{2}.$$

Die oberen und die unteren Zeichen gehören zusammen.

Beweis. I. Zuzfolge (§. 323. 1. 2. 3. 4.) ist

$$17. \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y,$$

$$18. \sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y,$$

$$19. \cos(x-y) + \cos(x+y) = 2 \cos x \cos y,$$

$$20. \cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y.$$

II. Man multiplicire (20.) mit  $2 \sin z$ , so erhält man

$$21. 4 \sin x \sin y \sin z = 2 \cos(x-y) \sin z - 2 \cos(x+y) \sin z.$$

Nun ist, wenn man in (18.)  $z$  statt  $y$  und erst  $x-y$ , dann  $x+y$  statt  $x$  setzt,

$$22. 2 \cos(x-y) \sin z = \sin(x-y+z) - \sin(x-y-z) \\ = \sin(x-y+z) + \sin(-x+y+z) \text{ und}$$

$$23. 2 \cos(x+y) \sin z = \sin(x+y+z) - \sin(x+y-z).$$

Setzt man (22.) und (23.) in (21.), so findet man die Gleichung (1.).

III. Schreibt man in (1.)  $\alpha, \beta, \gamma$  statt  $x, y, z$ , so erhält man

$$24. \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(-\alpha + \beta + \gamma) \\ = \sin(\alpha + \beta + \gamma) + 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Nun setze man

$$25. \alpha + \beta - \gamma = x, \quad \alpha - \beta + \gamma = y, \quad -\alpha + \beta + \gamma = z, \\ \text{so ist}$$

$$26. \alpha + \beta + \gamma = x + y + z, \quad \alpha = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{x+z}{2}, \quad \gamma = \frac{y+z}{2}.$$

Setzt man (25.) und (26.) in (24.), so findet man die Gleichung (2.).

IV. Man multiplicire (19.) mit  $2 \cos z$ , so erhält man

$$27. 4 \cos x \cos y \cos z = 2 \cos(x-y) \cos z + 2 \cos(x+y) \cos z.$$

Nun ist, wenn man in (19.)  $z$  statt  $y$  und erst  $x-y$ , dann  $x+y$  statt  $x$  setzt,

$$28. 2 \cos(x-y) \cos z = \cos(x-y-z) + \cos(x-y+z) \\ = \cos(-x+y+z) + \cos(x-y+z) \text{ und}$$

$$29. 2 \cos(x+y) \cos z = \cos(x+y-z) + \cos(x+y+z).$$

Setzt man (28.) und (29.) in (27.), so erhält man die Gleichung (3.).

V. Schreibt man in (3.)  $\alpha, \beta, \gamma$  statt  $x, y, z$ , so erhält man

$$30. \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(-\alpha + \beta + \gamma) \\ = -\cos(\alpha + \beta + \gamma) + 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Nun setze man, wie (25.),

$$31. \alpha + \beta - \gamma = x, \quad \alpha - \beta + \gamma = y, \quad -\alpha + \beta + \gamma = z, \\ \text{so ist}$$

$$32. \alpha + \beta + \gamma = x + y + z, \quad \alpha = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{x+z}{2}, \quad \gamma = \frac{y+z}{2}.$$

Setzt man (31.) und (32.) in (30.), so erhält man die Gleichung (4.).

VI. Zuzfolge (§. 323. 11.) ist

$$33. \quad \operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} 34. \quad \operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y + \operatorname{tang} z &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} + \frac{\sin z}{\cos z} \\ &= \frac{\sin(x+y) \cos z + \sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z} \\ &= \frac{\sin(x+y) \cos z + \sin z (\cos(x+y) + \sin x \sin y)}{\cos x \cos y \cos z} \\ &= \frac{\sin(x+y+z) + \sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z} \\ &= \frac{\sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z} + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y \operatorname{tang} z; \end{aligned}$$

welches die Gleichung (5.) giebt.

VII. Zuzfolge (§. 323. 12.) ist

$$35. \quad \cot x + \cot y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} 36. \quad \cot x + \cot y + \cot z &= \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y} + \frac{\cos z}{\sin z} \\ &= \frac{\sin(x+y) \sin z + \cos z \sin x \sin y}{\sin x \sin y \sin z} \\ &= \frac{\sin(x+y) \sin z - \cos(x+y) \cos z + \cos x \cos y \cos z}{\sin x \sin y \sin z} \\ &= \frac{\cos x \cos y \cos z - \cos(x+y+z)}{\sin x \sin y \sin z} \\ &= \cot x \cot y \cot z - \frac{\cos(x+y+z)}{\sin x \sin y \sin z}; \end{aligned}$$

welches die Gleichung (6.) giebt.

VIII. Man multiplicire (17.) mit  $2 \cos z$ , so erhält man

$$37. \quad 4 \sin x \cos y \cos z = 2 \sin(x+y) \cos z + 2 \sin(x-y) \cos z.$$

Nun ist, wenn man in (17.)  $z$  statt  $y$  und erst  $x-y$ , denn  $x+y$  statt  $x$  setzt,

$$\begin{aligned} 38. \quad 2 \sin(x-y) \cos z &= \sin(x-y+z) + \sin(x-y-z) \\ &= \sin(x-y+z) - \sin(-x+y+z) \text{ und} \end{aligned}$$

$$39. \quad 2 \sin(x+y) \cos z = \sin(x+y+z) + \sin(x+y-z).$$

Setzt man (38.) und (39.) in (37.), so erhält man die Gleichung (7.).

IX. Schreibt man in (7.)  $\alpha, \beta, \gamma$  statt  $x, y, z$ , so erhält man

$$\begin{aligned} 40. \quad \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) - \sin(-\alpha + \beta + \gamma) \\ = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Nun setze man, wie (25.),

41.  $\alpha + \beta - \gamma = x, \alpha - \beta + \gamma = y, \alpha + \beta + \gamma = z,$   
so ist

42.  $\alpha + \beta + \gamma = x + y + z, \alpha = \frac{x+y}{2}, \beta = \frac{x+z}{2}, \gamma = \frac{y+z}{2}.$

Setzt man (41.) und (42.) in (40.), so erhält man die Gleichung (8.).

K. Die Gleichungen (9.), (10.) und (12.) sind für 4 Bogen  $u, x, y, z$ , was (1.), (2.) und (4.) für drei sind. Man findet sie ganz ähnlich wie diese. Die Gleichung (11.) findet man, wenn man die Gleichungen (9.) und (10.) addirt und subtrahirt.

XI. Zufolge (§. 323. 6. 6. 7. 8.) ist

43.  $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2},$

44.  $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2},$

45.  $\cos y + \cos x = 2 \cos \frac{y}{2} \cos \frac{x}{2},$

46.  $\cos y - \cos x = 2 \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2}.$

XII. Man setze in (43. 44. 45. 46.) erst  $y + z$  und dann  $y - z$  statt  $y$ , so erhält man

47.  $\sin x + \sin(y + z) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y+z}{2},$

48.  $\sin x - \sin(y + z) = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y+z}{2},$

49.  $\cos(y + z) + \cos x = 2 \cos \frac{y+z}{2} \cos \frac{x}{2},$

50.  $\cos(y + z) - \cos x = 2 \sin \frac{y+z}{2} \sin \frac{x}{2},$

51.  $\sin x + \sin(y - z) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y-z}{2},$

52.  $\sin x - \sin(y - z) = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y-z}{2},$

53.  $\cos(y - z) + \cos x = 2 \cos \frac{y-z}{2} \cos \frac{x}{2},$

54.  $\cos(y - z) - \cos x = 2 \sin \frac{y-z}{2} \sin \frac{x}{2}.$

Man multiplicire (50.) mit (54.), so erhält man

55.  $\cos(y+z) \cos(y-z) - \cos x (\cos(y+z) + \cos(y-z) + \cos x^2)$   
 $= -4 \sin \frac{x+y+z}{2} \sin \frac{x+y-z}{2} \sin \frac{x-y+z}{2} \sin \frac{-x+y+z}{2},$

oder, weil  $\cos(y+z) \cos(y-z) = \cos y^2 - \sin z^2$  (§. 323. 10.) und  $\cos(y+z) + \cos(y-z) = 2 \cos y \cos z$  (§. 323. 3.),

$\cos y^2 - \sin z^2 - 2 \cos x \cos y \cos z + \cos x^2$ , oder

56.  $-1 + \cos x^2 + \cos y^2 + \cos z^2 - 2 \cos x \cos y \cos z$   
 $= -4 \sin \frac{x+y+z}{2} \sin \frac{x+y-z}{2} \sin \frac{x-y+z}{2} \sin \frac{-x+y+z}{2},$

woraus die Gleichung (13.) folgt.

Auf dieselbe Weise findet man (14.), wenn man (49.) mit (53.), (15.), wenn man (48.) mit (52.), und (16.), wenn man (47.) mit (51.) multiplicirt.

326.

**Lehrsatz.** Es ist für beliebige Winkel oder Bogen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots \kappa, \lambda, \mu, \nu$ :

$$1. \quad \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\sin(\delta - \gamma)}{\sin \gamma \sin \delta} \dots$$

$$\dots + \frac{\sin(\nu - \mu)}{\sin \mu \sin \nu} + \frac{\sin(\alpha - \nu)}{\sin \nu \sin \alpha} = 0.$$

$$2. \quad \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin(\delta - \gamma)}{\cos \gamma \cos \delta} \dots$$

$$\dots + \frac{\sin(\nu - \mu)}{\cos \mu \cos \nu} + \frac{\sin(\alpha - \nu)}{\cos \nu \cos \alpha} = 0.$$

$$3. \quad \sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma + \beta) \sin(\gamma - \beta) \dots$$

$$\dots + \sin(\nu + \mu) \sin(\nu - \mu) + \sin(\alpha + \nu) \sin(\alpha - \nu) = 0,$$

$$4. \quad \cos(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha) + \cos(\gamma + \beta) \sin(\gamma - \beta) \dots$$

$$\dots + \cos(\nu + \mu) \sin(\nu - \mu) + \cos(\alpha + \nu) \sin(\alpha - \nu) = 0,$$

$$5. \quad \sin \varphi + \sin(\varphi + 2\psi) + \sin(\varphi + 4\psi) \dots$$

$$\dots + \sin(\varphi + 2n\psi) = \frac{\sin(\varphi + n\psi) \sin(n+1)\psi}{\sin \psi}.$$

$$6. \quad \cos \varphi + \cos(\varphi + 2\psi) + \cos(\varphi + 4\psi) \dots$$

$$\dots + \cos(\varphi + 2n\psi) = \frac{\cos(\varphi + n\psi) \sin(n+1)\psi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}.$$

$$7. \quad \sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi \dots \sin n\varphi = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\varphi \cdot \sin \frac{1}{2}n\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}.$$

$$8. \quad \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi \dots + \cos n\varphi = \frac{\cos \frac{n+1}{2}\varphi \cdot \sin \frac{1}{2}n\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}.$$

$$9. \quad \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{cosec} 2\varphi + \operatorname{cosec} 2\varphi \operatorname{cosec} 3\varphi \dots$$

$$\dots + \operatorname{cosec}(n-1)\varphi \operatorname{cosec} n\varphi = \sin(n-1)\varphi \operatorname{cosec} \varphi^2 \operatorname{cosec} n\varphi.$$

$$10. \quad \sec \varphi \sec 2\varphi + \sec 2\varphi \sec 3\varphi \dots + \sec(n-1)\varphi \sec n\varphi$$

$$= \sin(n-1)\varphi \cdot \sec \varphi \operatorname{cosec} \varphi \cdot \sec n\varphi.$$

$$11. \quad \cos \frac{\pi}{2n+1} + \cos \frac{3\pi}{2n+1} + \cos \frac{5\pi}{2n+1} \dots$$

$$\dots + \cos \frac{(2n-3)\pi}{2n+1} + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

wo  $n$  jede beliebige ganze Zahl seyn kann.

**Beweis.** I. Es ist zu Folge (§. 316. 1.)

$$\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \beta}; \text{ also}$$

$$12. \begin{cases} \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} = \cot \alpha - \cot \beta, \\ \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin \beta \sin \gamma} = \cot \beta - \cot \gamma, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\sin(\nu - \mu)}{\sin \mu \sin \nu} = \cot \mu - \cot \nu, \\ \frac{\sin(\alpha - \nu)}{\sin \nu \sin \alpha} = \cot \nu - \cot \alpha. \end{cases}$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man (1.); denn wie leicht zu sehen, heben sich die Glieder rechterhand auf, und ihre Summe ist Null.

II. Auf dieselbe Weise, findet man die Gleichung (2.). Die Glieder rechterhand, sind  $\tan \beta - \tan \alpha$ ,  $\tan \gamma - \tan \beta \dots \tan \nu - \tan \mu$ ,  $\tan \alpha - \tan \nu$ , und ihre Summe ist ebenfalls Null.

III. Vermöge (§. 323. 9.) ist

$$13. \begin{cases} \sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha) = \sin \beta^2 - \sin \alpha^2, \\ \sin(\gamma + \beta) \sin(\gamma - \beta) = \sin \gamma^2 - \sin \beta^2, \\ \dots \dots \dots \\ \sin(\nu + \mu) \sin(\nu - \mu) = \sin \nu^2 - \sin \mu^2, \\ \sin(\alpha + \nu) \sin(\alpha - \nu) = \sin \alpha^2 - \sin \nu^2. \end{cases}$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man die Gleichung (3.) weil sich rechterhand Alles aufhebt.

Vermöge (§. 323. 6.) ist

$$14. \begin{cases} \cos(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \beta - \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos(\gamma + \beta) \sin(\gamma - \beta) = \sin \gamma \cos \gamma - \sin \beta \cos \beta, \\ \dots \dots \dots \\ \cos(\nu + \mu) \sin(\nu - \mu) = \sin \nu \cos \nu - \sin \mu \cos \mu, \\ \cos(\alpha + \nu) \sin(\alpha - \nu) = \sin \alpha \cos \alpha - \sin \nu \cos \nu. \end{cases}$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man die Gleichung (4.) weil sich wiederum rechterhand Alles aufhebt.

IV. Man setze in (3. und 4.) für die  $n$  Bogen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma \dots \nu$ ,

$$15. \begin{cases} \beta - \alpha = \psi \text{ und } \beta + \gamma = \varphi; \\ \gamma - \beta = \psi \\ \delta - \gamma = \psi \\ \dots \dots \dots \\ \nu - \mu = \psi, \end{cases}$$

so erhält man, wenn man die erste Gleichung links, nemlich  $\beta - \alpha = \psi$  zu der darunter stehenden folgenden Gleichung  $\gamma - \beta = \psi$ , ferner zu den beiden folgenden  $\gamma - \beta = \psi$  und  $\delta - \gamma = \psi$ , zu den drei, vier, fünf



folgenden etc. bis zu den  $n-1$  folgenden Gleichungen, addirt, auſſer der Gleichung

$$16. \begin{cases} \beta - \alpha = \psi \text{ ſelbſt,} \\ \gamma - \alpha = 2\psi, \\ \delta - \alpha = 3\psi, \\ \varepsilon - \alpha = 4\psi, \\ \dots \dots \dots \\ \mu - \alpha = (n-2)\psi, \\ \nu - \alpha = (n-1)\psi. \end{cases}$$

Addirt man dagegen die Gleichung  $\beta + \alpha = \varphi$  zu den nemlichen ein, zwei, drei etc. bis  $n-1$  Gleichungen, ſo erhält man auſſer der Gleichung

$$17. \begin{cases} \beta + \alpha = \varphi \text{ ſelbſt} \\ \gamma + \alpha = \varphi + \psi \\ \delta + \alpha = \varphi + 2\psi \\ \varepsilon + \alpha = \varphi + 3\psi \\ \dots \dots \dots \\ \mu + \alpha = \varphi + (n-3)\psi, \\ \nu + \alpha = \varphi + (n-2)\psi. \end{cases}$$

Addirt man hierauf die erſte und zweite Gleichung (16.), zur erſten und zweiten (17.), die zweite und dritte (16.), zur zweiten und dritten (17.), die dritte und vierte (16.), zur dritten und vierten (18.) u. ſ. w., ſo erhält man, auſſer der Gleichung

$$18. \begin{cases} \beta + \alpha = \varphi, \\ 2\gamma + 2\beta = 2\varphi + 4\psi \text{ oder } \gamma + \beta = \varphi + 2\psi, \\ 2\delta + 2\gamma = 2\varphi + 8\psi \text{ oder } \delta + \gamma = \varphi + 4\psi, \\ 2\varepsilon + 2\delta = 2\varphi + 12\psi \text{ oder } \varepsilon + \delta = \varphi + 6\psi, \\ \dots \dots \dots \\ 2\nu + 2\mu = 2\varphi + (4n-8)\psi \text{ oder } \nu + \mu = \varphi + 2(n-2)\psi. \end{cases}$$

Setzt man nun die Werthe von  $\beta - \alpha$ ,  $\gamma - \beta$ ,  $\delta - \gamma \dots \nu - \mu$  aus (15.), von  $\alpha - \nu$  aus (16.), von  $\beta + \alpha$ ,  $\gamma + \beta$ ,  $\delta + \gamma \dots \nu + \mu$  aus (18.) und von  $\nu + \alpha$  aus (17.) in (3. und 4.), ſo erhält man

$\sin \varphi \sin \psi + \sin (\varphi + 2\psi) \sin \psi + \sin (\varphi + 4\psi) \sin \psi \dots$   
 $+ \sin (\varphi + 2(n-2)\psi) \sin \psi - \sin (\varphi + (n-2)\psi) \cdot \sin (n-1)\psi = 0,$   
 und  $\cos \varphi \sin \psi + \cos (\varphi + 2\psi) \sin \psi + \cos (\varphi + 4\psi) \sin \psi \dots$   
 $+ \cos (\varphi + 2(n-2)\psi) \sin \varphi - \cos \varphi + (n-2)\psi \sin (n-1)\psi = 0;$   
 oder wenn man die letzten Glieder auf die andere Seite bringt und mit  $\sin \psi$  dividirt,

$$\sin \varphi + \sin (\varphi + 2\psi) + \sin (\varphi + 4\psi) \dots + \sin (\varphi + 2(n-2)\psi) \\ = \frac{\sin (\varphi + (n-2)\psi) \sin (n-1)\psi}{\sin \psi} \text{ und}$$

$$\cos \varphi + \cos(\varphi + 2\psi) + \cos(\varphi + 4\psi) \dots + \cos(\varphi + 2(n-2)\psi) \\ = \frac{\cos(\varphi + (n-2)\psi) \sin(n-1)\psi}{\sin \psi}.$$

Schreibt man hierin  $n$  statt  $n-2$ , welches nichts ändert, weil  $n$  willkürlich ist, so findet man die Gleichungen (5. und 6.).

V. Die Gleichungen (7. und 8.) folgen aus (5. und 6.) unmittelbar, wenn man  $\psi = \frac{1}{2}\varphi$  setzt.

VI. Man setze in (1. und 2.)  $\beta = 2\alpha$ ,  $\gamma = 3\alpha$ ,  $\delta = 4\alpha$ , ....  $\nu = n\alpha$ ; so erhält man

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha \sin 4\alpha} \dots \\ + \frac{\sin \alpha}{\sin(n-1)\alpha \sin n\alpha} - \frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin n\alpha \sin \alpha} = 0 \text{ und} \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha \cos 3\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos 3\alpha \cos 4\alpha} \dots \\ + \frac{\sin \alpha}{\cos(n-1)\alpha \cos n\alpha} - \frac{\sin(n-1)\alpha}{\cos n\alpha \cos \alpha} = 0,$$

oder wenn man die letzten Glieder auf die andere Seite bringt, überall mit  $\sin \alpha$  dividirt und cosec statt  $\frac{1}{\sin}$ , sec

statt  $\frac{1}{\cos}$  setzt,

$$\text{cosec } \alpha \text{ cosec } 2\alpha + \text{cosec } 2\alpha \text{ cosec } 3\alpha \dots + \text{cosec } (n-1)\alpha \text{ cosec } n\alpha \\ = \sin(n-1)\alpha \text{ cosec } \alpha^2 \text{ cosec } n\alpha,$$

$$\text{und } \sec \alpha \sec 2\alpha + \sec 2\alpha \sec 3\alpha \dots + \sec(n-1)\alpha \sec n\alpha \\ = \sin(n-1)\alpha \sec \alpha \text{ cosec } \alpha \sec n\alpha;$$

welches, wenn man  $\varphi$  statt  $\alpha$  setzt, die Gleichungen (9. und 10.) sind.

VII. Man setze

$$19. \cos \frac{\pi}{2n+1} + \cos \frac{3\pi}{2n+1} + \cos \frac{5\pi}{2n+1} \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = x_2$$

so erhält man, wenn man mit  $2\cos \frac{\pi}{2n+1}$  multiplicirt,

$$20. 2\cos \frac{\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{\pi}{2n+1} + 2\cos \frac{3\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{\pi}{2n+1} \\ + 2\cos \frac{5\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{\pi}{2n+1} \dots + 2\cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{\pi}{2n+1} \\ + 2\cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{\pi}{2n+1} = 2x \cos \frac{\pi}{2n+1}.$$

Vermöge der Gleichung

$$2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y) \quad (\S. 523. 3.)$$



# 327-328. Vergleichung der gon. Lin. u. ihrer Bog. 321

$\cos \frac{\pi}{2n+1} + \cos \frac{3\pi}{2n+1} + \cos \frac{5\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$   
folgt; wie in (11.).

Die Gleichung (11.) folgt auch daraus, daß der Mittelpunkt jedes regelmäßigen Vielecks zugleich der Mittelpunkt der Entfernungen seiner Ecken für beliebige Axen ist (§. 225. II.). Stellt man sich nemlich ein regelmäßiges Vieleck von  $n$  Seiten und eine Axe durch eine Ecke vor, wie (Fig. 127. II.), so ist die Summe der Entfernungen der Ecken von der Axe RS, wenn man die Bogen von Q an rechnet, wie leicht zu sehen,

$$2\cos \frac{\pi}{2n+1} + 2\cos \frac{3\pi}{2n+1} + 2\cos \frac{5\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1};$$

denn je zwei Ecken, wie C und D, B, und E haben gleiche Entfernungen, welche also in der Summe doppelt vorkommen und die Entfernung  $AM = \frac{\cos(2n+1)\pi}{2n+1}$

$= \cos \pi$  kommt nur einmal vor. Die letzte Entfernung  $AM = \cos \pi$  ist  $= -1$  und die Summe der Entfernungen Null. Also ist

$$2\cos \frac{\pi}{2n+1} + 2\cos \frac{3\pi}{2n+1} + 2\cos \frac{5\pi}{2n+1} + \dots + 2\cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = 1,$$

woraus, wenn man mit 2 dividirt, die Gleichung (11.) folgt.

327.

*Anmerkung.* Es giebt noch eine große Menge anderer Gleichungen zwischen den goniometrischen Linien. Die Sätze (§. 307. bis §. 326) kommen aber am häufigsten vor, und man kann daraus leicht andere, die etwa nothwendig sind, finden.

## Ausdruck der goniometrischen Linien durch die Bogen, und umgekehrt

328.

*Lehrsatz.* Es ist für jeden beliebigen Bogen  $x$ :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \dots$$

Die Reihen rechterhand behalten die nemlichen Werthe, wenn man auch in die erste  $2n\pi + x$  oder,  $(2n+1)\pi - x$  und in die zweite  $2n\pi + x$  statt  $x$  setzt, wo  $n$  eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist.

**Beweis.** I. Es sey in (Fig. 168.)

$AQ$  ein beliebiger Bogen im ersten Quadranten,  
 $AFB$  ein beliebiger Bogen, der bis in den 2ten Quadranten reicht,  
 $AFHQ$  ein beliebiger Bogen, der bis in den 3ten Quadranten reicht;  
 $AFHGB$  ein beliebiger Bogen, der bis in den 4ten Quadranten reicht;  
 $QB$  oder  $BQ$  sey ein beliebiger Bogen, der zu jedem Bogen noch hinzukommt, der aber jedesmal in dem nemlichen Quadranten bleibt, in welchem der Endpunct des vorigen Bogen liegt.  $QP$  und  $BV$  sey auf dem Durchmesser  $AMH$  senkrecht und  $QC$  mit demselben parallel. Ferner sey  $QR$  die Tangente an  $Q$ ,  $BR$  die Tangente an  $B$ , so daß  $RQM$  und  $RBM$  rechte Winkel sind.

Alsdann ist der Bogen  $QK$  die Hälfte des Bogens  $QB$ ; denn die rechtwinkligen Dreiecke  $RQM$  und  $RBM$  sind wegen  $QM = BM$  und  $RM = RM$ , gleich, folglich sind auch die Winkel  $RMQ$  und  $RMB$  und die zugehörigen Bogen  $QK$  und  $BK$  gleich.

Nun sind die rechtwinkligen Dreiecke  $QCB$  und  $KIM$ , wenn  $KI$  auf  $AMH$  senkrecht ist, ähnlich, weil ihre Seiten auf einander senkrecht stehen. Also ist

$$\frac{BC}{QB} = \frac{MI}{MK} \text{ und } \frac{QC}{QB} = \frac{KI}{MK}, \text{ oder}$$

$$1. \quad BC = QB \cdot \frac{MI}{MK} \text{ und}$$

$$2. \quad QC = QB \cdot \frac{KI}{MK}.$$

Ferner sind die rechtwinkligen Dreiecke  $REQ$  und  $BDR$  den Dreiecken  $QMP$  und  $BVM$  ähnlich, weil ihre Seiten auf einander senkrecht stehen. Also ist

$$\frac{RE}{QR} = \frac{PM}{QM}, \quad \frac{QE}{QR} = \frac{QP}{QM} \text{ und}$$

$$\frac{BD}{RB} = \frac{VM}{BM}, \quad \frac{RD}{RB} = \frac{BV}{BM},$$

oder, weil die Halbmesser  $QM$  und  $BM$  dem Halbmesser  $MK$  gleich sind,

$$3. \quad RE = QR \cdot \frac{PM}{MK}, \quad 4. \quad QE = QR \cdot \frac{QP}{MK},$$

$$5. \quad BD = RB \cdot \frac{VM}{MK}, \quad 6. \quad RD = RB \cdot \frac{BV}{MK}.$$

Es ist  $RE + BD = BC$  und  $QE + RD = QC$ . Desgleichen ist  $QR = RB$ , also, wenn man (3.) und (5.), und (4.) und (6.) addirt,

$$7. \quad BC = QR \cdot \frac{PM + VM}{MK} \text{ und}$$

$$8. \quad QC = QR \cdot \frac{QP + BV}{MK}.$$

Nun liegt der Punct  $I$  nothwendig immer zwischen  $P$  und  $V$ , weil  $K$  zwischen  $Q$  und  $B$  liegt. Also ist

$$9. \quad MI < PM;$$

Desgleichen ist nothwendig

$$10. \quad KI < BV.$$

# 328. *Vergleichung der gon. Lin. u. ihrer Bog.* 323

Daraus folgt, vermöge (1.) und (2.),

$$11. \quad BC < QB \cdot \frac{PM}{MK},$$

$$12. \quad QC < QB \cdot \frac{BV}{MK}.$$

Ferner ist

$$13. \quad PM > VM \text{ und}$$

$$14. \quad BV > QP;$$

woraus vermöge (7.) und (8.)

$$15. \quad BC > QR \cdot \frac{VM + VM}{MK} > 2 QR \cdot \frac{VM}{MK} \text{ und}$$

$$16. \quad QC > QR \cdot \frac{QP + QP}{MK} > 2 QR \cdot \frac{QP}{MK}$$

folgt.

Nun ist ferner die Sehne  $QB$  kürzer als der Bogen  $QKB = k$  und die Tangente  $QR = RB$  länger als der Bogen  $QK = BK = \frac{1}{2}k$ , oder  $2 QR$  länger als  $k$  (§. 304.). Daraus folgt in (11.) und (12.) um so mehr:

$$17. \quad BC < k \cdot \frac{PM}{MK} \text{ und}$$

$$18. \quad QC < k \cdot \frac{BV}{MK};$$

und in (15.) und (16.) um so mehr:

$$19. \quad BC > k \cdot \frac{VM}{MK} \text{ und}$$

$$20. \quad QC > k \cdot \frac{QP}{MK}.$$

Die Länge der Linie  $BC$  liegt also, zu Folge (17.) und (19.), wenn man den Halbmesser  $MK$  gleich 1 setzt, zwischen  $k \cdot PM$  und  $k \cdot VM$ , und die Länge der Linie  $QC$ , zu Folge (18.) und (20.), zwischen  $k \cdot BV$  und  $k \cdot QP$ . Man kann daher

$$21. \quad BC = k \cdot MU \text{ und}$$

$$22. \quad QC = k \cdot NS$$

setzen, wenn  $U$  und  $N$  irgendwo zwischen  $P$  und  $V$  liegen.

Alles dieses bleibt das Nemliche, wenn auch zu dem Bogen  $\alpha$  noch eine beliebige Zahl von Umfängen  $2\pi$  hinzukommt oder davon hinweggenommen wird.

Nun ist

$$23. \quad \begin{cases} \text{im ersten und vierten Quadranten } BC = \sin(\alpha + k) - \sin \alpha, \\ \text{im zweiten und dritten Quadranten } BC = -(\sin(\alpha + k) - \sin \alpha) \\ \text{und} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{im ersten und zweiten Quadranten } QC = -(\cos(\alpha + k) - \cos \alpha) \\ \text{im dritten und vierten Quadranten } QC = \cos(\alpha + k) - \cos \alpha. \end{cases}$$

Bezeichnet man die Bogen  $AX$  und  $AS$ , deren Sinus den Durchmesser  $AMH$  in  $U$  und  $N$  schneiden, und die also nothwendig zwischen  $\alpha$  und  $\alpha + k$  liegen, weil  $U$  und  $N$  zwischen  $P$  und  $V$  fallen, durch  $\alpha + k_1$  und  $\alpha + k_2$ , so ist

$$24. \quad \begin{cases} \text{im ersten und vierten Quadranten } MU = +\cos(\alpha + k_1), \\ \text{im zweiten und dritten Quadranten } MU = -\cos(\alpha + k_1); \\ \text{und} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{im ersten und zweiten Quadranten } NS = +\sin(\alpha + k_2) \\ \text{im dritten und vierten Quadranten } NS = -\sin(\alpha + k_2). \end{cases}$$

Es ist also vermöge (23.), (24.) und (21.), (22.) immer

$$25. \sin(x+k) - \sin x = +k \cos(x+k_1) \text{ und}$$

$$26. \cos(x+k) - \cos x = -k \sin(x+k_2),$$

oder

$$27. \frac{\sin(x+k) - \sin x}{k} = +\cos(x+k_1),$$

$$28. \frac{\cos(x+k) - \cos x}{k} = -\sin(x+k_2);$$

welche Ausdrücke folglich für alle vier Quadranten zugleich, und mithin, weil auch noch beliebige Umfänge hinzugehan oder hinweggenommen werden können, für alle mögliche Bögen  $x$ , so groß oder so klein sie seyn mögen, desgleichen für alle beliebige Bogen  $k$ , die zu  $x$  gethan nicht über den Quadranten hinausschreiten, in welchem sich der Endpunkt von  $x$  befindet, uneingeschränkt gelten. Die Bogen  $k_1$  und  $k_2$  liegen nothwendig immer zwischen 0 und  $k$ .

II. Nun setze man, nach der Methode der unbestimmten Coefficienten,

$$29. \sin x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \dots \text{ und}$$

$$30. \cos x = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 \dots$$

Lassen sich für die unbestimmten Coefficienten  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$  Werthe finden, die den Bedingungen der Aufgabe genuthun, so finden die vorausgesetzten Reihen Statt.

Es ist für jeden beliebigen Bögen  $x$ ,

$$31. \sin(-x) = -\sin x \text{ und}$$

$$32. \cos(-x) = +\cos x.$$

Setzt man daher in (29.) und (30.)  $-x$  statt  $+x$ , so erhält man

$$\begin{aligned} & \alpha_0 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 - \alpha_5 x^5 \dots \\ & = -\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 - \alpha_4 x^4 - \alpha_5 x^5 \dots \text{ und} \\ & \beta_0 - \beta_1 x + \beta_2 x^2 - \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 - \beta_5 x^5 \dots \\ & = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 \dots, \end{aligned}$$

welches

$$2\alpha_0 + 2\alpha_2 x^2 + 2\alpha_4 x^4 + 2\alpha_6 x^6 \dots = 0 \text{ und}$$

$$2\beta_1 x + 2\beta_3 x^3 + 2\beta_5 x^5 + 2\beta_7 x^7 \dots = 0$$

gibt. Hieraus folgt nach den Regeln der unbestimmten Coefficienten (Rechenkunst §. 213.)

$$\alpha_0 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_6 = 0 \dots$$

$$\beta_1 = 0, \beta_3 = 0, \beta_5 = 0, \beta_7 = 0 \dots$$

In  $\sin x$  sind daher die Coefficienten aller Potestäten von  $x$  mit graden Exponenten und in  $\cos x$  die Coefficienten aller Potestäten von  $x$  mit ungraden Exponenten gleich Null, und es ist folglich in (29. und 30.) bloß

$$33. \sin x = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 + \alpha_7 x^7 \dots$$

$$34. \cos x = \beta_0 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \beta_6 x^6 \dots$$

Nun setze man  $x+k$  statt  $x$ , welches angeht, weil die vorausgesetzten Reihen für jeden beliebigen Werth von  $x$  gelten, so erhält man

$$\sin(x+k) = \alpha_1 (x+k) + \alpha_3 (x+k)^3 + \alpha_5 (x+k)^5 \dots$$

$$\cos(x+k) = \beta_0 + \beta_2 (x+k)^2 + \beta_4 (x+k)^4 \dots,$$

oder, wenn man die einzelnen Glieder rechterhand nach dem binomischen Lehrsatz (Rechenkunst §. 224.) entwickelt;

$$35. \sin(x+k) = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 + \alpha_7 x^7 \dots \\ + k(\alpha_2 + 3\alpha_4 x + 5\alpha_6 x^2 + 7\alpha_8 x^3 \dots) \\ + k^2(3\alpha_3 x + 10\alpha_5 x^2 + 21\alpha_7 x^3 \dots) \\ + k^3(\alpha_4 + 10\alpha_6 x + 35\alpha_8 x^2 \dots)$$

$$36. \cos(x+k) = \beta_0 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \beta_6 x^6 \dots \\ + k(2\beta_2 x + 4\beta_4 x^3 + 6\beta_6 x^5 \dots) \\ + k^2(\beta_3 + 6\beta_5 x + 15\beta_7 x^2 \dots) \\ + k^3(4\beta_4 x + 20\beta_6 x^2 \dots)$$

Die obersten Reihen rechterhand in (35. und 36.) sind  $\sin x$  und  $\cos x$  selbst. Bezeichnet man, der Kürze wegen, in den übrigen Reihen

$$37. \begin{array}{l} \alpha_1 + 3\alpha_3 x^2 + 5\alpha_5 x^4 + 7\alpha_7 x^6 \dots \text{ durch } p_1, \\ 3\alpha_3 x + 10\alpha_5 x^3 + 21\alpha_7 x^5 \dots \text{ durch } p_2, \\ \alpha_4 + 10\alpha_6 x^2 + 35\alpha_8 x^4 \dots \text{ durch } p_3, \end{array} \text{ und}$$

$$38. \begin{array}{l} 2\beta_2 x + 4\beta_4 x^3 + 6\beta_6 x^5 \dots \text{ durch } q_1, \\ \beta_3 + 6\beta_5 x + 15\beta_7 x^2 \dots \text{ durch } q_2, \\ 4\beta_4 x + 20\beta_6 x^2 \dots \text{ durch } q_3, \end{array}$$

so erhält man in (35.) und (36.)

$$39. \sin(x+k) = \sin x + p_1 k + p_2 k^2 + p_3 k^3 \dots;$$

$$40. \cos(x+k) = \cos x + q_1 k + q_2 k^2 + q_3 k^3 \dots,$$

wo die Größen  $p_1, p_2, p_3 \dots q_1, q_2, q_3 \dots$  (37.) und (38.) kein  $k$  mehr, sondern nur noch  $x$  und die ebenfalls von  $k$  nicht abhängenden unbestimmten Coefficienten  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \beta_1, \beta_2 \dots$  enthalten.

Aus (39. und 40.) folgt

$$41. \frac{\sin(x+k) - \sin x}{k} = p_1 + p_2 k + p_3 k^2 \dots \text{ und}$$

$$42. \frac{\cos(x+k) - \cos x}{k} = q_1 + q_2 k + q_3 k^2 \dots,$$

für jeden beliebigen Werth von  $x$  und  $k$ .

Nun war in (I.), ebenfalls für jeden beliebigen Werth von  $x$  und  $k$ , nemlich in (27.) und (28.),

$$\frac{\sin(x+k) - \sin k}{k} = + \cos(x+k_1) \text{ und}$$

$$\frac{\cos(x+k) - \sin k}{k} = - \sin(x+k_2):$$

also ist

$$43. + \cos(x+k_1) = p_1 + p_2 k + p_3 k^2 \dots \text{ und}$$

$$44. - \sin(x+k_2) = q_1 + q_2 k + q_3 k^2 \dots$$

wo  $k_1$  und  $k_2$  zwei Bogen sind, die nothwendig, was auch  $x$  und  $k$  seyn mögen, zwischen 0 und  $k$  liegen.

Da nun die Ausdrücke (43.) und (44.) für jeden beliebigen Werth von  $k$  gelten, unter der einzigen Bedingung, daß die Bogen  $x$  und  $x+k$  ihre Endpunkte in einem und demselben Quadranten haben, so gelten sie auch für  $k=0$ , welches dieser Bedingung entspricht. Wenn aber  $k=0$  ist, so sind nothwendig auch  $k_1$  und  $k_2$  gleich Null, weil  $k_1$  und  $k_2$  immer zwischen 0 und  $k$  liegen.



Also geben die Ausdrücke (43.) und (44.), für  $k=0$ ,

$$45. \cos x = + p_1 \text{ und}$$

$$46. \sin x = - q_1;$$

das heisst, wenn man aus (37.) und (38.) die Werthe von  $p_1$  und  $q_1$  setzt:

$$47. \cos x = + \alpha_1 + 3\alpha_3 x^2 + 5\alpha_5 x^4 + 7\alpha_7 x^6 \dots,$$

$$48. \sin x = - 2\beta_2 x - 4\beta_4 x^3 - 6\beta_6 x^5 - 8\beta_8 x^7 \dots$$

Man setze in diese neuen Ausdrücke von  $\cos x$  und  $\sin x$  abermals  $x+k$  statt  $x$ , welches wiederum angeht, weil die Ausdrücke immer für jeden beliebigen Werth von  $x$  gelten, so erhält man

$$+ \cos(x+k) = \alpha_1 + 3\alpha_3 (x+k)^2 + 5\alpha_5 (x+k)^4 \dots$$

$$- \sin(x+k) = 2\beta_2 (x+k) + 4\beta_4 (x+k)^3 + 6\beta_6 (x+k)^5 \dots;$$

oder, wenn man wiederum die einzelnen Glieder rechterhand nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt,

$$49. + \cos(x+k) = \alpha_1 + 3\alpha_3 x^2 + 5\alpha_5 x^4 + 7\alpha_7 x^6 \dots \\ + k (2.3\alpha_3 x + 4.5\alpha_5 x^3 + 6.7\alpha_7 x^5 \dots) \\ + k^2 (3\alpha_3 + 10.5\alpha_5 x + 15.7\alpha_7 x^3 \dots)$$

$$50. - \sin(x+k) = 2\beta_2 x + 4\beta_4 x^3 + 6\beta_6 x^5 + 8\beta_8 x^7 \dots \\ + k (2\beta_2 + 3.4\beta_4 x + 5.6\beta_6 x^3 + 7.8\beta_8 x^5 \dots) \\ + k^2 (3.4\beta_4 x + 10.6\beta_6 x^3 + 21.8\beta_8 x^5 \dots)$$

Die obersten Reihen rechterhand sind nach (47.) und (48.)  $\cos x$  und  $-\sin x$  selbst. Bezeichnet man für die übrigen Reihen, der Kürze wegen,

$$51. \begin{array}{l} 2.3\alpha_3 x + 4.5\alpha_5 x^3 + 6.7\alpha_7 x^5 \dots \text{ durch } P_1 \\ 3\alpha_3 + 10.5\alpha_5 x + 15.7\alpha_7 x^3 \dots \text{ durch } P_2 \end{array}$$

$$52. \begin{array}{l} 2\beta_2 + 3.4\beta_4 x + 5.6\beta_6 x^3 \dots \text{ durch } Q_1 \\ 3.4\beta_4 x + 10.6\beta_6 x^3 \dots \text{ durch } Q_2 \end{array}$$

so erhält man in (49.) und (50.)

$$53. + \cos(x+k) = + \cos x + P_1 k + P_2 k^2 \dots,$$

$$54. - \sin(x+k) = - \sin x + Q_1 k + Q_2 k^2 \dots;$$

wo die Grössen  $P_1, P_2 \dots Q_1, Q_2$  wiederum kein  $k$  enthalten.

Es folgt aus (53.) und (54.)

$$55. \frac{\cos(x+k) - \cos x}{k} = P_1 + P_2 k + P_3 k^2 \dots \text{ und}$$

$$56. \frac{\sin(x+k) - \sin x}{k} = - Q_1 - Q_2 k - Q_3 k^2 \dots,$$

für jeden beliebigen Werth von  $x$  und  $k$ .

Setzt man diese Ausdrücke wiederum denen (28.) und (27.) in (I.) gleich, so erhält man

$$57. - \sin(x+k_2) = + P_1 + P_2 k + P_3 k^2 \dots \text{ und}$$

$$58. + \cos(x+k_1) = - Q_1 - Q_2 k - Q_3 k^2 \dots;$$

für jeden Werth von  $k$ .

Für  $k=0$  ist, wie oben,  $k_2=0$  und  $k_1=0$ ; also

$$59. - \sin x = + P_1 \text{ und}$$

$$60. + \cos x = - Q_1$$

das heisst, wenn man aus (51.) und (52.) die Werthe von  $P_1$  und  $Q_1$  setzt,

$$\begin{aligned} 61. \quad & -\sin x = 2.3\alpha_2 x + 4.5\alpha_4 x^3 + 6.7\alpha_6 x^5 \dots \text{ und} \\ 62. \quad & -\cos x = 2\beta_2 + 3.4\beta_4 x^2 + 5.6\beta_6 x^4 \dots \end{aligned}$$

Es war aber

$$\begin{aligned} \sin x &= \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 \dots (33.) \text{ und} \\ \cos x &= \beta_0 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 \dots (34.). \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} 63. \quad & \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 + \alpha_7 x^7 \dots \\ & = -2.3\alpha_2 x - 4.5\alpha_4 x^3 - 6.7\alpha_6 x^5 - 8.9\alpha_8 x^7 \dots \text{ und} \\ 64. \quad & \beta_0 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \beta_6 x^6 \dots \\ & = -2\beta_2 - 3.4\beta_4 x^2 - 5.6\beta_6 x^4 - 7.8\beta_8 x^6 \dots \end{aligned}$$

Da nun nach den Regeln der unbestimmten Coefficienten, die Coefficienten zu gleichen Potestäten von  $x$  einzeln gleich seyn müssen (Rechenkunst §. 215.), so folgt hieraus

$$65. \quad \begin{cases} \alpha_1 = -2.3\alpha_2, \text{ also } \alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{2.3} \\ \alpha_3 = -4.5\alpha_4, \text{ also } \alpha_4 = -\frac{\alpha_3}{4.5} = +\frac{\alpha_1}{2.3.4.5} \\ \alpha_5 = -6.7\alpha_6, \text{ also } \alpha_6 = -\frac{\alpha_5}{6.7} = -\frac{\alpha_1}{2.3.4.5.6.7} \\ \alpha_7 = -8.9\alpha_8, \text{ also } \alpha_8 = -\frac{\alpha_7}{8.9} = +\frac{\alpha_1}{2.3.4.5.6.7.8.9} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

$$66. \quad \begin{cases} \beta_0 = -2\beta_2, \text{ also } \beta_2 = -\frac{\beta_0}{2} \\ \beta_1 = -3.4\beta_4, \text{ also } \beta_4 = -\frac{\beta_1}{3.4} = +\frac{\beta_0}{2.3.4} \\ \beta_3 = -5.6\beta_6, \text{ also } \beta_6 = -\frac{\beta_3}{5.6} = -\frac{\beta_0}{2.3.4.5.6} \\ \beta_5 = -7.8\beta_8, \text{ also } \beta_8 = -\frac{\beta_5}{7.8} = +\frac{\beta_0}{2.3.4.5.6.7.8} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Mithin ist in (33.) und (34.)

$$67. \quad \sin x = \alpha_1 x - \frac{\alpha_1}{2.3} x^3 + \frac{\alpha_1}{2.3.4.5} x^5 - \frac{\alpha_1}{2.3.4.5.6.7} x^7 + \frac{\alpha_1}{2.3.4.5.6.7.8.9} x^9 \dots$$

$$68. \quad \cos x = \beta_0 - \frac{\beta_0}{2} x^2 + \frac{\beta_0}{2.3.4} x^4 - \frac{\beta_0}{2.3.4.5.6} x^6 + \frac{\beta_0}{2.3.4.5.6.7.8} x^8 \dots$$

wo nur noch die beiden Coefficienten  $\alpha_1$  und  $\beta_0$  zu finden sind. Der Ausdruck von  $\sin x$  (67.) giebt

$$69. \quad \frac{\sin x}{x} = \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{2.3} x^2 + \frac{\alpha_1}{2.3.4.5} x^4 \dots$$

Nun war

$$\frac{\sin(x+k) - \sin x}{k} = \cos(x+k_1) \quad (27.),$$

wo  $k_1$  zwischen 0 und  $k$  liegt. Da dieser Ausdruck für jeden Werth von  $x$  gilt, so gilt er auch für  $x = 0$ . In diesem Falle giebt aber derselbe

$$\frac{\sin k}{k} = \cos k_1;$$

für jeden Werth von  $k$ , der nicht größer ist als ein Quadrant. Setzt man  $k = 0$ , so ist auch  $k_1 = 0$ , weil  $k_1$  immer zwischen 0 und  $k$  liegt; also ist

$$\frac{\sin k}{k} = \cos 0 = 1 \text{ für } k = 0,$$

oder auch, wenn man  $\infty$  statt  $k$  schreibt,

$$70. \frac{\sin \infty}{\infty} = 1 \text{ für } \infty = 0.$$

In (69.) ist aber für  $\infty = 0$ ,  $\frac{\sin \infty}{\infty} = \alpha_1$ . Also ist

$$71. \alpha_1 = 1;$$

welches der eine der beiden fehlenden Coefficienten ist.

Ferner giebt der Ausdruck (68.) für  $\infty = 0$ ,  $\cos 0 = 1 = \beta_0$ ; also ist

$$72. \beta_0 = 1,$$

welches der andere Coefficient  $\beta_0$  ist.

Es ist daher in (67. und 68.) vollständig:

$$73. \sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3....7} + \frac{x^9}{2.3....9} - \dots \text{ und}$$

$$74. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3....6} + \frac{x^8}{2.3....8} - \dots$$

für jeden beliebigen Werth von  $x$ ; wie im Lehrsatz.

Da  $\sin x = \sin(2n\pi + x) = \sin((2n+1)\pi - x)$  und  $\cos x = \cos(2n\pi + x)$  ist (§. 317.), so behalten die Reihen rechterhand den nemlichen Werth, wenn man in die erste  $2n\pi + x$  oder  $(2n+1)\pi - x$  und in die zweite  $2n\pi + x$  oder  $2n\pi - x$  statt  $x$  setzt.

329.

**Zusatz.** Wenn  $e$  die Zahl bedeutet, deren natürlicher Logarithme 1 ist, so ist

$$1. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} \dots \text{ (Rechenkunst §. 255, IV. 6.)}$$

Setzt man hierin  $+ix$  und  $-ix$  statt  $x$ , wo

$$i = \sqrt{-1}$$

ist, so erhält man

$$2. e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2 x^2}{2} + \frac{i^3 x^3}{2.3} + \frac{i^4 x^4}{2.3.4} + \frac{i^5 x^5}{2.3....5} + \frac{i^6 x^6}{2.3....6} - \dots$$

$$3. e^{-ix} = 1 - ix + \frac{i^2 x^2}{2} - \frac{i^3 x^3}{2.3} + \frac{i^4 x^4}{2.3.4} - \frac{i^5 x^5}{2.3....5} + \frac{i^6 x^6}{2.3....6} - \dots$$

Dieses giebt, wenn man addirt und subtrahirt,

$$4. e^{ix} + e^{-ix} = 2 \left( 1 + \frac{i^2 x^2}{2} + \frac{i^4 x^4}{2.3.4} + \frac{i^6 x^6}{2.3....6} + \frac{i^8 x^8}{2.3....8} \dots \right) \text{ und}$$

$$5. e^{ix} - e^{-ix} = 2i \left( x + \frac{i^2 x^3}{2.3} + \frac{i^4 x^5}{2.3....5} + \frac{i^6 x^7}{2.3....7} + \frac{i^8 x^9}{2.3....9} \dots \right)$$

Nun ist  $i^2 = -1$ ,  $i^4 = +1$ ,  $i^6 = -1$ ,  $i^8 = +1$  etc. (Rechenkunst §. 255.) Also ist

$$6. \frac{e^{+ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \dots 6} + \frac{x^8}{2 \cdot 3 \dots 8} - \dots$$

$$7. \frac{e^{+ix} - e^{-ix}}{2i} = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \dots 5} - \frac{x^7}{2 \cdot 3 \dots 7} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \dots 9} - \dots$$

Die namlichen Reihen waren  $\cos x$  und  $\sin x$ . (§. 328. 73. und 74.)  
Also ist

$$8. \cos x = \frac{e^{+ix} + e^{-ix}}{2} \text{ und}$$

$$9. \sin x = \frac{e^{+ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

### 330.

*Anmerkung.* Die Gleichungen (8.) und (9.) (§. 329.) sind dieselben, von welchen in der Rechenkunst, im zehnten Abschnitt, die Entwicklung der dort ohne Rücksicht auf ihre geometrische Bedeutung durch  $\sin x$  und  $\cos x$  bezeichneten Größen ausging, so daß also die gegenwärtige Entwicklung gleichsam der Rückweg ist.

Will man daher die Goniometrie analytisch abhandeln, so ist (§. 328.) der Fundamental-Satz, und der Gang ist folgender.

Zuerst definiert man die goniometrischen Linien nach einer Figur, wie hier oben (§. 309.) und weist sie in der Figur für Bogen von beliebiger Größe nach. Sodann folgt der Satz (§. 315.) von den gegenseitigen Verhältnissen der goniometrischen Linien eines und desselben Bogens, und hierauf sogleich der Fundamental-Satz (§. 328.). Nachdem aus demselben die Ausdrücke (8.) und (9.) (§. 329.) gefunden sind, läßt sich aus diesen allein Alles übrige von (§. 316.) bis (§. 328.) ohne weitere Hülfe der Figur finden; wie in der Rechenkunst, im zehnten Abschnitt zu sehen, wo aus den Gleichungen (8. und 9.) (§. 329.) allein, und ohne Figur, die vorzüglichsten Sätze von (§. 316. und 312. III.), die auch die übrigen geben, wirklich entwickelt worden sind. Daß auch der Satz (§. 321.) auf diesem Wege ohne Figur sich finden laßt, wird sich weiter unten zeigen \*).

---

\*) Zu bemerken ist, daß wiederum bei dem Beweise des Satzes (§. 328.), der ein Gegenstand der sogenannten Differential- und Integral-Rechnung zu seyn pflegt, wie man sieht, das Unendlichkleine oder sonst Höheres gar nicht vorkommt, sondern daß der Satz ganz einfach und natürlich, bloß aus Elementen der Geometrie, vermittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten gefunden wird, welches beispielsweise abermals den Beweis giebt, daß die sogenannte höhere Rechnung in der That nichts weiter ist, als gewöhnliche Algebra.

## 331.

**Lehrsatz.** Es ist für jeden beliebigen Bogen  $x$ :

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{16x^5}{15} + \frac{272x^7}{315} + \dots$$

$$\cot x = \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{9375} - \frac{2x^{10}}{9375 \cdot 11} \dots \right).$$

Der Beweis liegt in der Entwicklung dieser Ausdrücke (Rechenkunst §. 266.).

Reihen für  $\sec x$  und  $\operatorname{cosec} x$  kann man auf ähnliche Art finden.

## 332.

**Lehrsatz.** Die Ausdrücke der natürlichen Logarithmen von  $\cos x$  und  $\sin x$ , nemlich  ${}^e\cos x$  und  ${}^e\sin x$ , sind folgende:

$${}^e\cos x = - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{2x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{16x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{272x^8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \dots \right).$$

$${}^e\sin x = x - \left( \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{x^9}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 8} \dots \right).$$

Der Beweis liegt in der Entwicklung (Rechenkunst §. 268.).

Die Logarithmen von  $\operatorname{tang} x$  und  $\cot x$  findet man, wenn man die Logarithmen von  $\sin x$  und  $\cos x$  von einander abzieht, weil

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ und } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Die Logarithmen von  $\sec x$  und  $\operatorname{cosec} x$  sind den Logarithmen von  $\cos x$  und  $\sin x$ , negativ genommen, gleich, weil  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  und  $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ , also

$${}^e\sec x = {}^e1 - {}^e\cos x = 0 - {}^e\cos x = - {}^e\cos x \text{ und } {}^e\operatorname{cosec} x = {}^e1 - {}^e\sin x = 0 - {}^e\sin x = - {}^e\sin x \text{ ist.}$$

## 333.

**Lehrsatz.** Es ist für jeden beliebigen Bogen  $x$  im ersten positiven und im ersten negativen Quadranten:

$$x = \sin x + \frac{1}{2 \cdot 3} \sin x^3 + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 5} \sin x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \sin x^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \sin x^9 \dots$$

$$\pm x = \frac{1}{2} \pi - \left( \cos x + \frac{1}{2 \cdot 3} \cos x^3 + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 5} \cos x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \cos x^7 + \dots \right)$$

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{\operatorname{tang} x^3}{3} + \frac{\operatorname{tang} x^5}{5} - \frac{\operatorname{tang} x^7}{7} + \frac{\operatorname{tang} x^9}{9} - \dots$$

**Beweis.** Man setze der Kürze wegen

$$1. \sin x = s,$$

und nach der Methode der unbestimmten Coefficienten,

$$2. x = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^4 \dots$$

wo es nun darauf ankommt, die Coefficienten  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots$  zu finden.

Da gleiche positive und negative Bogen gleiche positive und negative Sinus haben, so erhält man, wenn man  $-s$  statt  $s$  setzt,

$$3. -x = \alpha_0 - \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 - \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^4 - \alpha_5 s^5 \dots;$$

also ist

$$+ \alpha_0 - \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 - \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^4 - \alpha_5 s^5 + \dots \\ = -\alpha_0 - \alpha_1 s - \alpha_2 s^2 - \alpha_3 s^3 - \alpha_4 s^4 - \alpha_5 s^5 - \dots,$$

woraus

$$2(\alpha_0 + \alpha_2 s^2 + \alpha_4 s^4 + \alpha_6 s^6 \dots) = 0,$$

und nach den Regeln der unbestimmten Coefficienten,

$$4. \quad \alpha_0 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_6 = 0 \dots$$

folgt.

Es ist daher in (2.) blos

$$5. \quad x = \alpha_1 s + \alpha_3 s^3 + \alpha_5 s^5 + \alpha_7 s^7 \dots$$

Nun setze man den zum Bogen  $x+k$  gehörigen Sinus gleich  $s+x$ , so ist vermöge (5.)

$$6. \quad x+k = \alpha_1 (s+x) + \alpha_3 (s+x)^3 + \alpha_5 (s+x)^5 \dots,$$

oder, wenn man die einzelnen Glieder rechterhand nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt,

$$7. \quad x+k = \alpha_1 s + \alpha_3 s^3 + \alpha_5 s^5 + \alpha_7 s^7 \dots \\ + x(\alpha_1 + 3\alpha_3 s^2 + 5\alpha_5 s^4 + 7\alpha_7 s^6 \dots) \\ + x^2(\alpha_3 + 3\alpha_5 s + 10\alpha_7 s^2 + 21\alpha_9 s^3 \dots) \\ \dots \dots \dots$$

Die oberste Reihe rechterhand ist  $x$  selbst. Es hebt sich also in (7.)  $x$  auf beiden Seiten, und man erhält, wenn man der Kürze wegen,

$$8. \quad \alpha_1 + 3\alpha_3 s^2 + 5\alpha_5 s^4 + 7\alpha_7 s^6 \dots \text{ durch } p_1, \\ 3\alpha_3 s + 10\alpha_5 s^3 + 21\alpha_7 s^5 \dots \text{ durch } p_2,$$

bezeichnet, wo die Größen  $p_1, p_2 \dots$ , wie man sieht, weiter kein  $x$ , sondern nur  $s$  enthalten,

$$9. \quad k = p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 \dots,$$

woraus

$$10. \quad \frac{k}{x} = p_1 + p_2 x + p_3 x^2 \dots$$

folgt.

Da  $\sin x = s$  und  $\sin(x+k) = s+x$  war, so ist

$$x = \sin(x+k) - \sin x;$$

also ist die Gleichung (10.), so viel als

$$11. \quad \frac{k}{\sin(x+k) - \sin x} = p_1 + p_2 (\sin(x+k) - \sin x) \\ + p_3 (\sin(x+k) - \sin x)^2 \dots;$$

für jeden beliebigen Bogen  $x$  und  $k$ .

II. Nun ist vermöge (27. §. 328.)

$$12. \quad \frac{k}{\sin(x+k) - \sin x} = \frac{1}{\cos(x+k)},$$

ebenfalls für beliebige  $x$  und beliebige  $k$ , in dem nemlichen Quadranten, unter der Bedingung, daß der Bogen  $k$ , zwischen 0 und  $k$  liegt.

Es ist also vermöge (11.) und (12.)

$$13. \quad \frac{1}{\cos(x+k)} = p_1 + p_2 (\sin(x+k) - \sin x) \\ + p_3 (\sin(x+k) - \sin x)^2 \dots$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von  $k$  gilt, so gilt sie auch für  $k=0$ . Dann aber ist auch  $k_r$  Null, weil  $k_r$  zwischen 0 und  $k$  liegt. Also ist für  $k=0$  in (13.), weil alsdann auch  $\sin(x+k) - \sin x = 0$  ist,

$$14. \frac{1}{\cos x} = p_1,$$

oder da  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  ist,

$$15. \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = p_1,$$

oder, wenn man den Werth von  $p_1$  aus (8.) setzt, und für  $\sin x$  wieder  $s$  schreibt,

$$16. \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} = \alpha_1 + 3\alpha_3 s^2 + 5\alpha_5 s^4 + 7\alpha_7 s^6 \dots$$

Nun ist  $\frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$  so viel als  $(1 - s^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Entwickelt man diese Wurzel-Größe nach dem binomischen Lehrsatz, so erhält man

$$(1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-s^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2} (-s^2)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{2 \cdot 3} (-s^2)^3 \dots$$

oder

$$17. (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}s^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}s^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}s^8 \dots$$

Es ist also, zu Folge (16.):

$$18. 1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}s^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}s^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}s^8 \dots \\ = \alpha_1 + 3\alpha_3 s^2 + 5\alpha_5 s^4 + 7\alpha_7 s^6 + 9\alpha_9 s^8 \dots$$

Da nun, nach den Regeln der unbestimmten Coefficienten, die Coefficienten gleicher Potestäten der willkürlichen Größe gleich sind, so ist

$$19. \begin{cases} \alpha_1 = 1; \\ 3\alpha_3 = \frac{1}{2}, \text{ also } \alpha_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}; \\ 5\alpha_5 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \text{ also } \alpha_5 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}; \\ 7\alpha_7 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \text{ also } \alpha_7 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}; \\ 9\alpha_9 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \text{ also } \alpha_9 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}; \\ \vdots \end{cases}$$

Mithin ist zu Folge (5.)

$$20. x = s + \frac{1}{2 \cdot 3}s^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}s^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}s^7 \dots$$

oder

$$21. x = \sin x + \frac{1}{2 \cdot 3} \sin x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \sin x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \sin x^7 \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \sin x^9 \dots;$$

wie im Lehrsatz.

## 334. Vergleichung der gon. Lin. u. ihrer Bog. 335

III. Die Reihe (21.) giebt nur die positiven Bogen im ersten und die negativen Bogen im vierten Quadranten. In der That giebt sie, wenn  $\sin x = 0$  ist, Null, also obgleich auch  $\sin m\pi = \sin 0$  ist, wo  $m$  eine beliebige ganze Zahl seyn kann, nicht  $m\pi$ , sondern nur Null. Nun wächst in der Gleichung (21.)  $x$  nur so lange  $\sin x$  wächst, also nur von 0 bis  $\frac{1}{2}\pi$ . Ueber  $\frac{1}{2}\pi$  hinaus nimmt  $\sin x$  wieder ab, und folglich in der Gleichung (21.) auch  $x$ . Mithin giebt die Gleichung keinen grössern Bogen als  $\frac{1}{2}\pi$  und folglich nur die positiven Bogen zwischen 0 und  $\frac{1}{2}\pi$ . Eben so nimmt, wenn  $x$  negativ ist,  $x$  in der Gleichung ab, so lange  $\sin x$  abnimmt, also bis  $x = -\frac{1}{2}\pi$ . Da über  $-\frac{1}{2}\pi$  hinaus  $\sin x$  wieder zunimmt, so giebt die Gleichung auch nur die negativen Bogen zwischen 0 und  $\frac{1}{2}\pi$ . Der Grund dieser Einschränkung liegt in der Voraussetzung (2.) oder (5.). In derselben hat  $s$  nur dann verschiedene Werthe, wenn  $s$  verschiedene Werthe hat. Deshalb gilt die Gleichung nur in dem Umfange eines positiven und eines negativen Quadranten; denn darüber hinaus gehören zu den nemlichen  $s$  andere  $x$ ; welches die vorausgesetzte Gleichung nicht ausdrückt: und da zugleich in (5.)  $x$  Null ist, wenn  $s$  Null ist, so gilt die Gleichung nur für den ersten positiven und für den ersten negativen Quadranten.

Will man daher zu dem Sinus eines grössern Bogens, den Bogen berechnen, so muss man den ihm gleichen Sinus im ersten positiven oder negativen Quadranten nehmen, und den Bogen, welcher zwischen beiden gleichen Sinus liegt, wieder zu, oder abrechnen. Liegt z. B. der gegebene Sinus im zweiten Quadranten, so ist der Bogen, welchen die Reihe giebt, das Complement des gesuchten Bogens; denn zu einem, dem Complement gleichen Bogen gehört der dem gegebenen gleiche Sinus im ersten Quadranten.

IV. Setzt man in die Reihe (21.)  $\frac{1}{2}\pi - x$  statt  $x$  für ein positives  $x$  und  $\frac{1}{2}\pi + x$  für ein negatives  $x$ , welche beiden Bogen ebenfalls noch im ersten positiven und im ersten negativen Quadranten liegen, so dass für sie der Ausdruck (21.) noch paßt, so erhält man, weil  $\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$  und  $\sin(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x$  ist,

$$22. \pm x = \frac{1}{2}\pi - \cos x - \frac{1}{2.3} \cos x^3 - \frac{1.5}{2.4.5} \cos x^5 \dots;$$

wie im Lehrsatz.

V. Der Beweis des Ausdrucks von  $x$  durch  $\tan x$  befindet sich in Rechenkunst (§. 267.).

### 334.

**Zusätze.** I. Die obigen Ausdrücke für die goniometrischen Linien dienen zur Berechnung von Tafeln dieser Linien und ihrer Logarithmen, worüber das Nöthigste in (Rechenkunst §. 269.) steht.

II. Aus den Ausdrücken der Bogen durch die Sinus und die Tangenten (§. 333.) findet man auch die Zahl  $\pi$ , das heisst den Kreis-Umfang für den Durchmesser 1. Setzt man z. B. in

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3} \sin x^3 + \frac{1.3}{2.4.5} \sin x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \sin x^7 \dots$$



$\sin \pi = \frac{1}{2}$ , welcher Sinus dem Bogen  $\frac{1}{2}\pi$  angehört, so erhält man  $\frac{1}{2}\pi$ , oder wenn man mit 6 multiplicirt,

$$\pi = 6 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 2^3} \dots \right)$$

welche Reihe sich ziemlich stark nähert.

Stärker convergirende Ausdrücke von  $\pi$  findet man durch den Ausdruck des Bogens durch die Tangente. Das Nöthigste davon steht in (Rechenkunst §. 267.).

Die Zahl  $\pi$  ist, wie in Rechenkunst (§. 267.) bemerkt, ungemein genau berechnet worden. Weiter unten, in der Zusammenstellung (§. 345.) ist sie auf 127 Decimalstellen angegeben.

Auch findet man daselbst einige von den Brüchen die derselben immer näher kommen und die durch Kettenbrüche gefunden werden. Desgleichen eine andere Reihe von Brüchen für  $\pi$ , deren Glieder sehr stark abnehmen.

### Der Cotesische und Moivresche Lehrsatz.

335.

**Lehrsatz.** Wenn  $a$  eine beliebige Linie,  $x$  einen beliebigen Bogen und  $n$  eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so ist

$$1. \quad a^{2n} - 2a^n \cos x + 1 \\ = \left( a^2 - 2a \cos \frac{x}{n} + 1 \right) \left( a^2 - 2a \cos \frac{2x}{n} + 1 \right) \left( a^2 - 2a \cos \frac{4x}{n} + 1 \right) \\ \times \left( a^2 - 2a \cos \frac{6x}{n} + 1 \right) \dots \left( a^2 - 2a \cos \frac{2(n-1)x}{n} + 1 \right).$$

$$2. \quad a^{4n} - 2a^{2n} \cos x + 1 \\ = \left( (a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \left( \frac{x}{2n} \right) \right) \left( (a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \left( \frac{2x}{2n} \right) \right) \\ \times \left( (a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \left( \frac{4x}{2n} \right) \right) \dots \left( (a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \left( \frac{2(n-1)x}{2n} \right) \right).$$

$$3. \quad a^{2n+2} - 2a^{n+1} \cos x + 1 \\ = \left( a^2 - 2a \cos \frac{x}{2n+1} + 1 \right) \left( a^2 + 2a \cos \frac{x}{2n+1} + 1 \right) \left( a^2 - 2a \cos \frac{2x}{2n+1} + 1 \right) \\ \dots \left( a^2 + 2a \cos \frac{2n-1)x}{2n+1} + 1 \right).$$

Für den besondern Fall  $x = 0$  ist

$$4. \quad a^n - 1 = (a - 1) \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{2\pi}{n} + 1} \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{4\pi}{n} + 1} \\ \times \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{6\pi}{n} + 1} \dots \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + 1}.$$

Für den Fall  $x = \pi$  ist

$$5. \quad a^{2n+1} + 1 = (a + 1) \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{\pi}{2n+1} + 1} \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{3\pi}{2n+1} + 1} \\ \times \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{5\pi}{2n+1} + 1} \dots \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{4n-1)\pi}{2n+1} + 1} \\ \times \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{2(n+1)\pi}{2n+1} + 1} \dots \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{(4n+1)\pi}{2n+1} + 1}.$$

und

$$6. a^{2n} + 1 = \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos \frac{\pi}{2n} + 1\right)} \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos \frac{5\pi}{2n} + 1\right)} \\ \times \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos \frac{9\pi}{2n} + 1\right)} \dots \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos \frac{(4n-1)\pi}{2n} + 1\right)}.$$

**Beweis.** I. Die Factoren der GröÙe  $a^{2n} - 2a^n \cos x + 1$  sind die Wurzeln der Gleichung

$$7. a^{2n} - 2a^n \cos x + 1 = 0,$$

abgezogen von  $a$ ; denn gesetzt  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$  sind die  $2n$  Wurzeln der Gleichung (7.), so ist dieselbe so viel als

$$8. (a - a_1)(a - a_2)(a - a_3) \dots (a - a_{2n}) = 0 \text{ (Rechenkunst §. 275.)},$$

so daß

$$9. (a - a_1)(a - a_2)(a - a_3) \dots (a - a_{2n}) = a^{2n} - 2a^n \cos x + 1$$

ist; denn für die  $2n$  Werthe  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$  von  $a$ , und für nicht mehr und nicht weniger, ist die GröÙe (7.) eben so wohl Null als die GröÙe (8.). Daher sind  $a - a_1, a - a_2, a - a_3, \dots, a - a_{2n}$

Factoren von  $a^{2n} - 2a^n \cos x + 1$ , und man findet dieselben, wenn man die Wurzeln der Gleichung (7.) sucht, und sie eine nach der andern von  $a$  abzieht.

II. Die GröÙe  $a^{2n} - 2a^n \cos x + 1$  ist aber so viel als

$$10. a^{2n} - 2a^n \cos(2m\pi \pm x) + 1,$$

wo  $m$  jede beliebige ganze Zahl seyn kann; denn es ist  $\cos(2m\pi \pm x) = \cos x$  (§. 317. 2.). Also muß man die Wurzeln der Gleichung

$$11. a^{2n} - 2a^n \cos(2m\pi \pm x) + 1 = 0$$

nehmen.

III. Setzt man  $a^n = v$ , so ist die Gleichung (11.) folgende:

$$12. v^2 - 2v \cos(2m\pi \pm x) + 1 = 0,$$

woraus

$$v = \cos(2m\pi \pm x) \pm \sqrt{\cos^2(2m\pi \pm x) - 1}, \text{ oder}$$

$$v = \cos(2m\pi \pm x) \pm \sqrt{-1} \sqrt{1 - \cos^2(2m\pi \pm x)}, \text{ oder}$$

$$13. v = \cos(2m\pi \pm x) \pm i \sin(2m\pi \pm x)$$

folgt. Da nun  $v = a^n$  war, so ist

$$14. a^n = \cos(2m\pi \pm x) \pm i \sin(2m\pi \pm x).$$

Da ferner  $\cos(2m\pi \pm x) = \cos(2m\pi - x)$ , hingegen  $\sin(2m\pi \pm x) = \pm \sin(2m\pi - x)$  ist (§. 317. 2. 1.), so drückt auch

$$15. a^n = \cos(2m\pi \pm x) \pm i \sin(2m\pi \pm x)$$

das Nemliche aus wie (14.). Daher kann man auch statt (14.) die Gleichung (15.) setzen.

IV. Aus (15.) folgt

$$16. a = (\cos(2m\pi \pm x) \pm i \sin(2m\pi \pm x))^{\frac{1}{n}}$$

und vermöge (Rechenkunst §. 261. 2.) ist

$$17. (\cos(2m\pi \pm x) \pm i \sin(2m\pi \pm x))^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2m\pi \pm x}{n} \pm i \sin \frac{2m\pi \pm x}{n}.$$

Also ist

$$18. a = \cos \frac{2m\pi \pm x}{n} \pm i \sin \frac{2m\pi \pm x}{n}.$$

Da diese Gleichung alle  $2n$  Wurzeln der Gleichung (11.) zugleich ausdrückt, und  $m$  willkürlich ist, so muß man die  $2n$  Wurzeln finden, wenn man der Reihe nach  $m=0, 1, 2, 3, \dots, n-1$  setzt, denn eben dadurch erhält man  $n$  verschiedene Werthe von  $a$  und das doppelte Zeichen von  $i$  giebt  $2n$  Werthe.

Die  $2n$  Wurzeln der Gleichung (11.) sind also folgende:

$$19. \begin{cases} a_1 = \cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n}, & a_2 = \cos \frac{x}{n} - i \sin \frac{x}{n}, \\ a_3 = \cos \frac{2\pi + x}{n} + i \sin \frac{2\pi + x}{n}, & a_4 = \cos \frac{2\pi + x}{n} - i \sin \frac{2\pi + x}{n}, \\ a_5 = \cos \frac{4\pi + x}{n} + i \sin \frac{4\pi + x}{n}, & a_6 = \cos \frac{4\pi + x}{n} - i \sin \frac{4\pi + x}{n}, \\ \dots & \dots \\ a_{2n-1} = \cos \frac{2(n-1)\pi + x}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi + x}{n}, \\ a_{2n} = \cos \frac{2(n-1)\pi + x}{n} - i \sin \frac{2(n-1)\pi + x}{n}. \end{cases}$$

IV. Zieht man nun, nach (I.), alle diese Wurzeln, eine nach der andern, von  $a$  ab, so erhält man die Factoren der GröÙe (10.), nemlich;

$$20. \begin{cases} a - a_1, a - a_2, \\ a - a_3, a - a_4, \\ a - a_5, a - a_6, \\ \dots \\ a - a_{2n-1}, a - a_{2n}. \end{cases}$$

Aber auch beliebige Producte dieser Factoren sind, nothwendig wiederum Factoren der GröÙe (10.). Also sind auch z. B.,

$$21. \begin{cases} (a - a_1)(a - a_2), \\ (a - a_3)(a - a_4), \\ (a - a_5)(a - a_6), \\ \dots \\ (a - a_{2n-1})(a - a_{2n}). \end{cases}$$

Factoren der GröÙe (10.).

Setzt man in (21.) die Werthe von  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$  aus (19.), so erhält man z. B.

$$\begin{aligned} 22. (a - a_1)(a - a_2) &= (a - (\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n}))(a - (\cos \frac{x}{n} - i \sin \frac{x}{n})) \\ &= a^2 - 2a \cos \frac{x}{n} + \cos^2 \frac{x}{n} - i^2 \sin^2 \frac{x}{n} \\ &= a^2 - 2a \cos \frac{x}{n} + \cos^2 \frac{x}{n} + \sin^2 \frac{x}{n} \\ &= a^2 - 2a \cos \frac{x}{n} + 1; \end{aligned}$$

eben so

$$23. \begin{cases} (a - a_3)(a - a_4) = a^2 - 2a \cos \frac{2\pi + x}{n} + 1, \\ (a - a_5)(a - a_6) = a^2 - 2a \cos \frac{4\pi + x}{n} + 1; \\ \dots \\ (a - a_{2n-1})(a - a_{2n}) = a^2 - 2a \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + 1. \end{cases}$$

Es sind also

$$24. \begin{cases} a^2 - 2a \cos \frac{x}{n} + 1, \\ a^2 - 2a \cos \frac{2\pi + x}{n} + 1, \\ a^2 - 2a \cos \frac{4\pi + x}{n} + 1, \\ \dots \\ a^2 - 2a \cos \frac{2(n-1)\pi + x}{n} + 1. \end{cases}$$

die  $n$  doppelten Factoren der Größe

$$a^{2n} - 2a^n \cos x + 1;$$

wie im Lehrsatz (1.).

V. Wenn  $n$  grade ist, so sind je zwei Factoren, bis auf das Zeichen des mittleren Gliedes, gleich. Es sey z. B.  $n = 6$ , so sind die 6 Factoren in (1.), weil  $\cos(\pi + x) = -\cos x$  ist, folgende:

$$25. \begin{cases} a^2 - 2a \cos \frac{x}{6} + 1, \\ a^2 - 2a \cos \frac{2\pi + x}{6} + 1, \\ a^2 - 2a \cos \frac{4\pi + x}{6} + 1, \\ a^2 - 2a \cos \frac{6\pi + x}{6} + 1 = a^2 - 2a \cos \left(\pi + \frac{x}{6}\right) + 1 \\ \quad = a^2 + 2a \cos \frac{x}{6} + 1, \\ a^2 - 2a \cos \frac{8\pi + x}{6} + 1 = a^2 - 2a \cos \left(\pi + \frac{2\pi + x}{6}\right) + 1 \\ \quad = a^2 + 2a \cos \left(\frac{2\pi + x}{6}\right) + 1, \\ a^2 - 2a \cos \frac{10\pi + x}{6} + 1 = a^2 - 2a \cos \left(\pi + \frac{4\pi + x}{6}\right) + 1 \\ \quad = a^2 + 2a \cos \left(\frac{4\pi + x}{6}\right) + 1; \end{cases}$$

wo, wie man sieht, die drei letzten Factoren den drei ersten, bis auf das Zeichen des zweiten Gliedes, gleich sind.

Es ist also für ein grades  $n$ , wenn man die Factoren mit gleichen Cosinus mit einander multiplicirt,

$$\begin{aligned}
 26. \quad & a^{2n} - 2a^n \cos x + 1 \\
 &= \left( (a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \left( \frac{x}{n} \right) \right) \left( (a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \left( \frac{2\pi + x}{n} \right) \right) \\
 &\times \left( (a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \left( \frac{4\pi + x}{n} \right) \right) \dots \left( (a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \left( \frac{(n-2)\pi + x}{n} \right) \right),
 \end{aligned}$$

welches, wenn man, um auszudrücken, daß  $n$  grade seyn soll,  $2n$  statt  $n$  setzt, die Gleichung (2.) giebt.

VI. Ist  $n$  ungrade, so kann man die Bogen in den Factoren, statt um  $2\pi$ , um  $\pi$  fortschreiten lassen. Alsdann sind die Zeichen der zweiten Glieder abwechselnd negativ und positiv. Es sey z. B.  $n = 5$ , so sind die 5 Factoren in (1.) folgende:

$$\begin{aligned}
 27. \quad & \left\{ \begin{aligned} & a^2 - 2a \cos \frac{x}{5} + 1, \\ & a^2 - 2a \cos \frac{2\pi + x}{5} + 1, \\ & a^2 - 2a \cos \frac{4\pi + x}{5} + 1, \\ & a^2 - 2a \cos \frac{6\pi + x}{5} + 1 = a^2 - 2a \cos \left( \pi + \frac{\pi + x}{5} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad = a^2 + 2a \cos \frac{\pi + x}{5} + 1, \\ & a^2 - 2a \cos \frac{8\pi + x}{5} + 1 = a^2 - 2a \cos \left( \pi + \frac{3\pi + x}{5} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad = a^2 + 2a \cos \frac{3\pi + x}{5} + 1; \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

wo, wie man sieht, nach der Fortschreitung der Bogen, der vierte Factor zwischen den ersten und zweiten, und der fünfte zwischen den zweiten und dritten fällt.

Es ist also für ein ungrades  $n$ :

$$\begin{aligned}
 28. \quad & \left\{ \begin{aligned} & a^{2n} - 2a^n \cos x + 1 \\ &= \left( a^2 - 2a \cos \frac{x}{n} + 1 \right) \left( a^2 + 2a \cos \frac{\pi + x}{n} + 1 \right) \left( a^2 - 2a \cos \frac{2\pi + x}{n} + 1 \right) \\ & \qquad \dots \left( a^2 + 2a \cos \frac{(n-1)\pi + x}{n} \right), \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

welches, wenn man, um auszudrücken, daß  $n$  ungrade seyn soll,  $2n + 1$  statt  $n$  setzt, die Gleichung (3.) giebt.

VII. Ist  $x = 0$ , so ist  $\cos x = 1$ ; also geht in diesem Falle die Gleichung (1.) in folgende über:

$$\begin{aligned}
 29. \quad & a^{2n} - 2a^n + 1 \\
 &= (a^2 - 2a + 1) \left( a^2 - 2a \cos \frac{2\pi}{n} + 1 \right) \left( a^2 - 2a \cos \frac{4\pi}{n} + 1 \right) \\
 &\times \left( a^2 - 2a \cos \frac{6\pi}{n} + 1 \right) \dots \left( a^2 - 2a \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + 1 \right).
 \end{aligned}$$

Zieht man auf beiden Seiten die zweite Wurzel aus, so erhält man, weil  $\sqrt{a^{2n} - 2a^n + 1} = a^n - 1$  ist, die Gleichung (4.) im Lehrsatz.

## 336. 337. Factoren-Ausdrücke f. d. gon. Linien. 339

VIII. Ist  $\alpha \equiv \pi$ , so ist  $\cos \alpha \equiv -1$ . Also geht in diesem Falle die Gleichung (1.) für ein ungrades  $n$ , in folgende über:

$$\begin{aligned} 50. \quad & a^{2n} + 2a^n + 1 \\ & \equiv \left(a^2 - 2a \cos \frac{\pi}{n} + 1\right) \left(a^2 - 2a \cos \frac{3\pi}{n} + 1\right) \left(a^2 - 2a \cos \frac{5\pi}{n} + 1\right) \\ & \dots + \left(a^2 - 2a \cos \frac{(n-2)\pi}{n} + 1\right) \left(a^2 - 2a \cos \frac{n\pi}{n} + 1\right) \left(a^2 - 2a \cos \frac{(n+1)\pi}{n} + 1\right) \\ & \dots \left(a^2 - 2a \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} + 1\right). \end{aligned}$$

Unter den verschiedenen Factoren rechterhand ist der mittlere  $a^2 - 2a \cos \frac{n\pi}{n} + 1$  gleich  $a^2 - 2a \cos \pi + 1$ , gleich  $a^2 + 2a + 1$ . Zieht man also auf beiden Seiten die zweite Wurzel aus, so erhält man, weil  $\sqrt{a^{2n} + 2a^n + 1} \equiv a^n + 1$  und  $\sqrt{a^2 + 2a + 1} \equiv a + 1$  ist,

$$\begin{aligned} & \equiv (a + 1) \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos \frac{\pi}{n} + 1\right)} \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos \frac{3\pi}{n} + 1\right)} \\ & \quad \times \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos \frac{5\pi}{n} + 1\right)} \dots \left(a^2 - 2a \cos \frac{(n-2)\pi}{n} + 1\right), \\ & \quad \times \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos \frac{(n+2)\pi}{n} + 1\right)} \dots \left(a^2 - 2a \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} + 1\right), \end{aligned}$$

und wenn man, um auszudrücken, daß  $n$  ungrade seyn soll,  $2n+1$  statt  $n$  setzt, die Gleichung (5.) im Lehrsatz.

Für ein grades  $n$  erhält man, wenn man in (1.)  $\pi$  statt  $\alpha$ , und um auszudrücken, daß  $n$  grade seyn muß,  $2n$  setzt und auf beiden Seiten die zweite Wurzel aussieht, die Gleichung (6.) unmittelbar.

Man kann die Sätze (5. und 6.), wenn man will, auch auf die Weise wie den Satz (1.) in (V.) verwandeln.

### 336.

*Anmerkung.* Die Sätze (§. 335.) haben geometrische Bedeutungen am Kreise. Die besonderen Fälle (4. 5. 6.) des allgemeinen Satzes (1.) sind von Cotes im Anfange des 18ten Jahrhunderts gefunden und heißen nach ihrem Erfinder *Cotesischer Satz*. Der allgemeinere Satz ist etwas später von Moivre gefunden und heißt, nach ihm, *Moivrischer Satz*. Doppel-Factoren, wie in diesem Satze, nennt man auch *trinomische Factoren*.

## Ausdrücke der goniometrischen Linien durch Factoren.

### 337.

*Lehrsatz.* Es ist für jeden beliebigen Bogen  $x$ :

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sin x \equiv x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \dots \\ 2. \quad & \cos x \equiv \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{49\pi^2}\right) \dots, \end{aligned}$$

oder für beliebige ganze Zahlen  $m$  und  $n$ ,

$$3. \sin \frac{m}{2n} \pi = \pi \cdot \frac{m}{2n} \cdot \frac{2n-m}{2n} \cdot \frac{2n+m}{2n} \cdot \frac{4n-m}{4n} \cdot \frac{4n+m}{4n} \cdot \frac{6n-m}{6n} \dots,$$

$$4. \sin \frac{m}{2n} \pi = \frac{m}{n} \cdot \frac{2n-m}{n} \cdot \frac{2n+m}{3n} \cdot \frac{4n-m}{3n} \cdot \frac{4n+m}{5n} \cdot \frac{6n-m}{5n} \dots,$$

$$5. \cos \frac{m}{2n} \pi = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{n+m}{n} \cdot \frac{3n-m}{3n} \cdot \frac{3n+m}{3n} \cdot \frac{5n-m}{5n} \cdot \frac{5n+m}{5n} \dots,$$

$$6. \cos \frac{m}{2n} \pi = \pi \cdot \frac{n-m}{2n} \cdot \frac{n+m}{2n} \cdot \frac{3n-m}{2n} \cdot \frac{3n+m}{4n} \cdot \frac{5n-m}{4n} \cdot \frac{5n+m}{6n} \dots,$$

$$7. \pi = \sin \frac{m}{2n} \pi \cdot \frac{2n}{m} \cdot \frac{2n}{2n-m} \cdot \frac{2n}{2n+m} \cdot \frac{4n}{4n-m} \cdot \frac{4n}{4n+m} \cdot \frac{6n}{6n-m} \dots,$$

$$8. \pi = \cos \frac{m}{2n} \pi \cdot \frac{2n}{n-m} \cdot \frac{2n}{n+m} \cdot \frac{2n}{3n-m} \cdot \frac{2n}{3n+m} \cdot \frac{4n}{5n-m} \dots,$$

$$9. \pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \dots},$$

$$10. \pi = 2 \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \dots}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \dots} \cdot \sqrt{2},$$

$$11. \pi = 3 \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 24 \cdot 24}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25} \dots$$

etc.

**Beweis.** I. Es ist

$$12. \sin x = x \left( 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \dots 7} + \dots \right) \text{ und}$$

$$13. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \dots 6} + \dots$$

Man bezeichne die Wurzeln der Gleichungen

$$14. P \left( 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \dots 7} \dots \right) = 0 \text{ und}$$

$$15. Q \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \dots 6} \dots \right) = 0,$$

in welchen  $P, Q$  willkürliche Factoren seyn sollen, die kein  $x$  enthalten, durch

$$16. \begin{cases} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \dots \text{ und} \\ 1x, & 2x, & 3x, & 4x \dots \end{cases}$$

so kann man die Gleichungen (14. 15.) auch wie folgt ausdrücken:

$$17. (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \dots = 0 \text{ und}$$

$$18. (x - 1x)(x - 2x)(x - 3x)(x - 4x) \dots = 0;$$

denn die Größen  $(x - x_1)(x - x_2) \dots$  und  $(x - 1x)(x - 2x) \dots$  sind offenbar für  $x = x_1, x = x_2, x = x_3, \dots$  und für  $x = 1x, x = 2x, x = 3x$  etc. gleich Null und die Größen

$$P \left( 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right) \text{ und } Q \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right) \text{ sind}$$

es ebenfalls, weil nach der Voraussetzung  $x_1, x_2, x_3, \dots$  und  $1x, 2x, 3x, \dots$  die Wurzeln der Gleichungen (14. und 15.), das heisst, diejenigen

Werthe von  $x$  sind, für welche die Größen  $P \left( 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \dots \right)$  und  $Q \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \right)$  verschwinden.

Man kann also setzen:

$$19. \quad P(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \dots) \\ = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \dots \text{ und}$$

$$20. \quad Q(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \dots) \\ = (x - {}_1x)(x - {}_2x)(x - {}_3x)(x - {}_4x) \dots$$

Das Glied ohne  $x$  ist in der Gleichung (19.) linkerhand  $P$ , und rechterhand, wie leicht zu sehen,  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \dots$ . Also ist

$$21. \quad P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \dots$$

In der Gleichung (20.) ist das Glied ohne  $x$  linkerhand  $Q$  und rechterhand  ${}_1x \cdot {}_2x \cdot {}_3x \cdot {}_4x \dots$ . Also ist

$$22. \quad Q = {}_1x \cdot {}_2x \cdot {}_3x \cdot {}_4x \dots$$

Dividirt man daher die Gleichung (19.) durch  $P = x_1 x_2 x_3 \dots$  und die Gleichung (20.) durch  $Q = {}_1x {}_2x {}_3x \dots$ , so erhält man

$$23. \quad (1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots) = (\frac{x}{x_1} - 1)(\frac{x}{x_2} - 1)(\frac{x}{x_3} - 1) \dots$$

$$24. \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots = (\frac{x}{{}_1x} - 1)(\frac{x}{{}_2x} - 1)(\frac{x}{{}_3x} - 1) \dots$$

Es waren aber  $x_1, x_2, x_3 \dots$  und  ${}_1x, {}_2x, {}_3x \dots$  die Wurzeln der Gleichungen (14. und 15.), das heisst, diejenigen Werthe von  $x$ , für welche die Grössen  $P(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} \dots)$  und  $Q(1 - \frac{x^2}{2} \dots)$  ver-

schwinden, und diese Grössen sind so viel als  $\frac{P \sin x}{x}$  und  $Q \cos x$

(12.) (13.). Also sind  $x_1, x_2, x_3 \dots$  und  ${}_1x, {}_2x, {}_3x \dots$  diejenigen Werthe von  $x$ , für welche  $\frac{P \sin x}{x}$  und  $Q \cos x$ , oder, weil  $P$

und  $Q$  kein  $x$  enthalten,  $\frac{\sin x}{x}$  und  $\cos x$  verschwinden.

Dergleichen Werthe von  $x$  sind der Reihe nach für  $\frac{\sin x}{x}$ :  $+\pi, -\pi, +2\pi, -2\pi, +3\pi, -3\pi$  etc.; denn es ist  $\sin \pm \pi = 0$  (§. 312. 7.) und für  $\cos x$ ,  $+\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, +\frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi, +\frac{5}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi$  etc.; denn es ist  $\cos(2n \pm \frac{1}{2})\pi = 0$  (§. 312. 7.). Also ist

25. für den Sinus:

$$x_1 = +\pi, x_2 = -\pi, x_3 = +2\pi, x_4 = -2\pi, x_5 = +3\pi \text{ etc.},$$

26. und für den Cosinüs:

$${}_1x = +\frac{1}{2}\pi, {}_2x = -\frac{1}{2}\pi, {}_3x = +\frac{3}{2}\pi, {}_4x = -\frac{3}{2}\pi, {}_5x = +\frac{5}{2}\pi \text{ etc.};$$

folglich ist, weil vermöge (23.) und (24.)

$$\sin x = x \left(\frac{x}{x_1} - 1\right) \left(\frac{x}{x_2} - 1\right) \left(\frac{x}{x_3} - 1\right) \dots \text{ und}$$

$$\cos x = \left(\frac{x}{{}_1x} - 1\right) \left(\frac{x}{{}_2x} - 1\right) \left(\frac{x}{{}_3x} - 1\right) \dots \text{ ist,}$$

$$\sin x = x \left(\frac{x}{\pi} - 1\right) \left(\frac{x}{-\pi} - 1\right) \left(\frac{x}{2\pi} - 1\right) \left(\frac{x}{-2\pi} - 1\right) \left(\frac{x}{3\pi} - 1\right) \dots$$

$$\cos x = \left(\frac{x}{\frac{1}{2}\pi} - 1\right) \left(\frac{x}{-\frac{1}{2}\pi} - 1\right) \left(\frac{x}{\frac{3}{2}\pi} - 1\right) \left(\frac{x}{-\frac{3}{2}\pi} - 1\right) \left(\frac{x}{\frac{5}{2}\pi} - 1\right) \dots$$



oder

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \dots$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{2x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{2x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{2x}{3\pi}\right) \left(1 - \frac{2x}{5\pi}\right) \left(1 + \frac{2x}{5\pi}\right) \dots$$

oder

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots,$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \dots;$$

wie im Lehrsatz (1.) (2.)

II. Man setze in (1.) und (2.)

$$x = \frac{m}{2n} \pi,$$

so erhält man

$$\sin \frac{m}{2n} \pi = \frac{m}{2n} \pi \left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{16n^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{36n^2}\right) \dots,$$

$$\cos \frac{m}{2n} \pi = \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{25n^2}\right) \dots;$$

oder

$$\sin \frac{m}{2n} \pi = \pi \cdot \frac{m}{2n} \cdot \frac{4n^2 - m^2}{4n^2} \cdot \frac{16n^2 - m^2}{16n^2} \cdot \frac{36n^2 - m^2}{36n^2} \dots$$

$$\cos \frac{m}{2n} \pi = \frac{n^2 - m^2}{n^2} \cdot \frac{9n^2 - m^2}{9n^2} \cdot \frac{25n^2 - m^2}{25n^2} \dots;$$

woraus, wie leicht zu sehen, die Ausdrücke (3. und 5.) folgen.

III. Setzt man in (3. und 5.)  $n - m$  statt  $m$ , so erhält man; weil

$$\sin \frac{n-m}{2n} \pi = \sin \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{m}{2n}\pi\right) = \cos \frac{m}{2n} \pi \text{ und}$$

$$\cos \frac{n-m}{2n} \pi = \cos \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{m}{2n}\pi\right) = \sin \frac{m}{2n} \pi \text{ ist,}$$

$$\cos \frac{m}{2n} \pi = \pi \cdot \frac{n-m}{2n} \cdot \frac{n+m}{2n} \cdot \frac{3n-m}{2n} \cdot \frac{3n+m}{4n} \cdot \frac{5n-m}{4n} \dots \text{ und}$$

$$\sin \frac{m}{2n} \pi = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{2n-m}{n} \cdot \frac{2n+m}{3n} \cdot \frac{4n-m}{3n} \cdot \frac{4n+m}{5n} \dots;$$

welches die Ausdrücke (6. und 4.) sind.

Aus (3. und 6.) folgen unmittelbar die Gleichungen (7.) und (8.). Da  $m$  und  $n$  gänzlich willkürlich sind, so geben diese Gleichungen unzählige Ausdrücke von  $\pi$ .

Setzt man in (7.)  $m = 1$ ,  $n = 1$ , so erhält man, weil alsdann  $\sin \frac{m}{2n} \pi = \sin \frac{1}{2}\pi = 1$  ist, wie leicht zu sehen, den Ausdruck (9.).

Setzt man in (7.)  $m = 1$ ,  $n = 2$ , so erhält man, weil alsdann  $\sin \frac{m}{2n} \pi = \sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist, den Ausdruck (10.).

# 338. 339. *Factoren-Ausdrücke f. d. gon. Linien.* 343

Setzt man in (7.)  $m=1$ ,  $n=3$ , so erhält man, weil alsdann  $\sin \frac{m}{2n} \pi = \sin \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{2}$  ist, den Ausdruck (11.) u. s. w.

Der Ausdruck (9.) von  $\pi$  heisst nach seinem Erfinder Wallis, der Wallisische.

## 338.

*Anmerkung.* I. Da  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ,  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ,

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ,  $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ , so ist es leicht, aus den Ausdrücken der Sinus und Cosinus im vorigen Lehrsatz ähnliche Ausdrücke für die übrigen goniometrischen Linien zu finden.

II. Da der Logarithme eines Products, der Summe der Logarithmen der Factoren gleich ist, so sind die Ausdrücke der goniometrischen Linien im vorigen Lehrsatz besonders bequem, die Logarithmen dieser Linien, so wie auch den Logarithmen der Zahl  $\pi$  zu finden. Man sehe deshalb die weitem Entwicklungen im eilften Capitel des ersten Buches von „Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen.“

Den natürlichen und den Briggischen Logarithmen von  $\pi$  findet man, auf diese Weise berechnet, nach Euler, weiter unten in der Zusammenstellung.

## 339.

*Lehrsatz.* Die Zahl  $\pi$ , welche den Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser 1 ausdrückt, kann weder eine ganze Zahl noch ein Bruch seyn, sondern ist nothwendig irrational.

*Beweis.* I. Es ist

$$\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \dots} \quad (337. 9.)$$

oder

$$\pi = 2 \cdot \frac{2^2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 6^2 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \dots}$$

Nun kann ein Bruch nur aufgehen, wenn sein Zähler die nemlichen Primzahlen zu Factoren hat wie der Nenner (Rechenkunst §. 141). Der Bruch für  $\pi$  aber hat, so weit man denselben auch nehmen mag, im Nenner offenbar gröfsere Primzahlen zu Factoren als im Zähler. Also kann  $\pi$  keine ganze Zahl seyn.

II. Gesetzt,  $\pi$  könne ein Bruch  $\frac{m}{n}$  seyn, so multiplicire man denselben mit  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$ , welches

$$m = 2 \cdot \frac{2^2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \dots 2^2 \cdot n^2 \cdot 2^2 \cdot (n+1)^2 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \dots 2n \cdot 2n+1 \cdot 2n+1 \cdot 2n+3 \dots}$$

gibt. Auch dieser Bruch kann nicht aufgehen, weil der Nenner offenbar gröfsere Primzahlen zu Factoren hat, als der Zähler. Also kann  $m$  keine ganze Zahl und folglich  $\pi$  auch kein Bruch  $\frac{m}{n}$  seyn.

Mithin ist  $\pi$  nothwendig irrational.

## 340.

*Anmerkung.* Es giebt noch mehrere Beweise von Lambert, Legendre und Anderen, daß  $\pi$ , und selbst das Quadrat von  $\pi$  nothwendig irrational ist. Daraus folgt, daß die sogenannte Quadratur des Kreises, das heist die Aufgabe: eine Zahl oder einen Bruch zu finden, der den Umfang eines Kreises ausdrückt, dessen Halbmesser irgend eine gegebene Zahl ist, vergeblich gesucht wird. Bekanntlich hat man sich um diese Aufgabe vielfältig bemüht, allein ohne Erfolg, weil eine irrationale Zahl nicht rational gemacht werden kann. Auch hat die Aufgabe gar nicht einmal einen Nutzen, weil man  $\pi$  wirklich mit leichter Mühe, so genau als man nur immer will, finden kann, und also nicht abzusehen ist, was gewonnen wäre, wenn es für  $\pi$  wirklich einen Bruch gäbe, der diese Zahl genau ausdrückte. Denn in jedem Falle würden Zähler und Nenner dieses Bruches größer seyn, als Zähler und Nenner aller der Brüche, die sich für  $\pi$  durch Kettenbrüche finden lassen, und die dieser Zahl näher kommen als alle andere Brüche in kleineren Zahlen. (Weiter unten, in der Zusammenstellung (§. 345.) stehen einige dieser Brüche). Der Bruch für  $\pi$  würde also in jedem Falle so ungeheuer große Zahlen haben, daß er dennoch keinen Nutzen hätte. Es ist übrigens wohl nur zufällig, daß dergleichen Bemühungen grade auf den Kreis gefallen sind. Wahrscheinlich deshalb, weil der Gegenstand so sehr sinnlich ist, daß Jeder, der auch die Mathematik nicht kennt, sich dennoch wenigstens eine ungefähre Vorstellung davon machen kann. Es giebt außerdem noch viel einfachere Aufgaben der Art, um die man sich ebenfalls vergeblich bemühen würde, z. B. eine Zahl oder einen Bruch zu finden, der die Diagonal eines Quadrats ausdrückt, dessen Seite eine gegebene ganze Zahl ist. Solcher Aufgaben sind so viele als irrationale Zahlen. Niemand aber, der von dem worauf es ankommt richtige Begriffe hat, wird an solchen Dingen Zeit und Mühe verschwenden.

## 341.

*Lehrsatz.* Wenn  $x$  einen beliebigen Bogen und  $n$  eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$1. \sin x = 2^{n-1} \sin \frac{x}{n} \cdot \sin \frac{\pi+x}{n} \cdot \sin \frac{2\pi+x}{n} \cdot \sin \frac{3\pi+x}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi+x}{n}.$$

$$2. \sin x = 2^{n-1} \sin \frac{\pi-x}{n} \cdot \sin \frac{2\pi-x}{n} \cdot \sin \frac{3\pi-x}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi-x}{n}.$$

$$3. 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n} \cdot \sin \frac{5\pi}{2n} \dots \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n} = 1.$$

$$4. 2^n \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4n} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{4n} \cdot \sin^2 \frac{5\pi}{4n} \dots \sin^2 \frac{(2n-1)\pi}{4n} = 1,$$

$$5. 2^n \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{4n} \cdot \sin^2 \frac{5\pi}{4n} \cdot \sin^2 \frac{7\pi}{4n} \dots \sin^2 \frac{(2n-1)\pi}{4n} = 1,$$

$$6. 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{6n} \cdot \sin \frac{7\pi}{6n} \cdot \sin \frac{13\pi}{6n} \dots \sin \frac{(6n-1)\pi}{6n} = 1.$$

$$7. 2^n \cdot \sin \frac{5\pi}{6n} \cdot \sin \frac{11\pi}{6n} \cdot \sin \frac{17\pi}{6n} \dots \sin \frac{(6n-1)\pi}{6n} = 1.$$

$$8. \sin x = 2^n \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \cos \frac{x}{16} \dots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n}.$$

$$9. \sin x = x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \cos \frac{x}{16} \dots \cos 0.$$

$$10. \frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 4x \dots$$

*Beweis.* I. Man setze in (§. 535.)  $a = 1$ , so erhält man

$$2 - 2 \cos x$$

$$= \left(4 - 4 \cos^2 \frac{x}{2n}\right) \left(4 - 4 \cos^2 \left(\frac{2\pi + x}{2n}\right)\right) \dots \left(4 - 4 \cos^2 \left(\frac{2(n-1)\pi + x}{2n}\right)\right),$$

oder weil rechterhand  $n$  Factoren vorhanden sind,

$$2(1 - \cos x)$$

$$= 2^{2n} \left(1 - \cos^2 \left(\frac{x}{2n}\right)\right) \left(1 - \cos^2 \left(\frac{2\pi + x}{2n}\right)\right) \dots \left(1 - \cos^2 \left(\frac{2(n-1)\pi + x}{2n}\right)\right),$$

oder weil  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$  (§. 318. 2.) und

$$1 - \cos^2 \left(\frac{x}{2n}\right) = \sin^2 \left(\frac{x}{2n}\right) \text{ etc. ist,}$$

$$\sin \frac{x}{2}$$

$$= 2^{2n-2} \sin^2 \left(\frac{x}{2n}\right) \cdot \sin^2 \left(\frac{2\pi + x}{2n}\right) \cdot \sin^2 \left(\frac{4\pi + x}{2n}\right) \dots \sin^2 \left(\frac{2(n-1)\pi + x}{2n}\right),$$

und wenn man auf beiden Seiten die zweite Wurzel auszieht und  $2x$  statt  $x$  schreibt,

$$\sin x = 2^{n-1} \cdot \sin \frac{x}{n} \cdot \sin \frac{\pi + x}{n} \cdot \sin \frac{2\pi + x}{n} \cdot \sin \frac{3\pi + x}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi + x}{n};$$

wie im Lehrsatz (1.).

II. Da für ein beliebiges  $m$

$$11. \sin \frac{(n-m)\pi + x}{n} = \sin \left(\pi + \frac{x - m\pi}{n}\right) = -\sin \frac{x - m\pi}{n} = \sin \frac{m\pi - x}{n},$$

$$\text{also } \sin \frac{(n-1)\pi + x}{n} = \sin \frac{\pi - x}{n}, \sin \frac{(n-2)\pi + x}{n} = \sin \frac{2\pi - x}{n}$$

ist etc., und der Ausdruck (1.), wenn man die Factoren in umgekehrter Ordnung nimmt, wie folgt sich schreiben läßt:

$$\sin x = 2^{n-1} \sin \frac{(n-1)\pi + x}{n} \cdot \sin \frac{(n-2)\pi + x}{n} \cdot \sin \frac{(n-3)\pi + x}{n} \dots \sin \frac{x}{n},$$

so ist auch

$$12. \sin x = 2^{n-1} \sin \frac{\pi - x}{n} \cdot \sin \frac{2\pi - x}{n} \cdot \sin \frac{3\pi - x}{n} \dots \sin \frac{n\pi - x}{n};$$

wie im Lehrsatz (2.).

III. Für  $x = \frac{1}{2}\pi$  giebt die Gleichung (1.), weil dann  $\sin x = 1$  ist,

$$13. 1 = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \sin \frac{5\pi}{2n} \dots \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n};$$

wie (3.).

IV. Für  $x = \frac{1}{4}\pi$  giebt die Gleichung (1.), weil dann  $\sin x = \sqrt{\frac{1}{2}}$  ist,

$$14. \sqrt{\frac{1}{2}} = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{4n} \sin \frac{5\pi}{4n} \sin \frac{9\pi}{4n} \sin \frac{13\pi}{4n} \dots \sin \frac{(4n-3)\pi}{4n},$$

und die Gleichung (2.)

$$15. \sqrt{\frac{1}{2}} = 2^{n-1} \sin \frac{3\pi}{4n} \sin \frac{7\pi}{4n} \sin \frac{11\pi}{4n} \sin \frac{15\pi}{4n} \dots \sin \frac{(4n-5)\pi}{4n}.$$

Multiplirt man alles mit sich selbst und noch mit 2, so erhält man die Gleichungen (4. und 5.).

V. Für  $x = \frac{1}{2}\pi$  giebt die Gleichung (1.), weil dann  $\sin x = \frac{1}{2}$  ist,

$$16. \quad \frac{1}{2} = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{6n} \sin \frac{7\pi}{6n} \sin \frac{13\pi}{6n} \dots \sin \frac{(6n-5)\pi}{6n},$$

und die Gleichung (2.)

$$17. \quad \frac{1}{2} = 2^{n-1} \sin \frac{5\pi}{6n} \sin \frac{11\pi}{6n} \sin \frac{17\pi}{6n} \dots \sin \frac{(6n-1)\pi}{6n}.$$

Multiplirt man mit 2, so erhält man die Gleichungen (6. u. 7.).

VI. Es ist

$$18. \quad \begin{cases} \sin x = 2 \cos \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}x & (\S. 318. 1.) \text{ und eben so} \\ \sin \frac{1}{2}x = 2 \cos \frac{1}{4}x \sin \frac{1}{4}x, \\ \sin \frac{1}{4}x = 2 \cos \frac{1}{8}x \sin \frac{1}{8}x, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sin x &= 2^2 \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \sin \frac{1}{4}x, \\ \sin x &= 2^3 \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \sin \frac{1}{8}x, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

also überhaupt  $\sin x = 2^n \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \dots \cos \frac{1}{2^n}x \sin \frac{1}{2^n}x$ ; wie (8.).

VII. Es ist  $\sin x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots$  (§. 328.). Also ist

$$19. \quad \sin \frac{1}{2^n}x = \frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{2^{3n} \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^{5n} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots,$$

folglich in (8.)

$$\sin x = 2^n \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \dots \cos \frac{1}{2^n}x \left( \frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{2^{3n} \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^{5n} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots \right),$$

oder

$$20. \quad \sin x = \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \dots \cos \frac{1}{2^n}x \left( x - \frac{x^3}{2^{2n} \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2^{4n} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots \right).$$

Setzt man nun  $n$  unendlich groß, so ist  $\frac{1}{2^n} = 0$ , also alsdann

$$\sin x = x \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \dots \cos 0;$$

wie (9.).

VIII. Es ist

$$\begin{aligned} 21. \quad e^{(1+x)} &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \\ 21. \quad e^{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} \dots \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 21. \\ 21. \end{aligned}} \right\} \text{(Rechenkunst §. 229.)}$$

Daraus folgt  $e^{(1+x)} = e^{(1+x)}$  oder,

$$e^{\left(\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}\right)} \text{ oder } e^{\left(\frac{x(1+x)}{1+x}\right)} \text{ oder,}$$

$$23. \quad e^x = x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{3} \left( x^3 - \frac{1}{x^3} \right) - \frac{1}{4} \left( x^4 - \frac{1}{x^4} \right) \dots$$

### 342.343. Factoren-Ausdrücke f. d. gon. Linien. 347

Nun sey  $x = e^{iz}$ , so ist  $\frac{1}{x} = \frac{1}{e^{iz}} = e^{-iz}$ , also  $x - \frac{1}{x} = e^{iz} - e^{-iz}$ . Desgleichen ist  $ix = iz$ . Also ist in (23.)

$$iz = e^{iz} - e^{-iz} = \frac{1}{2}(e^{2iz} - e^{-2iz}) + \frac{1}{2}(e^{4iz} - e^{-4iz}) \dots\dots,$$

oder

$$24. \quad \frac{1}{2}z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{e^{4iz} - e^{-4iz}}{2i} \right) \dots\dots$$

Nun ist aber  $\frac{e^{nix} - e^{-nix}}{2i} = \sin nx$ . Also ist

$$\frac{1}{2}z = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 3x - \frac{1}{8}\sin 4x \dots\dots,$$

welches, wenn man  $x$  statt  $z$  schreibt, die Gleichung (10) giebt.

### 342.

*Anmerkung.* Den Sätzen (§. 341.) kann man auch leicht eine geometrische Bedeutung geben.

Es sey z. B. der beliebige Bogen  $AB$ , (Fig. 169.) gleich  $x$  und der nte, z. B. der fünfte Theil davon,  $AB_1$ . Ferner sey  $AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_4 = D_4D_5$  der fünfte Theil des halben Umfanges, und der zu  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$  und  $\frac{4}{5}$  des halben Umfanges hinzugefügte Bogen  $D_1E_1 = D_2E_2 = D_3E_3 = D_4E_4$  sey gleich  $AB_1 = \frac{1}{5}x$ , so ist

$$\text{die Sehne } B_1B_0 = 2 \sin \frac{x}{5},$$

$$\text{die Sehne } E_1F_1 = 2 \sin \frac{\pi + x}{5},$$

$$\text{die Sehne } E_2F_2 = 2 \sin \frac{2\pi + x}{5},$$

$$\text{die Sehne } E_3F_3 = 2 \sin \frac{3\pi + x}{5},$$

$$\text{die Sehne } E_4F_4 = 2 \sin \frac{4\pi + x}{5},$$

$$\text{die Sehne } B_5P = 2 \sin x.$$

Nun ist nach (§. 341.)

$$2^5 \sin \frac{x}{5} \sin \frac{\pi + x}{5} \sin \frac{2\pi + x}{5} \sin \frac{3\pi + x}{5} \sin \frac{4\pi + x}{5} = 2^5 \sin x.$$

Also ist das Product der Sehnen  $B_1B_0$ ,  $E_1F_1$ ,  $E_2F_2$ ,  $E_3F_3$  und  $E_4F_4$  der Sehne  $B_5P$  gleich.

Ähnliche Sätze lassen sich aus den übrigen Sätzen (§. 341.) abnehmen.

### 343.

*Lehrsatz.* Wenn  $x$  einen beliebigen Bogen, und  $n$  und  $m$  beliebige positive ganze Zahlen bezeichnen, so ist

$$1. \quad (2 \cos x)^m = \cos mx + m \cos (m-2)x + \frac{m(m-1)}{2} \cos (m-4)x \dots$$

$$2. \quad (2 \sin x)^m = \cos mx - m \cos (m-2)x + \frac{m(m-1)}{2} \cos (m-4)x - \dots$$

für  $m = 4n$ .

$$3. (2 \sin x)^m = -(\cos mx - m \cos(m-2)x + \frac{m \cdot m-1}{2} \cos(m-4)x - \dots)$$

für  $m = 4n + 2$ .

$$4. (2 \sin x)^m = \sin mx - m \sin(m-2)x + \frac{m \cdot m-1}{2} \sin(m-4)x - \dots$$

für  $m = 4n + 1$ .

$$5. (2 \sin x)^m = -(\sin mx - m \sin(m-2)x + \frac{m \cdot m-1}{2} \sin(m-4)x - \dots)$$

für  $m = 4n + 3$ .

$$6. \cos mx = \cos x^m - \frac{m \cdot m-1}{2} \cos x^{m-2} \sin x^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cos x^{m-4} \sin x^4 \dots$$

$$7. \sin mx = m \cos x^{m-1} \sin x - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3} \cos x^{m-3} \sin x^3 + \dots$$

Der Beweis liegt in der Entwicklung dieser Ausdrücke (Rechenkunst §. 263.).

## 344.

*Anmerkung.* Setzt man in die Ausdrücke (6. und 7.) (§. 343.) der Reihe nach  $m = 2, 3, 4, 5$  etc., so erhält man:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos x^2 - \sin x^2 \\ \cos 3x &= \cos x^3 - 3 \cos x \sin x^2, \\ \cos 4x &= \cos x^4 - 6 \cos x^2 \sin x^2 + \sin x^4, \\ \cos 5x &= \cos x^5 - 10 \cos x^3 \sin x^2 + 5 \cos x \sin x^4, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \cos x \sin x \\ \sin 3x &= 3 \cos x^2 \sin x - \sin x^3 \\ \sin 4x &= 4 \cos x^3 \sin x - 4 \cos x \sin x^3 \\ \sin 5x &= 5 \cos x^4 \sin x - 10 \cos x^2 \sin x^3 + \sin x^5, \\ &\dots \end{aligned}$$

Setzt man in die Ausdrücke der Cosinus vielfacher Bogen,  $1 - \cos x^2$  statt  $\sin x^2$ , und in die Ausdrücke der Sinus ungrader Vielfachen von  $x$ ,  $1 - \sin x^2$  statt  $\cos x^2$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos x^2 - 1, \\ \cos 3x &= 4 \cos x^3 - 3 \cos x, \\ \cos 4x &= 8 \cos x^4 - 8 \cos x^2 + 1, \\ \cos 5x &= 16 \cos x^5 - 20 \cos x^3 + 5 \cos x, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin x^3, \\ \sin 5x &= 5 \sin x - 20 \sin x^3 + 16 \sin x^5, \\ &\dots \end{aligned}$$

Setzt man der Reihe nach  $2x = \frac{1}{2}\pi$ ,  $3x = \frac{1}{2}\pi$ ,  $4x = \frac{1}{2}\pi$ ,  $5x = \frac{1}{2}\pi$  und der Kürze wegen  $\cos x = q$ , so erhält man, weil  $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$  ist, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2q^2 - 1 &= 0, \\ 3q^3 - 3q &= 0, \\ 8q^4 - 8q^2 + 1 &= 0, \\ 16q^5 - 20q^3 + 5q &= 0; \end{aligned}$$

woraus der Reihe nach

# 345. Factoren-Ausdrücke für d. gon. Linien. 349

$$q = \cos \frac{1}{4} \pi = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{also} \quad \sin \frac{1}{4} \pi = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$q = \cos \frac{3}{4} \pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad - \quad \sin \frac{3}{4} \pi = \frac{1}{2},$$

$$q = \cos \frac{5}{8} \pi = \frac{1 + \sqrt{1/2}}{2} \quad - \quad \sin \frac{5}{8} \pi = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{1/2}\right)},$$

$$q = \cos \frac{7}{8} \pi = \frac{1}{2} \sqrt{(10 \pm 2\sqrt{5})} \quad - \quad \sin \frac{7}{8} \pi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 \mp \sqrt{5}}{2}} = \pm \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5})$$

etc. folgt.

Setzt man  $5x = \pi$ ,  $5x = \pi \dots$  und  $\sin x = p$ , so erhält man, weil  $\sin \pi = 0$  ist,

$$8p - 4p^3 = 0,$$

$$5p - 20p^3 + 16p^5 = 0;$$

woraus

$$p = \sin \frac{1}{5} \pi = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \text{also} \quad \cos \frac{1}{5} \pi = \frac{1}{2};$$

$$p = \sin \frac{7}{5} \pi = \frac{1}{2} \sqrt{(10 \pm 2\sqrt{5})} \quad - \quad \cos \frac{7}{5} \pi = \pm \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5})$$

folgt.

Diese Werthe von  $\sin \frac{1}{5} \pi$  und  $\sin \frac{7}{5} \pi = \sin \frac{2}{5} \pi$  oder von  $\sin (n + \frac{1}{5}) \pi$  und  $\sin (n + \frac{7}{5}) \pi$  stimmen mit denen in (§. 524.) überein, und aus

$$\sin \frac{3}{5} \pi = \sin \frac{1}{5} \pi \cos \frac{2}{5} \pi + \sin \frac{2}{5} \pi \cos \frac{1}{5} \pi,$$

$$\cos \frac{3}{5} \pi = \cos \frac{1}{5} \pi \cos \frac{2}{5} \pi - \sin \frac{1}{5} \pi \sin \frac{2}{5} \pi \quad \text{und}$$

$$\sin \frac{6}{5} \pi = 2 \sin \frac{3}{5} \pi \cos \frac{3}{5} \pi$$

findet man auch den dortigen Werth von  $\sin (n + \frac{3}{5}) \pi$  und  $\sin (n + \frac{6}{5}) \pi$ ; desgleichen durch eine leichte Rechnung, was der Satz von dem Unterschiede der Quadrate dieser Sinus aussagt, so daß der Satz (§. 521.) auch ohne Figur aus allgemeinen Ausdrücken durch Rechnung gefunden werden kann, wie wie in (§. 330.) bemerkt.

## 345.

*Anmerkung.* Es giebt noch eine große Menge anderer Ausdrücke für die Abhängigkeit der goniometrischen Linien von einander und von ihren Bogen. Die obigen kommen aber am häufigsten vor.

Wegen des öfteren Gebrauchs dieser Sätze, wollen wir sie in folgender Tafel zusammenstellen.



In allen folgenden Ausdrücken bedeuten die Buchstaben  $x, y, a, \beta, \gamma, \dots, v$ , wo keine Einschränkungen besonders bemerkt sind, beliebige positive oder negative Kreisbogen, für den Halbmesser 1, so groß oder so klein als man will.

$\pi$  ist der halbe Umfang und  $a$  ist eine beliebige Linie.

$m$  und  $n$  sind beliebige positive ganze Zahlen.

$$1. \sin n\pi = 0, \sin (2n + \frac{1}{2})\pi = +1, \sin (2n - \frac{1}{2})\pi = -1.$$

$$2. \cos 2n\pi = +1, \cos (2n + 1)\pi = -1, \cos (2n - 1)\pi = +1.$$

$$3. \tan n\pi = 0, \tan (2n + \frac{1}{2})\pi = \infty.$$

$$4. \cot n\pi = \infty, \cot (2n + \frac{1}{2})\pi = 0.$$

$$5. \sec 2n\pi = +1, \sec (2n + 1)\pi = -1, \sec (2n - 1)\pi = +1.$$

$$6. \operatorname{cosec} n\pi = 0, \operatorname{cosec} (2n + \frac{1}{2})\pi = +1, \operatorname{cosec} (2n - \frac{1}{2})\pi = -1.$$

(No. 1. bis 6. aus §. 312. 7.)

$$7. \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$8. \sec^2 x - \tan^2 x = 1.$$

$$9. \operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1.$$

(No 7. bis 9. aus §. 314. 1—3.)

$$10. \sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1}{\sec x \cot x} = \cos x \tan x \\ = \frac{\tan x}{\sec x} = \frac{\cos x}{\cot x}.$$

$$11. \cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\tan x \operatorname{cosec} x} = \sin x \cot x \\ = \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x}.$$

$$12. \tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{\cos x \operatorname{cosec} x} = \sin x \sec x \\ = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sec x}{\operatorname{cosec} x}.$$

$$13. \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin x \cot x} = \tan x \operatorname{cosec} x \\ = \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\operatorname{cosec} x}{\cot x}.$$

$$14. \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sin x \sec x} = \cos x \operatorname{cosec} x$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\operatorname{cosec} x}{\sec x}.$$

$$15. \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x \tan x} = \cot x \sec x$$

$$= \frac{\sec x}{\tan x} = \frac{\cot x}{\cos x}.$$

(No. 10. bis 15. aus §. 315. 1. bis 6.)

$$16. \sin -x = -\sin x.$$

$$17. \cos -x = +\cos x.$$

$$18. \tan -x = -\tan x.$$

$$19. \cot -x = -\cot x.$$

$$20. \sec -x = +\sec x.$$

$$21. \operatorname{cosec} -x = -\operatorname{cosec} x.$$

(No. 16. bis 21. aus §. 316. 7. bis 12.)

$$22. \sin (x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y = \frac{\tan x \pm \tan y}{\sec x \sec y}.$$

$$23. \cos (x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}.$$

$$24. \tan (x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \pm \tan x \tan y} = \frac{\cot y \pm \cot x}{\cot x \cos y \mp 1}.$$

$$25. \sec (x \pm y) = \frac{\sec x \sec y}{1 \pm \tan x \tan y} = \frac{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}{\cot x \cot y \mp 1}.$$

$$26. \cot (x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x} = \frac{1 \mp \tan x \tan y}{\tan x \pm \tan y}.$$

$$27. \operatorname{cosec} (x \pm y) = \frac{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}{\cot y \pm \cot x} = \frac{\sec x \sec y}{\tan x \pm \tan y}.$$

(No. 22. bis 27. aus §. 316. 1. bis 6.  $x$  und  $y$  sind gegen dort verwechselt.)

$$28. \begin{cases} \sin (2n\pi \pm x) = \pm \sin x, \\ \sin ((2n+1)\pi \pm x) = \mp \sin x, \\ \sin ((2n \pm \frac{1}{2})\pi \pm x) = \pm \cos x, \\ \sin ((2n \pm \frac{1}{2})\pi - x) = \mp \cos x. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} \cos (2n\pi \pm x) = \pm \cos x, \\ \cos ((2n+1)\pi \pm x) = \mp \cos x, \\ \cos ((2n \pm \frac{1}{2})\pi \pm x) = \mp \sin x, \\ \cos ((2n \pm \frac{1}{2})\pi - x) = \pm \sin x. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} \operatorname{tang} (2n\pi \pm x) = \pm \operatorname{tang} x, \\ \operatorname{tang} ((2n+1)\pi \pm x) = \pm \operatorname{tang} x, \\ \operatorname{tang} ((2n+\frac{1}{2})\pi \pm x) = -\cot x, \\ \operatorname{tang} ((2n+\frac{1}{2})\pi - x) = \pm \cot x. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} \sec (2n\pi \pm x) = \pm \sec x, \\ \sec ((2n+1)\pi \pm x) = -\sec x, \\ \sec ((2n+\frac{1}{2})\pi \pm x) = \pm \operatorname{cosec} x, \\ \sec ((2n+\frac{1}{2})\pi - x) = \pm \operatorname{cosec} x. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} \cot (2n\pi \pm x) = \pm \cot x, \\ \cot ((2n+1)\pi \pm x) = \pm \cot x, \\ \cot ((2n+\frac{1}{2})\pi \pm x) = -\operatorname{tang} x, \\ \cot ((2n+\frac{1}{2})\pi - x) = \pm \operatorname{tang} x. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} \operatorname{cosec} (2n\pi \pm x) = \pm \operatorname{cosec} x, \\ \operatorname{cosec} ((2n+1)\pi \pm x) = \pm \operatorname{cosec} x, \\ \operatorname{cosec} ((2n+\frac{1}{2})\pi \pm x) = \pm \sec x, \\ \operatorname{cosec} ((2n+\frac{1}{2})\pi - x) = \pm \sec x. \end{cases}$$

No. 26. bis 33. aus §. 317. 1. bis 6.)

$$34. \sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \operatorname{tang} x}{\sec x^2}.$$

$$35. \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \\ = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{\cot^2 x - 1}{\operatorname{cosec} x^2}.$$

$$36. \operatorname{tang} 2x = \frac{2 \operatorname{tang} x}{1 - \operatorname{tang} x^2} = \frac{2 \cot x}{\cot^2 x - 1}.$$

$$37. \sec 2x = \frac{\sec x^2}{1 - \operatorname{tang} x^2} = \frac{\operatorname{cosec} x^2}{\cot^2 x - 1}.$$

$$38. \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x} = \frac{1 - \operatorname{tang} x^2}{2 \operatorname{tang} x}.$$

$$39. \operatorname{cosec} 2x = \frac{\operatorname{cosec} x^2}{2 \cot x} = \frac{\sec x^2}{2 \operatorname{tang} x}.$$

(No. 34. bis 39. aus §. 318. 1. bis 6.)

$$40. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = + \sqrt{\frac{2 \sec x}{\sec x - 1}} = + \frac{\sqrt{2(1 + \cos x)}}{\sin x} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $4n\pi$  und  $(4n+2)\pi$  und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n-2)\pi$  und  $(4n-4\pi)$ .

$$41. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = -\sqrt{\frac{2 \sec x}{\sec x - 1}} = -\frac{\sqrt{2(1+\cos x)}}{\sin x} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n+2)\pi$  und  $(4n+4)\pi$ , und für negative  $x$  zwischen  $4n\pi$  und  $(4n-2)\pi$ .

$$42. \begin{cases} \cos \frac{1}{2}x = +\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \\ \sec \frac{1}{2}x = +\sqrt{\frac{2 \sec x}{\sec x + 1}} = +\frac{\sqrt{2(1-\cos x)}}{\sin x} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n+3)\pi$  und  $(4n+5)\pi$ , und für negative  $x$  zwischen  $(4n-3)\pi$  und  $(4n-5)\pi$ .

$$43. \begin{cases} \cos \frac{1}{2}x = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \\ \sec \frac{1}{2}x = -\sqrt{\frac{2 \sec x}{\sec x + 1}} = -\frac{\sqrt{2(1-\cos x)}}{\sin x} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n+1)\pi$  und  $(4n+3)\pi$ , und für negative  $x$  zwischen  $(4n-1)\pi$  und  $(4n-3)\pi$ .

$$44. \sin \frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{2 \cos \frac{1}{2}x}; \quad \cos \frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{1}{2}x}.$$

$$45. \tan \frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x};$$

$$\cot \frac{1}{2}x = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos x}.$$

$$46. \cot \frac{1}{2}x + \tan \frac{1}{2}x = 2 \operatorname{cosec} x; \quad \cot \frac{1}{2}x - \tan \frac{1}{2}x = 2 \cot x.$$

$$47. \frac{\cot \frac{1}{2}x - \tan \frac{1}{2}x}{\cot \frac{1}{2}x + \tan \frac{1}{2}x} = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}x} = \cos x.$$

$$48. \frac{1}{\cot \frac{1}{2}x - \cot x} = \frac{1}{\tan \frac{1}{2}x + \cot x} = \sin x.$$

$$49. \frac{1}{\tan x \tan \frac{1}{2}x + 1} = \frac{1}{\tan x \cot \frac{1}{2}x - 1} = \cos x.$$

$$50. \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x^2 - \sec \frac{1}{2}x^2 = \cot \frac{1}{2}x^2 - \tan \frac{1}{2}x^2 = 4 \cot x \operatorname{cosec} x.$$

$$51. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \cos \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \sec \frac{1}{2}x = \frac{+ \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \frac{+ \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{3}{2})\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{3}{2})\pi$ .

$$52. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \cos \frac{1}{2}x = + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \sec \frac{1}{2}x = \frac{+ \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \frac{+ \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{5}{2})\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{5}{2})\pi$ .

$$53. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \cos \frac{1}{2}x = - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \sec \frac{1}{2}x = \frac{- \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \frac{- \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{3}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{7}{2})\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - \frac{3}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{7}{2})\pi$ .

$$54. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \cos \frac{1}{2}x = - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin x} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x} \\ \sec \frac{1}{2}x = \frac{- \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x = \frac{- \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{5}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{9}{2})\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - \frac{5}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{9}{2})\pi$ .

$$55. \begin{cases} \tan \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} \\ \cot \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{5}{2})\pi$  und  
zwischen  $(4n + \frac{7}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{9}{2})\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{5}{2})\pi$  und  
zwischen  $(4n - \frac{7}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{9}{2})\pi$ .

$$56. \begin{cases} \tan \frac{1}{2} x = \frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}} \\ \cot \frac{1}{2} x = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} \end{cases}$$

für positive  $x$  zwischen  $(4n + \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{3}{2})\pi$  und  
zwischen  $(4n + \frac{5}{2})\pi$  und  $(4n + \frac{7}{2})\pi$ , und  
für negative  $x$  zwischen  $(4n - \frac{1}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{3}{2})\pi$  und  
zwischen  $(4n - \frac{5}{2})\pi$  und  $(4n - \frac{7}{2})\pi$ .

(No. 40. bis 56. aus §. 319. 1. bis 17.)

$$\begin{aligned} 57. \sin(2n + \frac{1}{6})\pi &= +\frac{1}{2}, \quad \sin(2n + 1 + \frac{1}{6})\pi = +\frac{1}{2}. \\ 58. \cos(2n + \frac{1}{3})\pi &= +\frac{1}{2}, \quad \cos(2n + 1 + \frac{1}{3})\pi = +\frac{1}{2}. \\ 59. \tan(2n + \frac{1}{4})\pi &= +1, \quad \tan(2n + 1 + \frac{1}{4})\pi = +1. \\ 60. \cot(2n + \frac{1}{4})\pi &= +1, \quad \cot(2n + 1 + \frac{1}{4})\pi = +1. \\ 61. \sin(2n + \frac{1}{4})\pi &= +\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \sin(2n + 1 + \frac{1}{4})\pi = +\sqrt{\frac{1}{2}}. \\ 62. \cos(2n + \frac{1}{4})\pi &= +\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \cos(2n + 1 + \frac{1}{4})\pi = -\sqrt{\frac{1}{2}}. \\ 63. \sin(n + \frac{1}{10})\pi &= +\frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}), \\ \sin(n + \frac{3}{10})\pi &= +\frac{1}{4}(+1 + \sqrt{5}). \\ 64. \sin 2(n + \frac{1}{10})\pi &= +\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \\ \sin 2(n + \frac{3}{10})\pi &= +\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

(No. 57. bis 64. aus §. 320. 1. bis 6. und §. 321. 3.)

$$\begin{aligned} 65. \sin(x+y) + \sin(x-y) &= +2 \sin x \cos y. \\ 66. \sin(x+y) - \sin(x-y) &= +2 \cos x \sin y. \\ 67. \cos(x+y) + \cos(x-y) &= +2 \cos x \cos y. \\ 68. \cos(x+y) - \cos(x-y) &= -2 \sin x \sin y. \end{aligned}$$

(No. 65. bis 68. aus §. 323. 1. bis 4.)

$$\begin{aligned} 69. \sin(x+y) \cos(x-y) &= \sin x \cos x + \sin y \cos y. \\ 70. \cos(x+y) \sin(x-y) &= \sin x \cos x - \sin y \cos y. \\ 71. \sin(x+y) \sin(x-y) &= \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x. \\ 72. \cos(x+y) \cos(x-y) &= \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x. \end{aligned}$$

(No. 69. bis 72. aus §. 323. 5. 6. 9. 10.)

$$\begin{aligned} 73. \sin x + \sin y &= +2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y). \\ 74. \sin x - \sin y &= +2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y). \\ 75. \cos x + \cos y &= +2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y). \\ 76. \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y). \end{aligned}$$

(No. 73. bis 76. aus §. 323. 5. 6. 7. 8.)

$$\begin{aligned} 77. \tan x \pm \tan y &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}. \\ 78. \cot y \pm \cot x &= \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}. \end{aligned}$$

$$79. \quad \cot x \mp \tan y = \frac{\cos(x \pm y)}{\sin x \cos y}.$$

(No. 77. bis 79. aus §. 323. 11. 12. 13.)

$$80. \quad \tan x^2 - \tan y^2 = \frac{\sin(x+y) \sin(x-y)}{\cos x^2 \cos y^2}.$$

$$81. \quad \cot y^2 - \cot x^2 = \frac{\sin(x+y) \sin(x-y)}{\sin x^2 \sin y^2}.$$

$$82. \quad \cot x^2 - \tan y^2 = \frac{\cos(x+y) \cos(x-y)}{\sin x^2 \cos y^2}.$$

(No. 80. 81. 82. aus §. 323. 17. 18. 19.)

$$83. \quad \frac{\tan x \pm \tan y}{\cot x \pm \cot y} = \tan x \tan y.$$

$$84. \quad \frac{\tan x \pm \tan y}{\cot x \pm \tan y} = \tan x \tan(x \pm y).$$

$$85. \quad \frac{\cot y \pm \cot x}{\cot x \pm \tan y} = \cot y \tan(x \pm y).$$

(No. 83. 84. 85. aus §. 323. 14. 15. 16.)

$$86. \quad \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\operatorname{cosec} y + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} y - \operatorname{cosec} x} = \frac{\tan \frac{1}{2}(x+y)}{\tan \frac{1}{2}(x-y)}.$$

$$87. \quad \frac{\sin x \pm \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \frac{1}{2}(x \pm y) = \frac{1}{\cot \frac{1}{2}(x \pm y)}.$$

$$88. \quad \frac{\cos y - \cos x}{\sin x \pm \sin y} = \tan \frac{1}{2}(x \mp y) = \frac{1}{\cot \frac{1}{2}(x \mp y)}.$$

$$89. \quad \frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{\sec y - \sec x}{\sec y + \sec x} = -\tan \frac{1}{2}(x+y) \tan \frac{1}{2}(x-y).$$

(No. 86. bis 89. aus §. 323. 20. bis 23.)

$$90. \quad \frac{\sin(x+y)}{\sin x + \sin y} = \frac{\cos \frac{1}{2}(x+y)}{\cos \frac{1}{2}(x-y)}.$$

$$91. \quad \frac{\sin(x+y)}{\sin x - \sin y} = \frac{\sin \frac{1}{2}(x+y)}{\sin \frac{1}{2}(x-y)}.$$

$$92. \quad \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \frac{\cot y + \cot x}{\cot y - \cot x}.$$

$$93. \quad \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{\cot x - \tan y}{\cot x + \tan y} = \frac{\cot y - \tan x}{\cot y + \tan x}.$$

(No. 90. bis 93. aus §. 323. 24. 25. 34. 35.)

$$\begin{aligned}
94. \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) &= \frac{2 \sin x}{\cos x + \cos y} \\
95. \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) &= \frac{2 \sin y}{\cos x + \cos y} \\
96. \quad \cot \frac{1}{2}(x-y) + \cot \frac{1}{2}(x+y) &= \frac{2 \sin x}{\cos y - \cos x} \\
97. \quad \cot \frac{1}{2}(x-y) - \cot \frac{1}{2}(x+y) &= \frac{2 \sin y}{\cos y - \cos x} \\
98. \quad \cot \frac{1}{2}(x+y) - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) &= \frac{2 \cos x}{\sin x + \sin y} \\
99. \quad \cot \frac{1}{2}(x+y) + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) &= \frac{2 \cos y}{\sin x + \sin y} \\
100. \quad \cot \frac{1}{2}(x-y) - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) &= \frac{2 \cos x}{\sin x - \sin y} \\
101. \quad \cot \frac{1}{2}(x-y) + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) &= \frac{2 \cos y}{\sin x - \sin y}
\end{aligned}$$

(No. 94. bis 101. aus §. 323. 26. bis 33.)

$$102. \quad \sin \left( \frac{1}{4} \pi \pm x \right) = \cos \left( \frac{1}{4} \pi \mp x \right).$$

$$\begin{aligned}
103. \quad &\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi \pm x \right) &= \cot \left( \frac{1}{4} \pi \mp x \right) = \frac{1 \pm \sin 2x}{\cos 2x} \\ &= \frac{\cos 2x}{1 \pm \sin 2x} = \frac{1 \pm \operatorname{tang} x}{1 \mp \operatorname{tang} x} = \frac{\cos x \pm \sin x}{\cos x \mp \sin x} \\ &= \sec 2x \pm \operatorname{tang} 2x. \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$104. \quad \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) + \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi - x \right) = \cot \left( \frac{1}{4} \pi - x \right) + \cot \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) = 2 \sec 2x.$$

$$105. \quad \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) - \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi - x \right) = \cot \left( \frac{1}{4} \pi - x \right) - \cot \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) = 2 \operatorname{tang} 2x.$$

$$106. \quad \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi - x \right) = \cot \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) \cot \left( \frac{1}{4} \pi - x \right) = 1.$$

$$107. \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \cos \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) \cos \left( \frac{1}{4} \pi - x \right) &= 2 \sin \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) \sin \left( \frac{1}{4} \pi - x \right) = \cos 2x \\ &= \frac{2}{\operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) + \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi - x \right)} = \frac{2}{\cot \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) + \cot \left( \frac{1}{4} \pi - x \right)} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
108. \quad &\left\{ \begin{aligned} \frac{\operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi + x \right)^2 - 1}{\operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi + x \right)^2 + 1} &= \frac{1 - \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi - x \right)^2}{1 + \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi - x \right)^2} \\ &= \frac{\operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) - \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi - x \right)}{\operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) + \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi - x \right)} = \sin 2x. \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$109. \quad \frac{\operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) - 1}{\operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi + x \right) + 1} = \frac{1 - \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi - x \right)}{1 + \operatorname{tang} \left( \frac{1}{4} \pi - x \right)} = \operatorname{tang} x.$$

(No. 102. bis 109. aus §. 324. 1. bis 8.)



$$110. \sin\left(\frac{1}{3}\pi \pm x\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi \mp x\right).$$

$$111. \cos\left(\frac{1}{3}\pi \pm x\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi \mp x\right).$$

$$112. \sin\left(\frac{1}{3}\pi + x\right) - \sin\left(\frac{1}{3}\pi - x\right) = \cos\left(\frac{1}{6}\pi - x\right) - \cos\left(\frac{1}{6}\pi + x\right) \\ = \sin x.$$

$$113. \cos\left(\frac{1}{3}\pi + x\right) + \cos\left(\frac{1}{3}\pi - x\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi - x\right) + \sin\left(\frac{1}{6}\pi + x\right) \\ = \cos x.$$

$$114. 4 \sin\left(\frac{1}{3}\pi + x\right) \sin\left(\frac{1}{3}\pi - x\right) = 4 \cos\left(\frac{1}{6}\pi + x\right) \cos\left(\frac{1}{6}\pi - x\right) \\ = 2 \cos 2x + 1 = 4 \cos^2 x - 1.$$

$$115. 4 \cos\left(\frac{1}{3}\pi + x\right) \cos\left(\frac{1}{3}\pi - x\right) = 4 \sin\left(\frac{1}{6}\pi + x\right) \sin\left(\frac{1}{6}\pi - x\right) \\ = 2 \cos 2x - 1 = 1 - 4 \sin^2 x.$$

$$116. \tan\left(\frac{1}{3}\pi + x\right) \tan\left(\frac{1}{3}\pi - x\right) = \cot\left(\frac{1}{6}\pi + x\right) \cot\left(\frac{1}{6}\pi - x\right) \\ = \frac{2 \cos 2x + 1}{2 \cos 2x - 1}.$$

$$117. \sin\left(\frac{1}{10}\pi + x\right) - \sin\left(\frac{1}{10}\pi - x\right) \\ + \sin\left(\frac{3}{10}\pi - x\right) - \sin\left(\frac{3}{10}\pi + x\right) = \cos x,$$

$$118. \cos\left(\frac{1}{10}\pi + x\right) - \cos\left(\frac{3}{10}\pi + x\right) \\ - \cos\left(\frac{1}{10}\pi - x\right) + \cos\left(\frac{3}{10}\pi - x\right) = \sin x.$$

(No. 110. bis 118. aus §. 324. 9. bis 17.)

$$119. 4 \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = -\sin(x+y+z) \\ + \sin(x+y-z) + \sin(x-y+z) + \sin(-x+y+z).$$

$$120. \sin x + \sin y + \sin z = + \sin(x+y+z) \\ + 4 \sin \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x+z) \sin \frac{1}{2}(y+z).$$

$$121. 4 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = + \cos(x+y+z) \\ + \cos(x+y-z) + \cos(x-y+z) + \cos(-x+y+z).$$

$$122. \cos x + \cos y + \cos z = -\cos(x+y+z) \\ + 4 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+z) \cos \frac{1}{2}(y+z).$$

$$123. \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z = \tan x + \tan y + \tan z \\ - \frac{\sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z}.$$

$$124. \cot x \cot y \cot z = \cot x + \cot y + \cot z + \frac{\cos(x+y+z)}{\sin x \sin y \sin z}.$$

$$125. 4 \sin x \cos y \cos z = \sin(x+y+z) \\ + \sin(x+y-z) + \sin(x-y+z) - \sin(-x+y+z).$$

$$126. \sin x + \sin y - \sin z = 4 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+z) \cos \frac{1}{2}(y+z) \\ - \sin(x+y+z).$$

$$127. 8 \sin u \sin x \sin y \sin z = \cos(u+x+y+z) \\ - \cos(u+x+y-z) + \cos(u+x-y-z) \\ - \cos(u+x-y+z) + \cos(u-x+y-z) \\ - \cos(u-x+y+z) + \cos(-u+x+y-z) \\ - \cos(-u+x+y+z).$$

$$128. 8 \cos u \cos x \cos y \cos z = \cos(u+x+y+z) \\ + \cos(u+x+y-z) + \cos(u+x-y-z) \\ + \cos(u+x-y+z) + \cos(u-x+y-z) \\ + \cos(u-x+y+z) + \cos(-u+x+y-z) \\ + \cos(-u+x+y+z).$$

$$129. 4 \cos u \cos x \cos y \cos z + 4 \sin u \sin x \sin y \sin z \\ = \cos(u+x+y+z) + \cos(u+x-y+z) + \cos(u-x+y+z) \\ + \cos(-u+x+y+z).$$

$$130. \cos u + \cos x + \cos y + \cos z \\ = \cos \frac{u+x+y+z}{2} + \cos \frac{u+x-y-z}{2} + \cos \frac{u-x+y-z}{2} + \cos \frac{-u+x+y-z}{2} \\ - 8 \sin \frac{u+x+y-z}{4} \sin \frac{u+x-y+z}{4} \sin \frac{u-x+y+z}{4} \sin \frac{-u+x+y+z}{4} \\ = 8 \cos \frac{u+x+y-z}{4} \cos \frac{u+x-y+z}{4} \cos \frac{u-x+y+z}{4} \cos \frac{-u+x+y+z}{4} \\ - \cos \frac{u+x+y+z}{2} - \cos \frac{u+x-y-z}{2} - \cos \frac{u-x+y-z}{2} + \cos \frac{-u+x+y-z}{2}.$$

$$131. 1 - \cos x^2 - \cos y^2 - \cos z^2 + 2 \cos x \cos y \cos z \\ = + 4 \sin \frac{x+y+z}{2} \sin \frac{x+y-z}{2} \sin \frac{x-y+z}{2} \sin \frac{-x+y+z}{2}.$$

$$132. 1 - \cos x^2 - \cos y^2 - \cos z^2 - 2 \cos x \cos y \cos z \\ = - 4 \cos \frac{x+y+z}{2} \cos \frac{x+y-z}{2} \cos \frac{x-y+z}{2} \cos \frac{-x+y+z}{2}.$$

$$133. 1 - \cos x^2 - \cos y^2 + \cos z^2 - 2 \sin x \sin y \cos z \\ = - 4 \cos \frac{x+y+z}{2} \cos \frac{x+y-z}{2} \sin \frac{x-y+z}{2} \sin \frac{-x+y+z}{2}.$$

$$134. 1 - \cos x^2 - \cos y^2 + \cos z^2 + 2 \sin x \sin y \cos z \\ = + 4 \sin \frac{x+y+z}{2} \sin \frac{x+y-z}{2} \cos \frac{x-y+z}{2} \cos \frac{-x+y+z}{2}.$$

(No. 119. bis 134. aus §. 325. 1. bis 16.)

$$135. \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin \gamma \sin \delta} \dots \\ \dots + \frac{\sin(\nu-\mu)}{\sin \mu \sin \nu} + \frac{\sin(\alpha-\nu)}{\sin \nu \sin \alpha} = 0.$$

$$136. \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin(\delta-\gamma)}{\cos \gamma \cos \delta} \dots \\ \dots + \frac{\sin(\nu-\mu)}{\cos \mu \cos \nu} + \frac{\sin(\alpha-\nu)}{\cos \nu \cos \alpha} = 0.$$

$$137. \sin(\beta+\alpha) \sin(\beta-\alpha) + \sin(\gamma+\beta) \sin(\gamma-\beta) \dots \\ \dots + \sin(\nu+\mu) \sin(\nu-\mu) + \sin(\alpha+\nu) \sin(\alpha-\nu) = 0.$$

$$138. \cos(\beta+\alpha) \sin(\beta-\alpha) + \cos(\gamma+\beta) \sin(\gamma-\beta) \dots \\ \dots + \cos(\nu+\mu) \sin(\nu-\mu) + \cos(\alpha+\nu) \sin(\alpha-\nu) = 0.$$

(No. 135. bis 138. aus §. 326. 1. bis 4.)

$$139. \sin x + \sin(x+2y) + \sin(x+4y) + \dots + \sin(x+2ny) \\ = \frac{\sin(x+ny) \sin(n+1)y}{\sin y}$$

$$140. \cos x + \cos(x+2y) + \cos(x+4y) + \dots + \cos(x+2ny) \\ = \frac{\cos(x+ny) \sin(n+1)y}{\sin y}$$

(No. 139. 140. aus §. 326. 5. 6. Statt der dortigen  $\varphi$  und  $\psi$  sind hier  $x$  und  $y$  gesetzt.)

$$141. \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2}x}$$

$$142. \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2}x}$$

$$143. \operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} 2x + \operatorname{cosec} 2x \operatorname{cosec} 3x + \dots \\ + \operatorname{cosec}(n-1)x \operatorname{cosec} nx = \sin(n-1)x \operatorname{cosec} x^2 \operatorname{cosec} nx.$$

$$144. \sec x \sec 2x + \sec 2x \sec 3x + \dots + \sec(n-1)x \sec nx \\ = \sin(n-1)x \sec x \operatorname{cosec} x \sec nx.$$

No. 141. bis 144. aus §. 326. 7. bis 10. Statt  $\varphi$  ist  $x$  gesetzt.)

$$145. \cos \frac{\pi}{2n+1} + \cos \frac{3\pi}{2n+1} + \cos \frac{5\pi}{2n+1} + \cos \frac{7\pi}{2n+1} + \dots \\ + \cos \frac{(2n-3)\pi}{2n+1} + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

(No. 145. aus §. 326. 11.)

$$46. \sin x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9} - \dots \infty.$$

$$47. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6} + \frac{x^8}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8} - \dots \infty.$$

$$48. \tan x = x + \frac{2x^3}{2 \cdot 3} + \frac{16x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{272 \cdot x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \infty.$$

$$49. \cot x = \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{3^2 \cdot 5} - \frac{2x^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{x^8}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} - \frac{2x^{10}}{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \dots \right).$$

(No. 146. bis 149. aus §. 328. und 331.)

$$50. \cos x = \frac{e^{+ix} + e^{-ix}}{2}.$$

$$51. \sin x = \frac{e^{+ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

(No. 150. und 151. aus §. 329. 8. und 9.)

$$152. e^{\cos x} = - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{2x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{16x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{272x^8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \dots \infty \right).$$

$$153. e^{\sin x} = e^x - \left( \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{x^6}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{x^8}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 8} \dots \infty \right).$$

(No. 152. 153. aus §. 332.)

$$154. x = \sin x + \frac{1}{2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \sin^7 x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \sin^9 x \dots \infty.$$

$$155. \pm x = \frac{1}{2} \pi - \left( \cos x + \frac{1}{2 \cdot 3} \cos^3 x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \cos^5 x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \cos^7 x \dots \infty \right).$$

$$156. x = \tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^9 x}{9} - \dots$$

(No. 154. 155. 156. aus §. 333.)

In No. 154. 155. und 156. darf  $x$  nur im ersten positiven, oder im ersten negativen Quadranten liegen.

$$157. a^{2n} - 2a^n \cos x + 1$$

$$= \left( a^2 - 2a \cos \frac{x}{n} + 1 \right) \left( a^2 - 2a \cos \frac{2\pi + x}{n} + 1 \right)$$

$$\times \left( a^2 - 2a \cos \frac{4\pi + x}{n} + 1 \right) \left( a^2 - 2a \cos \frac{6\pi + x}{n} + 1 \right) \dots$$

$$\dots \left( a^2 - 2a \cos \frac{2(n-1)\pi + x}{n} + 1 \right).$$

$$158. a^{4n} - 2a^{2n} \cos x + 1$$

$$= \left( (a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \left( \frac{x}{2n} \right) \right) \left( (a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \left( \frac{2\pi + x}{2n} \right) \right)$$

$$\times \left( (a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \left( \frac{4\pi + x}{2n} \right) \right) \dots \left( (a^2 + 1)^2 - 4a^2 \cos^2 \left( \frac{2(n-1)\pi + x}{2n} \right) \right).$$

$$159. a^{4n+2} - 2a^{2n+1} \cos x + 1$$

$$= \left( a^2 - 2a \cos \left( \frac{x}{2n+1} \right) + 1 \right) \left( a^2 + 2a \cos \left( \frac{\pi + x}{2n+1} \right) + 1 \right)$$

$$\times \left( a^2 - 2a \cos \left( \frac{2\pi + x}{2n+1} \right) + 1 \right) \left( a^2 + 2a \cos \left( \frac{4\pi + x}{2n+1} \right) + 1 \right) \dots$$

$$\dots \left( a^2 \pm 2a \cos \left( \frac{2n\pi + x}{2n+1} \right) + 1 \right).$$

$$160. a^n - 1$$

$$= (a-1) \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{2\pi}{n} + 1} \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{4\pi}{n} + 1}$$

$$\times \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{6\pi}{n} + 1} \dots \sqrt[n]{a^2 - 2a \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + 1}.$$

$$161. a^{2n+1} + 1$$

$$= (a+1) \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) + 1\right)} \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) + 1\right)} \\ \times \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos\left(\frac{5\pi}{2n+1}\right) + 1\right)} \dots \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos\left(\frac{4n\pi}{2n+1}\right) + 1\right)} \\ \times \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos\left(\frac{2n+4}{2n+1}\pi\right) + 1\right)} \dots \sqrt{\left(a^2 - 2a \cos\left(\frac{4n+1}{2n+1}\pi\right) + 1\right)}.$$

$$162. a^{3n} + 1$$

$$= \sqrt{\left(a^3 - 2a \cos \frac{\pi}{n} + 1\right)} \sqrt{\left(a^3 - 2a \cos \frac{3\pi}{n} + 1\right)} \\ \times \sqrt{\left(a^3 - 2a \cos \frac{5\pi}{n} + 1\right)} \dots \sqrt{\left(a^3 - 2a \cos \left(\frac{4n-1}{2n}\pi + 1\right)\right)}.$$

(No. 157. bis 162. aus §. 335. 1. bis 6.)

$$163. \sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \dots \infty$$

$$164. \cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{49\pi^2}\right) \dots \infty$$

(No. 163. 164. aus §. 337. 1. 2.)

$$165. \sin \frac{m}{2n}\pi = \pi \cdot \frac{m}{2n} \cdot \frac{2n-m}{2n} \cdot \frac{2n+m}{2n} \cdot \frac{4n-m}{4n} \cdot \frac{4n+m}{4n} \cdot \frac{6n-m}{6n} \dots \infty$$

$$166. \sin \frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{n} \cdot \frac{2n-m}{n} \cdot \frac{2n+m}{5n} \cdot \frac{4n-m}{3n} \cdot \frac{4n+m}{5n} \cdot \frac{6n-m}{5n} \dots \infty$$

$$167. \cos \frac{m}{2n}\pi = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{n+m}{n} \cdot \frac{3n-m}{3n} \cdot \frac{3n+m}{3n} \cdot \frac{5n-m}{5n} \cdot \frac{5n+m}{5n} \dots \infty$$

$$168. \cos \frac{m}{2n}\pi = \pi \cdot \frac{n-m}{2n} \cdot \frac{n+m}{2n} \cdot \frac{3n-m}{2n} \cdot \frac{3n+m}{4n} \cdot \frac{5n-m}{4n} \cdot \frac{5n+m}{6n} \dots \infty$$

(No. 165. bis 168. aus §. 337. 3. bis 5.)

$$169. \sin x = 2^{n-1} \sin \frac{x}{n} \sin \frac{\pi+x}{n} \sin \frac{2\pi+x}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi+x}{n} = \sin x.$$

$$170. \sin x = 2^{n-1} \sin \frac{\pi-x}{n} \sin \frac{2\pi-x}{n} \sin \frac{3\pi-x}{n} \dots \sin \frac{(n\pi-x)}{n} = \sin x.$$

$$171. 2^{n-1} \cdot \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{5\pi}{2n} \cdot \sin \frac{9\pi}{2n} \dots \sin \frac{(2n-1)\pi}{2n} = 1.$$

$$172. 2^n \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{4n}\right) \sin^2\left(\frac{5\pi}{4n}\right) \sin^2\left(\frac{9\pi}{4n}\right) \dots \sin^2\left(\frac{(4n-3)\pi}{4n}\right) = 1.$$

$$173. 2^n \cdot \sin^2\left(\frac{3\pi}{4n}\right) \sin^2\left(\frac{7\pi}{4n}\right) \sin^2\left(\frac{11\pi}{4n}\right) \dots \sin^2\left(\frac{(4n-1)\pi}{4n}\right) = 1.$$

$$174. 2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6n}\right) \sin\left(\frac{7\pi}{6n}\right) \sin\left(\frac{13\pi}{6n}\right) \dots \sin\left(\frac{(6n-5)\pi}{6n}\right) = 1.$$

$$175. 2^n \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6n}\right) \sin\left(\frac{11\pi}{6n}\right) \sin\left(\frac{17\pi}{6n}\right) \dots \sin\left(\frac{(6n-1)\pi}{6n}\right) = 1.$$

(No. 169. bis 175. und §. 341. 1. bis 7.)

$$176. \sin x = 2^n \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \cos \frac{1}{16}x \dots \cos \frac{1}{2^n}x \cdot \sin \frac{1}{2^n}x$$

$$177. \sin x = x \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \cos \frac{1}{16}x \dots \cos 0.$$

$$178. \frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 3x - \frac{1}{64} \sin 4x \dots \infty.$$

(No. 176. bis 178. aus §. 341. 8. bis 10.)

$$179. (2\cos x)^m = +(\cos mx + m \cos(m-2)x + \frac{m \cdot m-1}{2} \cos(m-4)x \dots)$$

$$180. (2\sin x)^m = +(\cos mx - m \cos(m-2)x + \frac{m \cdot m-1}{2} \cos(m-4)x \dots)$$

für  $m = 4n$ .

$$181. (2\sin x)^m = +(\cos mx - m \cos(m-2)x + \frac{m \cdot m-1}{2} \cos(m-4)x \dots)$$

für  $m = 4n + 2$ .

$$182. (2\sin x)^m = +(\sin mx - m \sin(m-2)x + \frac{m \cdot m-1}{2} \sin(m-4)x \dots)$$

für  $m = 4n + 1$ .

$$183. (2\sin x)^m = -(\sin mx - m \sin(m-2)x + \frac{m \cdot m-1}{2} \sin(m-4)x \dots)$$

für  $m = 4n + 3$ .

$$184. \cos mx = +\cos x^m - \frac{m \cdot m-1}{2} \cos x^{m-2} \sin x^2$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cos x^{m-4} \sin x^4 \dots$$

$$185. \sin mx = m \cos x^{m-1} \sin x - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3} \cos x^{m-3} \sin x^3 + \dots$$

(No. 179. bis 185. aus §. 343. 1. bis 7.)

$$186. \begin{cases} \cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2 = 2\cos x^2 - 1 \\ \cos 3x = \cos x^3 - 3\cos x \sin x^2 = 4\cos x^3 - 3\cos x \\ \cos 4x = \cos x^4 - 6\cos x^2 \sin x^2 + \sin x^4 \\ \quad = 8\cos x^4 - 8\cos x^2 + 1. \\ \cos 5x = \cos x^5 - 10\cos x^3 \sin x^2 + 5\cos x \sin x^4 \\ \quad = 16\cos x^5 - 20\cos x^3 + 5\cos x \end{cases}$$

(Aus §. 344.)

$$187. \begin{cases} \sin 2x = 2\cos x \sin x \\ \sin 3x = 3\cos x^2 \sin x - \sin x^3 = 3\sin x - 4\sin x^3 \\ \sin 4x = 4\cos x^3 \sin x - 4\cos x \sin x^3 \\ \sin 5x = 5\cos x^4 \sin x - 10\cos x^2 \sin x^3 + \sin x^5 \\ \quad = 5\sin x - 20\sin x^3 + 16\sin x^5 \end{cases}$$

(Aus §. 344.)

$$188. \pi = \left( \sin \frac{m}{2n} \pi \right) \cdot \frac{2n}{m} \cdot \frac{2n}{2n-m} \cdot \frac{2n}{2n+m} \cdot \frac{4n}{4n-m} \cdot \frac{4n}{4n+m} \cdot \frac{6n}{6n-m} \dots$$

$$189. \pi = \left( \cos \frac{m}{2n} \pi \right) \cdot \frac{2n}{n-m} \cdot \frac{2n}{n+m} \cdot \frac{2n}{3n-m} \cdot \frac{2n}{3n+m} \cdot \frac{4n}{5n-m} \cdot \frac{6n}{5n+m} \dots$$

(No. 188. 189. aus §. 337. 7. 8.)

$$90. \pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \dots \infty}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13 \dots \infty}$$

$$91. \pi = 2 \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 20 \dots \infty}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \dots \infty} \cdot \sqrt{2},$$

$$92. \pi = 3 \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 30 \cdot 30 \dots \infty}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 29 \cdot 31 \dots \infty}$$

(No. 190. bis 192. aus §. 337. 9. bis 11.)

$$93. {}^e\pi = 1, 144729 \ 885849 \ 400174 \ 14342 \dots$$

$$94. {}^{10}\pi = 0, 497149 \ 872694 \ 133854 \ 35126 \dots$$

$$95. \pi = 3, \begin{array}{l} 141592 \ 653589 \ 793238 \ 462643 \ 383279 \\ 502884 \ 197169 \ 399375 \ 105820 \ 974944 \\ 592307 \ 816406 \ 286208 \ 998618 \ 034825 \\ 342117 \ 067982 \ 148086 \ 513282 \ 306647 \\ 095844 \ 6 + \dots \end{array}$$

$$96. \pi > \frac{3}{1}, \frac{333}{106}, \frac{103093}{33102}, \frac{208341}{66317}, \frac{833719}{265381}, \frac{4272943}{1360120},$$

$$\frac{80143857}{25510582}, \frac{245850922}{78256779}, \frac{1068866896}{340262731}, \frac{6167950454}{1963319607},$$

$$\frac{21053343141}{6701487259}, \frac{3587785776203}{1142027682070}, \frac{8958837768937}{2851718461508},$$

$$\frac{428224593349304}{6134899525417045}, \frac{136308121570117}{1952799169684491},$$

$$\frac{66627445592888887}{2646693125139304345}, \frac{21208174623389167}{842468587426513207} \text{ etc.}$$

$$97. \pi < \frac{22}{7}, \frac{555}{113}, \frac{104348}{53215}, \frac{312689}{99582}, \frac{1146408}{364913}, \frac{5419351}{1723033},$$

$$\frac{165707065}{52746197}, \frac{411557987}{131002976}, \frac{2549491779}{811528438}, \frac{14885392687}{47381676521},$$

$$\frac{1783366216531}{567663097408}, \frac{5371151992734}{1709690779488}, \frac{139755218526789}{44485467702853},$$

$$\frac{5706674932067741}{1816491048114374}, \frac{30246273035735921}{962768772685338},$$

$$\frac{430010946591069243}{136876735467187340}, \frac{3076704071730373588}{979345322893700547} \text{ etc.}$$

$$98. \pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7 \cdot 113} - \frac{1}{7 \cdot 113 \cdot 4739} + \frac{1}{7 \cdot 113 \cdot 4739 \cdot 47051}$$

$$+ \frac{1}{7 \cdot 113 \cdot 4739 \cdot 47051 \cdot 499762} \dots$$

## 346.

*Anmerkung.* Ueberall ist nach (§. 308.) der Halbmesser des Kreises, in welchem man die goniometrischen Linien nimmt, gleich 1 gesetzt worden. Will man ihm eine beliebige Gröfse, z. B.  $r$ , geben, und die goniometrischen Linien für einen solchen Halbmesser durch  $\text{Sin}$ ,  $\text{Cos}$ ,  $\text{Sec}$ ,  $\text{Tang}$ ,  $\text{Cot}$ ,  $\text{Cosec}$  bezeichnen, so ist z. B. für den Bogen  $x$

$$\begin{aligned}\text{Sin } x &= r \sin x, & \text{Cos } x &= r \cos x \\ \text{Tang } x &= r \tan x, & \text{Cot } x &= r \cot x \\ \text{Sec } x &= r \sec x, & \text{Cosec } x &= r \csc x\end{aligned}$$

und man darf also nur  $r \sin x$ ,  $r \cos x$  etc. statt  $\text{Sin } x$ ,  $\text{Cos } x$  etc. setzen, wenn man von goniometrischen Linien für den Halbmesser  $r$  zu anderen für den Halbmesser 1 übergehen will, und  $\frac{\text{Sin } x}{r}$ ,  $\frac{\text{Cos } x}{r}$  etc. statt  $\sin x$ ,  $\cos x$  etc. im umgekehrten Falle. Allein die Halbmesser anders als gleich 1 anzunehmen, ist wenigstens für den Gebrauch der goniometrischen Linien nicht nothwendig.

## Anwendung der Goniometrie auf drei- und mehrseitige Figuren, oder Trigonometrie und Polygonometrie.

## 347.

*Erläuterung.* Da die goniometrischen Linien Winkel messen (§. 307.), indem zu einer gegebenen goniometrischen Linie nur bestimmte Winkel gehören, und umgekehrt, so kann man sich der goniometrischen Linien, überall wo Winkel vorkommen, statt der Winkel selbst bedienen. Aus goniometrischen Tafeln findet man zu gegebenen Winkeln die goniometrischen Linien und ihre Logarithmen, und umgekehrt zu gegebenen goniometrischen Linien die Winkel.

Nun hängen in jeder Figur die Seiten, Diagonalen und andere bestimmte Linien, nebst den Winkeln die sie einschließen, nothwendig von einander ab. Nur die bestimmenden Stücke der Figur können sich ohne Einfluss auf einander ändern. Sind sie gegeben, so sind



es auch alle übrigen Linien und Winkel. Es müssen also auch aus gegebenen bestimmenden Stücken einer Figur die übrigen Stücke gefunden werden können.

Winkel an sich würde man aber nicht durch Linien, von welchen sie abhängen, und umgekehrt Linien durch Winkel, vermittelt Zahlen ausdrücken, und folglich nicht finden können, weil Winkel und Linien, Größen von verschiedener Art sind, und verschiedene Einheiten haben. Setzt man aber die goniometrischen Linien statt der Winkel, so sind alsdann nur Linien allein zu vergleichen; und folglich dienen die goniometrischen Linien: Winkel, Seiten und Diagonalen einer Figur, und überhaupt Linien in bestimmten Lagen aus den bestimmenden Stücken der Figur zu finden, welches ohne sie, in so fern man sich der Zahl bedienen will, nicht angehen würde. Sie sind also für die rechnende Geometrie, das heisst, überall wo es darauf ankommt, aus gegebenen Stücken einer Figur andere Stücke zu finden, wesentlich nothwendig und unentbehrlich. Zugleich sind sie, wegen der Kürze der Ausdrücke, auch zu anderen, blos calculativen Untersuchungen nützlich und bequem.

Die Anwendung der trigonometrischen Linien auf Ausrechnung beliebiger Stücke einer Figur, aus gegebenen bestimmenden Stücken derselben insbesondere, heisst, wenn die Figuren dreiseitig oder Dreiecke sind, Trigonometrie, und wenn die Figuren mehr als drei Seiten haben, Polygonometrie. Für vierseitige Figuren nennt man sie auch wohl Tetragonometrie \*).

348.

**Erläuterung.** Um aus gegebenen bestimmenden Linien und Winkeln einer Figur andere Linien und Winkel zu finden, kommt es offenbar nur darauf an, aus den geometrischen Eigenschaften der Figur Gleichungen aufzustellen, die ausser den bestimmenden Stücken die gesuchten Stücke enthalten; denn alsdann darf man nur die gesuchten Größen aus diesen Gleichungen, ohne dass weiter geometrische Hilfsmittel nöthig wären, nach den Re-

---

\*) Gewöhnlich pflegt man die Goniometrie von der Trigonometrie und Polygonometrie grade nicht abzusondern. Sie sind aber wesentlich verschieden. Die Goniometrie gehört ganz der Rechenkunst an und bedarf keiner Figur, die Trigonometrie und Polygonometrie gehört ganz der Geometrie. Die Goniometrie bedarf der Trigonometrie und Polygonometrie nicht, wohl aber bedürfen diese jener.

geln der Rechenkunst entwickeln. Dergleichen Gleichungen sollen auflösende Gleichungen heißen.

In diesen auflösenden Gleichungen können auch wieder die gesuchten Stücke zu bestimmenden und umgekehrt von letzteren diese oder jene als gesucht betrachtet werden, so daß jede Gleichung nicht bloß eine, sondern so viel Aufgaben auflöst, als auf verschiedene Weise diese oder jene darin vorkommenden Größen, bestimmende Stücke seyn können. Gesetzt z. B. man habe eine Gleichung zwischen den drei Seiten eines beliebigen Dreiecks und einem Winkel desselben, oder vielmehr irgend einer goniometrischen Linie dieses Winkels, so können von diesen vier Stücken entweder die drei Seiten, oder es können der Winkel und die beiden ihn einschließenden Seiten, oder der Winkel und die eine anliegende nebst der gegenüberliegenden Seite, in so fern diese die größte von den beiden ist, bestimmende Stücke seyn. Denn jede solche drei Stücke bestimmen das ganze Dreieck und folglich auch das vierte Stück. Die Gleichung enthält also die Auflösung von drei Aufgaben zugleich, nemlich: den einen Winkel aus den drei Seiten, die dritte Seite aus dem Winkel und den beiden ihn einschließenden Seiten und die dritte Seite aus dem Winkel und der einen anliegenden und der größern gegenüberliegenden Seite zu finden. Diese Auflösungen der Gleichung kann man machen, ohne weitere Hülfe der Geometrie.

Enthalten Gleichungen zwischen beliebigen Stücken einer Figur, wie man sie aus den geometrischen Eigenschaften der Figur aufgestellt hat, mehr Stücke als ein gesuchtes, außer den nothwendigen bestimmenden Stücken, so darf man nur zwischen ihnen so lange Stücke eliminiren, bis man Gleichungen findet, die nur ein Stück mehr enthalten, als zur Bestimmung der Figur nöthig sind. Diese letzten Gleichungen sind dann auflösende, in welchen jedes Stück das gesuchte seyn kann und aus den übrigen sich finden läßt.

Die nächste Anwendung der Goniometrie auf drei und mehrseitige Figuren, also der nächste Gegenstand der Trigonometrie und Polygonometrie, ist die Aufgabe: aus den bestimmenden Seiten und Winkeln, oder auch wohl aus den bestimmenden Seiten und Diagonalen und den Winkeln zwischen diesen Linien die übrigen Stücke der Figur zu finden. Nächst dem kommt der Inhalt der Figuren in Betracht und hierauf die Untersuchung beliebiger anderer Eigenschaften der Figuren, die sich nach Belieben vervielfältigen lassen.

---

## A. T r i g o n o m e t r i e.

---

### Rechtwinklige Dreiecke.

349.

*Erläuterung.* Das rechtwinklige Dreieck ist für trigonometrische und polygonometrische Auflösungen deshalb das einfachste und dasjenige, von welchem die Auflösung der Aufgaben von allen anderen Figuren ausgeht, weil die goniometrischen Linien selbst Seiten rechtwinkliger Dreiecke sind (§. 309.). Es kommt also zunächst auf die Auflösung der Aufgaben von rechtwinkligen Dreiecken an.

Da der rechte Winkel immer eins der bestimmenden Stücke seyn soll, indem nur von einem Dreiecke die Rede ist, dessen einer Winkel ein rechter ist, so kommen beim rechtwinkligen Dreiecke, ausser dem rechten Winkel nur noch zwei bestimmende Stücke in Betracht. Die auflösenden Gleichungen (§. 348.) dürfen den rechten Winkel gar nicht mehr enthalten, weil es nicht mehr darauf ankommt diesen Winkel zu finden, welcher vielmehr gegeben ist. Sie dürfen also überhaupt nur drei Stücke enthalten, welche folgende seyn können:

- 1) Ein spitzer Winkel und die den rechten Winkel einschliessenden Seiten (die Catheten).
- 2) Ein spitzer Winkel und die ihn einschliessenden Seiten (die Cathete und die Hypothenuse, welche den Winkel einschliessen).
- 3) Ein spitzer Winkel nebst der ihm gegenüber liegenden und der, dem rechten Winkel gegenüber, ihm anliegenden Seite (die andere Cathete und die Hypothenuse).
- 4) Die drei Seiten.

Je zwei von diesen drei Stücken bestimmen, nebst dem überall hinzukommenden rechten Winkel, zusammen genommen das ganze Dreieck und folglich das dritte Stück, so dass aus zwei Stücken jeder Gleichung das dritte muss gefunden werden können.

Mehr Fälle als die vier giebt es nicht; denn drei Winkel bestimmen das Dreieck nicht.

Die auflösenden Gleichungen für die vier obigen Fälle sind in folgendem Lehrsatze enthalten.

350.

**Lehrsatz.** Wenn die Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  (Fig. 170.) durch  $a$  und  $b$ , die denselben gegenüberliegenden Winkel durch  $\alpha$  und  $\beta$  und die Hypothenuse der Dreiecks durch  $c$  bezeichnet werden, so ist

$$1. \quad \begin{cases} b = a \tan \beta \\ a = b \cot \beta \end{cases} \text{ und } \begin{cases} a = b \tan \alpha \\ b = a \cot \alpha \end{cases},$$

$$2. \quad \begin{cases} a = c \cos \beta \\ c = a \sec \beta \end{cases} \text{ und } \begin{cases} b = c \cos \alpha \\ c = b \sec \alpha \end{cases},$$

$$3. \quad \begin{cases} b = c \sin \beta \\ c = b \operatorname{cosec} \beta \end{cases} \text{ und } \begin{cases} a = c \sin \alpha \\ c = a \operatorname{cosec} \alpha \end{cases},$$

$$4. \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

**Beweis.** I. Es sey  $EB = 1$  und  $DE$  auf  $BC$  senkrecht, so ist  $ED$  gleich  $\tan \beta$ . Nun sind die rechtwinkligen Dreiecke  $ACB$  und  $DEB$  ähnlich. Also ist  $\frac{AC}{BC} = \frac{DE}{BE}$ , das heisst:  $\frac{b}{a} = \frac{\tan \beta}{1}$ , woraus  $b = a \tan \beta$  folgt; welches die erste Gleichung (1.) ist.

Aus  $b = a \tan \beta$  folgt,  $a = \frac{b}{\tan \beta} = b \cdot \frac{1}{\tan \beta}$ . Aber  $\frac{1}{\tan \beta}$  ist gleich  $\cot \beta$ . Also ist  $a = b \cot \beta$ . Dieses die zweite Gleichung in (1.).

Ferner ist  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , also  $\beta = 90^\circ - \alpha$ . Nun ist  $\cot \beta = \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$ ; also ist die zweite Gleichung  $a = b \cot \beta$  (1.) so viel als  $a = b \tan \alpha$ ; welches die dritte Gleichung (1.) ist.

Eben so ist, wegen  $\tan \beta = \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$ , die erste Gleichung  $b = a \tan \beta$  (1.) so viel als  $b = a \cot \alpha$ ; welches die vierte Gleichung (1.) ist.

II. Es sey  $DB = 1$ , und wie vorhin  $DE$  auf  $BC$  senkrecht, so ist  $EB = \cos \beta$ . Nun ist in den ähnlichen Dreiecken  $ACB$  und  $DEB$ ,  $\frac{CB}{AB} = \frac{EB}{DB}$ , das heisst:

$\frac{a}{c} = \frac{\cos \beta}{1}$ . Also ist  $a = c \cos \beta$ . Dieses ist die erste Gleichung in (2.).

Es folgt daraus  $c = \frac{a}{\cos \beta} = a \cdot \frac{1}{\cos \beta}$ , und weil  $\frac{1}{\cos \beta} = \sec \beta$  ist,  $c = a \sec \beta$ . Dieses ist die zweite Gleichung in (2.).

Es sey  $AF = 1$  und  $FG$  auf  $AC$  senkrecht, so ist  $AG = \cos \alpha$ . Nun ist in den ähnlichen Dreiecken  $ACB$  und  $AGF$ ,  $\frac{AC}{AB} = \frac{AG}{AF}$ , das heisst:  $\frac{b}{c} = \frac{\cos \alpha}{1}$ , woraus  $b = c \cos \alpha$  folgt; welches die dritte Gleichung in (2.) ist.

Es folgt daraus  $c = \frac{b}{\cos \alpha} = b \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = b \sec \alpha$ ; welches die vierte Gleichung in (2.) ist.

III. Es ist  $\cos \beta = \cos(\rho - \alpha) = \sin \alpha$ . Also folgt aus der ersten Gleichung in (2.), nemlich aus  $a = c \cos \beta$ ,  $a = c \sin \alpha$ ; welches die dritte Gleichung in (3.) ist.

Aus der zweiten Gleichung in (2.), nemlich aus  $c = a \sec \beta$ , folgt, wenn man  $\rho - \alpha$  statt  $\beta$  setzt,  $c = a \sec(\rho - \alpha) = a \operatorname{cosec} \alpha$ ; welches die vierte Gleichung in (3.) ist.

Aus der dritten Gleichung in (2.) folgt auf dieselbe Weise, wenn man  $\rho - \beta$  statt  $\alpha$  setzt,  $b = c \cos(\rho - \beta) = c \sin \beta$ ; welches die erste Gleichung in (3.) ist.

Aus der vierten Gleichung in (2.) folgt, wenn man wieder  $\rho - \beta$  statt  $\alpha$  setzt,  $c = b \sec(\rho - \beta) = b \operatorname{cosec} \beta$ ; welches die zweite Gleichung in (3.) ist.

IV. Die Gleichung (4.) drückt den pythagorischen Lehrsatz aus (§. 124.).

351.

*Anmerkung.* Die Gleichungen des vorigen Lehrsatzes kommen bei ferneren goniometrischen Untersuchungen sehr häufig vor. Es ist daher gut, wenn man ihre unmittelbare leichte Herleitung aus der Figur merkt. Diese geschieht, wenn man sich bei dem Anblick eines rechtwinkligen Dreiecks einen Augenblick vorstellt, eine seiner Seiten, und zwar eine von denen, welche man in die Gleichung einführen will, sey der Halbmesser 1 selbst. Als dann sind die andern beiden Seiten unmittelbar goniometrische Linien. Und wenn nun die für den Halbmesser genommene Seite nicht 1 ist, so multiplicirt man, um die andere Seite, welche für die goniometrische Linie genommen wurde, auszudrücken, diese letztere mit dem Werthe der für den Halbmesser genommenen Seite. Denn so viel mal jene Seite grösser oder kleiner ist, ist es, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke, auch diese.

### 351. Rechtwinklige Dreiecke, Seiten u. Winkel. 371

Man stelle sich z. B. vor  $CB$  in (Fig. 170.) sey der Halbmesser 1, so ist  $AC = b$  die Tangente und  $AB = c$  die Secante des Winkels  $\beta$ , oder ersteres die Cotangente, letzteres die Cosecante seines Complements  $\alpha$ . Wäre also  $a$  gleich 1, so wäre

$$b = \tan \beta = \cot \alpha \text{ und } c = \sec \beta = \operatorname{cosec} \alpha.$$

Nun ist aber  $BC$  nicht gleich 1, sondern  $= a$ . Deshalb muß man die goniometrischen Linien noch mit  $a$  multipliciren und findet also:

$$b = a \tan \beta = a \cot \alpha \text{ und}$$

$$c = a \sec \beta = a \operatorname{cosec} \alpha.$$

Dieses ist in (§. 350.) die erste und vierte Gleichung in (1.), die zweite Gleichung in (2.) und die vierte Gleichung in (3.).

Man nehme an,  $AC$  sey der Halbmesser 1, so ist  $BC = a$  die Tangente und  $AB = c$  die Secante des Winkels  $\alpha$ , oder ersteres die Cotangente, letzteres die Cosecante seines Complements  $\beta$ . Wäre also  $b$  gleich 1, so wäre

$$a = \tan \alpha = \cot \beta \text{ und } c = \sec \alpha = \operatorname{cosec} \beta.$$

Nun ist aber  $AC$  nicht gleich 1, sondern gleich  $b$ . Also muß man die goniometrischen Linien noch mit  $b$  multipliciren und findet also:

$$a = b \tan \alpha = b \cot \beta \text{ und}$$

$$c = b \sec \alpha = b \operatorname{cosec} \beta.$$

Dieses ist in (§. 350.) die dritte und zweite Gleichung in (1.), die vierte Gleichung in (2.) und zweite Gleichung in (4.).

Man nehme an,  $AB$  sey der Halbmesser 1, so ist  $AC = b$  der Sinus und  $BC = a$  der Cosinus des Winkels  $\beta$ , oder ersteres der Cosinus, letzteres der Sinus des Winkels  $\alpha$ . Wäre also  $c$  gleich 1, so wäre

$$b = \sin \beta = \cos \alpha \text{ und } a = \cos \beta = \sin \alpha.$$

Nun ist aber  $AB$  nicht gleich 1, sondern gleich  $c$ . Also muß man die goniometrischen Linien noch mit  $c$  multipliciren und findet also:

$$b = c \sin \beta = c \cos \alpha \text{ und}$$

$$a = c \cos \beta = c \sin \alpha.$$

Dieses ist in (§. 350.) die erste Gleichung in (3.), die dritte Gleichung in (2.), die erste Gleichung in (2.) und die dritte Gleichung in (3.).

So lassen sich alle Gleichungen (1. 2. 3.) (§. 350.) aus dem bloßen Anblick der Figur aufstellen.

Auch die Gleichung (4.) (§. 350.) findet man unmittelbar, da sie blos den pythagorischen Lehrsatz ausdrückt.

## 352.

**Anmerkung.** Vermittelt der Gleichungen (§. 350.) lassen sich nun alle Aufgaben: aus den bestimmenden Stücken eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen Stücke zu finden, auflösen.

Da aus je zwei von den drei Stücken, welche die Gleichungen (§. 350.) enthalten (§. 349.), das dritte gefunden werden kann, so läßt sich aus den Gleichungen folgendes finden.

*Aus den Gleichungen (1.):*

- 1) Eine Cathete aus der andern und dem der ersten gegenüberliegenden spitzen Winkel.
- 2) Eine Cathete aus der andern und dem der letzten gegenüberliegenden spitzen Winkel.
- 3) Ein spitzer Winkel aus den beiden Catheten.

*Aus den Gleichungen (2.):*

- 4) Eine Cathete aus der Hypothenuse und dem zwischen beiden liegenden spitzen Winkel.
- 5) Die Hypothenuse aus der einen Cathete und dem zwischen beiden liegenden spitzen Winkel.
- 6) Ein spitzer Winkel aus der Hypothenuse und der Cathete, die ihn einschließen.

*Aus den Gleichungen (3.):*

- 7) Eine Cathete aus dem ihr gegenüber liegenden spitzen Winkel und der Hypothenuse.
- 8) Die Hypothenuse aus der einen Cathete und dem ihr gegenüber liegenden Winkel.
- 9) Ein spitzer Winkel aus der ihm gegenüber liegenden Cathete und der Hypothenuse.

*Aus den Gleichungen (4.):*

- 10) Die Hypothenuse aus den beiden Catheten.
- 11) Eine Cathete aus der andern und der Hypothenuse.

Dieses sind auch, wie leicht zu sehen, grade die sämtlichen Aufgaben, welche vorkommen können. Wo es mehrere Auflösungen einer und derselben Aufgabe giebt, bedient man sich derjenigen, für welche die goniometrischen Linien in den Tafeln, die man grade zur Hand hat, zu finden sind. Die Auflösung der Aufgaben ist folgende.

### 353. Rechtwinklige Dreiecke, Seiten u. Winkel. 373

353.

*Aufgabe. I. Aus der Cathete a (Fig. 170.) und dem Winkel  $\beta$  die Cathete b zu finden.*

*Auflösung.*  $b = a \tan \beta$  (§. 350. 1. erste Gleichung).

*Beispiel.* Es sey  $a = 275,048$ ,  $\beta = 34^\circ 55' 12''$ , nach alter Bogen-Theilung zu 90 Graden, 60 Minuten, 60 Secunden etc., so erhält man nach den Vegaschen Tafeln:

$$1^\circ 275,04 = 0,4393959 + 2$$

126 ... Pr. Theil für 8

$$1^\circ \tan 34^\circ 55' 12'' = 0,7576878 - 1$$

362 ... Pr. Theil für 12''

$$1^\circ (a \tan \beta) = \frac{1,1971325}{1} + 1 = 1^\circ b$$

$$= 0,1971325 + 2.$$

$$\text{Also } b = 137,463$$

*Aufgabe. II. Aus der Cathete a und dem Winkel  $\alpha$  die Cathete b zu finden.*

*Auflösung.*  $b = a \cot \alpha = \frac{a}{\tan \alpha}$  (§. 350. I. vierte Gleichung).

Die Rechnung in Zahlen ist der in (I.) ganz ähnlich.

*Aufgabe. III. Aus den Catheten a und b den Winkel  $\beta$  zu finden.*

*Auflösung.*  $\tan \beta = \frac{b}{a}$  vermöge (§. 350. I. erste Gleichung).

*Beispiel.* Es sey  $a = 5801,32$  und  $b = 148,0053$ , so erhält man:

$$1^\circ 148,0053 = 1,1702617 + 1, \text{ mit Einschluss des Prop. Theils für } 0053.$$

$$1^\circ 5801,32 = 0,7635268 + 3, \text{ desgl. für } 2.$$

$$1^\circ \left( \frac{b}{a} \right) = 0,4067349 - 2$$

$$= 8,4067349 - 10 = 1^\circ (\tan \beta).$$

$$\text{Also } \beta = 1^\circ 27' 40,9''.$$

*Aufgabe. IV. Aus der Hypothenuse c und dem Winkel  $\beta$  die Cathete a zu finden.*

*Auflösung.*  $a = c \cos \beta$  (§. 350. 2. erste Gleichung). Die Rechnung in Zahlen ist der in (I.) ähnlich.

*Aufgabe. V. Aus der Cathete a und dem Winkel  $\beta$  die Hypothenuse c zu finden.*



*Auflösung.*  $c = a \sec \beta$  (§. 350. 2. zweite Gleichung). Da man die Logarithmen der Secanten in den Tafeln nicht findet, so muß man statt  $c = a \sec \beta$  den Ausdruck

$$c = \frac{a}{\cos \beta}$$

nehmen.

*Beispiel.* Es sey  $a = 100,1587$ ,  $\beta = 89^\circ.15'.4,6''$ , so erhält man

$${}^{10}100,1587 = 1,0006549 + 1 \text{ mit Einschluss der Prop. Theile für } 87 \text{ (Vegasche Tafel S. 180.)}$$

Abgezogen

$${}^{10}\sin 89^\circ.15'.4,6'' \\ = {}^{10}\cos 0^\circ.44'.55,4'' = 0,1161850 - 2 \text{ (Vegasche Tafel S. 198.)}$$

$${}^{10}\left(\frac{a}{\cos \beta}\right) = 0,8844699 + 3.$$

$$\text{Also } c = 7664,253.$$

*Aufgabe.* VI. Aus der Hypothenuse  $c$  und der Cathete  $a$  den eingeschlossenen Winkel  $\beta$  zu finden.

*Auflösung.*  $\alpha)$   $\cos \beta = \frac{a}{c}$ , vermöge (§. 350. 2. erste Gleichung).

$\beta)$  Ist der Winkel  $\beta$  sehr klein, so weichen die Cosinus verschiedener Winkel nur sehr wenig von einander ab. Man kann also alsdann aus  $\cos \beta = \frac{a}{c}$ , wenn auch  $a$  und  $c$  genau gegeben sind, den Winkel  $\beta$  nicht mit eben der Schärfe finden. Um in solchem Falle  $\beta$  genauer zu finden, berechne man den Sinus von  $\frac{1}{2}\beta$ , wie folgt. Es ist  $\cos \beta = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\beta$  (§. 345. 35.).

Also ist  $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\beta = \frac{a}{c}$ , Daraus folgt  $1 - \frac{a}{c} = 2 \sin^2 \frac{1}{2}\beta$ ,

oder  $\frac{c-a}{2c} = \sin^2 \frac{1}{2}\beta$ , oder

$$\sin \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{c-a}{2c}}.$$

*Beispiel.* Es sey  $a = 8571,23$  und  $c = 8571,31$ , so erhält man, wenn man nach dem ersten Ausdruck

$\cos \beta = \frac{a}{c}$  rechnet,

$${}^{10}a = 1,9330431 + 2$$

$${}^{10}c = 0,9330472 + 3$$

$${}^{10}\left(\frac{a}{c}\right) = 9,9999959 - 10.$$

Dieser Logarithme gehört zu dem Cosinus des Winkels  $0^\circ.15'.0''$ . Aber die Logarithmen der Cosinus von Winkeln, die um 10 Secunden grösser oder kleiner sind, sind nur in der letzten Stelle um 1 von dem obigen verschieden (Vegasche Tafeln S. 194.). Man ist also mit dem Winkel  $\beta$  um 10 Secunden ungewiss; denn er kann möglicherweise um 5 Secunden grösser oder kleiner seyn.

Rechnet man dagegen nach dem zweiten Ausdruck  $\sin \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{c-a}{2c}}$ , so erhält man

$$\begin{aligned} {}^{10}(c-a) &= {}^{10}0,08 &= 9,9030900 - 2 \\ {}^{10}(2c) &= {}^{10}17142,62 &= 0,2340772 + 4 \\ {}^{10}\left(\frac{c-a}{2c}\right) &= 0,6690128 - 6 \end{aligned}$$

$${}^{10}\left(\sqrt{\frac{c-a}{2c}}\right) = 7,3345064 - 10 = {}^{10}(\sin \frac{1}{2}\beta).$$

Dieser Logarithme giebt den Winkel  $\frac{1}{2}\beta$  nach der Vegaschen Tafel (S. 193.) gleich  $0^\circ.7'.25,6''$ , also  $\beta = 0^\circ.14'.51''$ , und zwar bis auf eine Secunde genau. Dieser Winkel ist, wie man sieht, von dem Winkel  $0^\circ.15'$ , nach der ersten Rechnung, wirklich um 9 Secunden verschieden und also um so viel genauer.

*Aufgabe. VII. Aus der Hypothenuse c und dem Winkel  $\beta$  die gegenüberliegende Cathete b zu finden.*

*Auflösung.*  $b = c \sin \beta$  (§. 350. 3. erste Gleichung). Die Rechnung in Zahlen ist der in (I.) ähnlich.

*Aufgabe. VIII. Aus der Cathete b und dem ihr gegenüberliegenden Winkel  $\beta$  die Hypothenuse c zu finden.*

*Auflösung.*  $c = b \operatorname{cosec} \beta$  (§. 350. 3. zweite Gleichung), oder, wegen der Logarithmen der Tafeln,

$$c = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Die Rechnung in Zahlen ist der in (V.) ähnlich.

*Aufgabe. IX. Aus der Cathete b und der Hypothenuse c den Winkel  $\beta$  zu finden.*

*Auflösung.* a)  $\sin \beta = \frac{b}{c}$ , vermöge (§. 350. 3. erste Gleichung).

$\beta$ ) Kommt der Winkel  $\beta$  einem rechten nahe, so ist es ein Fall, wie in (VI.  $\beta$ ). Man thut dann besser, den Sinus des halben Winkels zu berechnen. Es ist  $\sin \beta = \cos(\rho - \beta) = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}(\rho - \beta)$ , also

$$1 - 2 \sin \frac{1}{2}(\rho - \beta)^2 = \frac{b}{c}, \text{ woraus } 2 \sin \frac{1}{2}(\rho - \beta)^2 = 1 - \frac{b}{c} \\ = \frac{c-b}{c}, \text{ und mithin}$$

$$\sin \frac{1}{2}(\rho - \beta) = \sqrt{\frac{c-b}{2c}}$$

folgt.

Die Rechnung in Zahlen ist der in (VI.  $\beta$ .) ähnlich.

*Aufgabe. X. Aus den beiden Catheten a und b die Hypothenuse c zu finden.*

*Auflösung.*  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  (§. 350. 4.).

*Beispiel.* Es sey  $a = 80543,1$ ,  $b = 49571,5$ . VVollte man ganz mit Logarithmen rechnen, so müßte man die Logarithmen von 80543,1 und 49571,5 suchen, sie mit 2 multipliciren und zu den Producten wieder die Zahlen nehmen, welche  $a^2$  und  $b^2$  wären. Dieses aber ist wohl beschwerlicher, als wenn man  $a$  und  $b$  mit sich selbst multiplicirt und die Quadrate addirt. Man findet

$$\begin{array}{rcl} a^2 & = & 6487190957,61 \\ b^2 & = & 2457333612,25 \\ \hline a^2 + b^2 & = & 8944524569,76 \\ {}^{10}(a^2 + b^2) & = & 1,9515573 + 8 \\ {}^{10}(\sqrt{a^2 + b^2}) & = & 0,9757786 + 4 \\ c & = & 94575,6. \end{array}$$

*Aufgabe. XI. Aus der Hypothenuse c und der Cathete a, die Cathete b zu finden.*

*Auflösung.*  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$  vermöge (§. 350. 4.).

*Beispiel.* Es sey  $c = 508,137$  und  $a = 483,081$ , so ist  $c + a = 991,218$  und  $c - a = 25,056$ , also

$$\begin{array}{rcl} {}^{10}(c + a) & = & 0,9961692 + 2 \\ {}^{10}(c - a) & = & 0,3989117 + 1 \\ \hline {}^{10}((c + a)(c - a)) & = & 2,3950809 + 2 \\ {}^{10}(\sqrt{(c + a)(c - a)}) & = & 1,1975404 + 1 = {}^{10}b; \\ b & = & 157,694. \end{array}$$

354.

*Erläuterung.* Der Inhalt eines Dreiecks muß sich jedesmal aus den Stücken, die das Dreieck bestimmen, berechnen lassen, weil mit den bestimmenden Stücken das ganze Dreieck gegeben ist.

Die bestimmenden Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks sind

I. *zwei Seiten, und zwar:*

- 1) *die beiden Catheten; oder*
- 2) *die Hypothenuse und eine Cathete.*

II. *Eine Seite und ein spitzer Winkel, und zwar:*

- 3) *eine Cathete und der anliegende spitze Winkel; oder*
- 4) *eine Cathete und der gegenüberliegende spitze Winkel; oder*
- 5) *die Hypothenuse und ein spitzer Winkel.*

*Aus diesen Stücken muß sich also der Inhalt finden lassen; welches folgende Aufgaben giebt.*

### 355.

*Aufgabe. I. Aus den beiden Catheten  $a$  und  $b$  des rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  (Fig. 170.) den Inhalt des Dreiecks zu finden.*

*Auflösung.* Die Cathete  $b$  ist die Höhe des Dreiecks über der Grundlinie  $a$ , weil  $AC$  auf  $CB$  senkrecht ist, und umgekehrt:  $a$  ist die Höhe über der Grundlinie  $b$ . Also ist der Inhalt des Dreiecks, welcher durch  $\Delta$  bezeichnet werden mag, zu Folge (§. 162. IV.)

$$1. \quad \Delta = \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}b \cdot a.$$

Die Rechnung nach diesem Ausdrucke kann auch durch Logarithmen geschehen und hat keine Schwierigkeit. Man muß nur, damit von den möglich-kleinsten Zahlen die Logarithmen zu nehmen sind, nicht das Product  $ab$ , sondern einen der Factoren halbiren. In den meisten Fällen ist es indessen kürzer, bloß zu multipliciren, weil das Aufschlagen von drei Zahlen in den Tafeln mehr Mühe macht als eine einfache Multiplication. Rechnet man ohne Logarithmen, so kann man, wenn einer der Factoren mit 2 aufgeht, welches an der letzten Ziffer zu erkennen, den Factor, ehe man multiplicirt, halbiren. Geht kein Factor mit 2 auf, so multiplicirt man erst und halbirt dann das Product. Multiplications-Tafeln, deren in (§. 160. Rechenkunst) erwähnt, kommen bei dieser Inhalts-Berechnung ebenfalls zu Statten.

*Aufgabe. II. Aus der Hypothenuse  $c$  und der einen Cathete  $a$  den Inhalt des Dreiecks  $\Delta$  zu finden.*

*Auflösung.*  $\alpha$ ) Da  $\Delta = \frac{ab}{2}$  (I.) und  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$  (§. 350. 4.) ist, so ist

$$2. \Delta = \frac{a\sqrt{(c^2 - a^2)}}{2} = \frac{a\sqrt{(c-a)(c+a)}}{2},$$

wodurch man  $\Delta$  aus  $a$  und  $c$  findet.

$\beta$ ) Es ist auch  $b = a \tan \beta = c \sin \beta$  und  $a = c \cos \beta$ , also

$$3. \cos \beta = \frac{a}{c}.$$

Nimmt man aus diesem Ausdruck, oder wenn der Winkel  $\beta$  sehr klein ist,  $\beta$  aus

$$\sin \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\left(\frac{c-a}{2c}\right)} \quad (\S. 353. \text{ VI. } \beta.),$$

so erhält man  $\frac{ab}{2}$ , oder

$$4. \Delta = \frac{1}{2} a^2 \tan \beta = \frac{1}{2} a c \sin \beta.$$

Die Ausdrücke (5. und 4.) sind zur Rechnung mit Logarithmen ebenfalls bequem.

*Beispiel.* Es sey  $c = 837,24$  und  $a = 651,01$ , so ist

$${}^{10}a = 1,8135877 + 1$$

$${}^{10}c = 0,9228500 + 2$$

$${}^{10}\left(\frac{a}{c}\right) = 0,8907377 - 1$$

$$= 9,8907377 - 10 = {}^{10}\cos \beta.$$

$$\text{Also } \beta = 38^\circ . 57' . 42''$$

$${}^{10}\tan \beta = 9,9077749 - 10$$

$${}^{10}(a^2) = 2 \cdot {}^{10}a = 3,6271754 + 2$$

$$0,5349603 + 5 = {}^{10}(a^2 \tan \beta) = {}^{10}(2 \Delta).$$

$$\text{Also } 2 \Delta = 342728,5 \text{ und}$$

$$\Delta = 171369,2.$$

*Aufgabe.* III. Aus der Cathete  $a$  und dem anliegenden spitzen Winkel  $\beta$  den Inhalt des Dreiecks  $\Delta$  zu finden.

*Auflösung.* Es ist  $a \tan \beta = b$ , also, da  $\Delta = \frac{ab}{2}$  ist (I),

$$5. \Delta = \frac{1}{2} a^2 \tan \beta.$$

Die Berechnung in Zahlen hat keine Schwierigkeit. Die Division mit 2 geschieht zuletzt.

*Aufgabe.* IV. Aus der Cathete  $a$  und dem gegenüber liegenden spitzen Winkel  $\alpha$  den Inhalt des Dreiecks  $\Delta$  zu finden.

*Auflösung.* Es ist  $b = a \cot \alpha$ , also, da  $\Delta = \frac{ab}{2}$  ist (I.),

## 356-357. Beliebige Dreiecke, Seiten u. Winkel. 379

$$6. \Delta = \frac{1}{2} a^2 \cot \alpha,$$

die Berechnung in Zahlen wie (Hl.).

*Aufgabe.* V. Aus der Hypothenuse  $c$  und dem spitzen Winkel  $\beta$  den Inhalt des Dreiecks  $\Delta$  zu finden.

*Auflösung.* Es ist  $a = c \cos \beta$  und  $b = c \sin \beta$ , also da  $\Delta = \frac{ab}{2}$  ist

$$7. \Delta = \frac{1}{2} c^2 \sin \beta \cos \beta.$$

Da  $2 \sin \beta \cos \beta = \sin 2\beta$ , so ist auch

$$8. \Delta = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\beta.$$

Der Ausdruck (8.) ist zur Berechnung bequemer als (7.), sobald Secunden und kleinere Theile von dem Winkel  $\beta$  gegeben sind, für welche man die Proportional - Theile der Logarithmen in den Tafeln suchen muß, weil die Ergänzung alsdann nur einmal, hingegen in Ausdruck (7.) zweimal, für den Sinus und für den Cosinus zu nehmen ist.

### Beliebige Dreiecke.

356.

*Erläuterung.* Die bestimmenden Stücke eines beliebigen Dreiecks sind zu Folge (§. 56.):

- 1) eine Seite und zwei Winkel;
- 2) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;
- 3) zwei Seiten und der eine anliegende Winkel. Liegt derselbe der größern Seite gegenüber, so ist nur ein Dreieck möglich. Liegt er der kleinern gegenüber, so sind zwei Dreiecke möglich.

4) Die drei Seiten.

Die auflösenden Gleichungen (§. 348.), in welchen außer den bestimmenden Stücken noch irgend ein viertes Stück vorkommen soll, müssen also enthalten:

- 1) zwei Seiten und die beiden anliegenden Winkel;
- 2) zwei Seiten, einen eingeschlossenen und einen anliegenden Winkel;
- 3) drei Seiten und einen Winkel.

Vermittelt dieser Gleichungen müssen jedesmal aus den bestimmenden Stücken die übrigen gefunden werden können.

Man findet diese Gleichungen aus folgendem Lehrsatz.

357.

*Lehrsatz.* Wenn man die Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC (Fig. 171. I. und II.) durch  $a, b, c$  und die

gegenüber liegenden Winkel durch  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , oder auch durch  $cb$ ,  $ac$  und  $ba$  bezeichnet, so ist

1.  $b \sin \gamma = c \sin \beta$  oder  $b \sin ba = c \sin ca$ ,
2.  $c \sin \alpha = a \sin \gamma$  oder  $c \sin cb = a \sin ab$ ,
3.  $a \sin \beta = b \sin \alpha$  oder  $a \sin ac = b \sin bc$ ;
4.  $c \cos \beta + b \cos \gamma = a$  oder  $c \cos ca + b \cos ba = a$ ,
5.  $a \cos \gamma + c \cos \alpha = b$  oder  $a \cos ab + c \cos cb = b$ ,
6.  $b \cos \alpha + a \cos \beta = c$  oder  $b \cos bc + a \cos ac = c$ .

**Beweis.** I. Wenn z. B.  $AD$  auf  $BC$  senkrecht ist, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck  $ACD$ , zu Folge (§. 350. oder 351.)  $AD = b \sin \gamma = b \sin ba$  und in dem rechtwinkligen Dreiecke  $ABD$ ,  $AD = c \sin \beta = c \sin ca$ . Also ist

$b \sin \gamma = c \sin \beta$  oder  $b \sin ba = c \sin ca$ ;  
welches die erste Gleichung des Lehrsatzes ist.

Die zweite und dritte Gleichung findet man aus der ersten durch bloßes Weiter-rücken der Buchstaben. Es ist besser, sie nicht erst aus der Figur nehmen. Da nemlich die erste Gleichung, wie man sieht, für jede Gestalt des Dreiecks gilt, so gilt sie auch, wenn man z. B.  $b$  statt  $a$ , hierauf  $c$  statt  $b$  zur Grundlinie nimmt, welches geschieht wenn man mit allen Buchstaben um einen weiter geht. Auf  $a$  folgt  $b$ , auf  $b$ ,  $c$ , auf  $c$  wieder  $a$ , auf  $\alpha$  folgt  $\beta$ , auf  $\beta$ ,  $\gamma$  und auf  $\gamma$  wieder  $\alpha$ . Schreibt man auf diese Weise statt aller Buchstaben die zunächst folgenden, so kann man aus der ersten Gleichung die zweite und aus dieser die dritte unmittelbar niederschreiben. Geht man über die letzte Gleichung hinaus, so muß man wieder die erste finden, welches zugleich zur Probe der Verwandlung dient. Dieses Verfahren ist besser, leichter und sicherer, als wenn man Gleichungen, die, wie hier, nur in den Buchstaben verschieden sind, aus der Figur nimmt.

II. In dem rechtwinkligen Dreieck  $ABD$  ist  $BD = c \cos \beta$  und in dem rechtwinkligen Dreieck  $ACD$  ist  $\pm CD = b \cos \gamma$ . Nun ist  $BC$  oder  $a$  gleich  $BD \pm CD$ . Also ist

$c \cos \beta + b \cos \gamma = a$  oder  $c \cos ca + b \cos ba = a$ .  
Dieses ist die vierte Gleichung des Lehrsatzes. Die fünfte und sechste findet man aus der vierten wieder durch bloßes Weiter-rücken der Buchstaben.

Aus diesen Gleichungen findet man die auflösenden Gleichungen des Dreiecks, wie folgt.

358.

**Lehrsatz.** Die auflösenden Gleichungen (§. 356.) für ein beliebiges Dreieck ABC (Fig. 171. I. u. II.) sind folgende:

1.  $b \sin \gamma = c \sin \beta$
2.  $c \sin \alpha = a \sin \gamma$
3.  $a \sin \beta = b \sin \alpha$
4.  $a \sin \gamma = c (\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma) = c$
5.  $a \sin \beta = b (\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma) = b$
6.  $b \sin \alpha = a (\sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha) = a$
7.  $b \sin \gamma = c (\sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha) = c$
8.  $c \sin \beta = b (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = b$
9.  $c \sin \alpha = a (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = a$

für zwei Seiten und einen eingeschlossenen und einen anliegenden Winkel.

10.  $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2$
11.  $b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2$
12.  $c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta = b^2$

**Beweis.** I. Die ersten drei Gleichungen sind die Gleichungen (1. 2. 3.) in (§. 357.) selbst.

II. A. Multiplicirt man in (§. 357.) die Gleichung (1.) mit  $\cos \gamma$  und die Gleichung (4.) mit  $\sin \gamma$ , so erhält man

$$b \sin \gamma \cos \gamma = c \sin \beta \cos \gamma \text{ und} \\ c \cos \beta \sin \gamma = b \cos \gamma \sin \gamma = a \sin \gamma.$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man

$$c \cos \beta \sin \gamma = a \sin \gamma - c \sin \beta \cos \gamma, \text{ oder} \\ a \sin \gamma = c (\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma),$$

oder auch, weil  $\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma = \sin(\beta + \gamma)$  ist (§. 345. 22.),

$$a \sin \gamma = c \sin(\beta + \gamma).$$

Dieses ist die Gleichung (4.) des Lehrsatzes. Durch Weiterrücken der Buchstaben findet man aus derselben die Gleichungen (6. und 8.).

Dividirt man die Gleichung (4.) des Lehrsatzes, durch die Gleichung (1.), so erhält man

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta},$$

oder

$$a \sin \beta = b (\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma) = b \sin(\beta + \gamma).$$



Dieses ist die Gleichung (6.) des Lehrsatzes, und durch Weiterrücken der Buchstaben findet man daraus die Gleichungen (7. und 9.).

B. Es ist auch wegen  $\alpha + \beta + \gamma = 2\rho$ ,  $\alpha = 2\rho - (\beta + \gamma)$  und da  $\sin(2\rho - (\beta + \gamma)) = \sin(\beta + \gamma)$  ist (§. 345. 28.)  $\sin \alpha = \sin(\beta + \gamma)$ . Dieses in die Gleichung (2.) gesetzt giebt ebenfalls  $c \sin(\beta + \gamma) = a \sin \gamma$ , wie (4.) und durch Weiterrücken der Buchstaben die Gleichungen (6. und 8.). Ferner die Gleichungen (5. 7. und 9.), wie in (A.).

C. Da in (A.)  $a \sin \gamma = c(\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma)$  und in (B.), unabhängig von dem Satze (§. 316.),  $a \sin \gamma = c \sin(\beta + \gamma)$  gefunden wurde, so folgt daraus auch, hier mit Hülfe des Dreiecks, der Satz

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma \quad (\S. 316.)$$

aber unmittelbar nur für solche Winkel  $\beta$  und  $\gamma$ , die, wie im Dreieck, zusammen kleiner als zwei Rechte sind. Man kann zwar den Satz weiter auch auf größere Winkel ausdehnen und ihn folglich auch allgemein aus dem Dreiecke beweisen. Der Beweis ist aber weniger natürlich, und weitläufiger als der Beweis (§. 316.).

III. A. Die Gleichungen (§. 357. 1. und 4.) sind

$$b \sin \gamma - c \sin \beta = 0 \text{ und}$$

$$b \cos \gamma + c \cos \beta = a.$$

Man quadriere sie und addire die Quadrate, so erhält man

$$\begin{aligned} & b^2 \sin^2 \gamma - 2bc \sin \gamma \sin \beta + c^2 \sin^2 \beta \\ & + b^2 \cos^2 \gamma + 2bc \cos \gamma \cos \beta + c^2 \cos^2 \beta = a^2, \text{ oder} \\ & b^2 + 2bc(\cos \gamma \cos \beta - \sin \gamma \sin \beta) + c^2 = a^2, \text{ oder} \\ & b^2 + 2bc \cos(\beta + \gamma) + c^2 = a^2, \text{ oder weil } \beta + \gamma = 2\rho - \alpha, \\ & b^2 - 2bc \cos \alpha + c^2 = a^2; \end{aligned}$$

welches die Gleichung (11.) des Lehrsatzes ist.

B. Auch kann man auf folgende Weise verfahren.

Man multiplicire in (§. 357.) die Gleichung (4.) mit  $a$ , die Gleichung (5.) mit  $b$  und die Gleichung (6.) mit  $c$ , so erhält man

$$ac \cos \beta + ab \cos \gamma = a^2,$$

$$ba \cos \gamma + bc \cos \alpha = b^2,$$

$$cb \cos \alpha + ca \cos \beta = c^2.$$

Man ziehe die erste Gleichung von der Summe der beiden andern ab, so erhält man

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2, \text{ oder}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2.$$

# 359.360. Beliebige Dreiecke, Seiten u. Winkel. 383

Dieses ist ebenfalls die Gleichung (11.) des Lehrsatzes. Durch Weiterücken der Buchstaben findet man aus derselben die Gleichungen (12. und 10.).

359.

*Erläuterung.* Die Aufgaben: aus den bestimmenden Stücken eines Dreiecks die übrigen Stücke zu finden, sind nun folgende:

*Gegeben.*

*Gesucht.*

- |   |  |
|---|--|
| Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel,   | 1) eine zweite Seite.                              |
| Eine Seite, ein an- und ein abliegender Winkel, | 2) die zwischen den beiden Winkeln liegende Seite, |
|   | 3) die dritte Seite.                               |
| Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel,     | 4) ein zweiter Winkel,                             |
|   | 5) die dritte Seite.                               |
| Zwei Seiten und ein anliegender Winkel,         | 6) der andere anliegende Winkel,                   |
|   | 7) der eingeschlossene Winkel,                     |
|   | 8) die dritte Seite.                               |
| Drei Seiten.                                    | 9) Ein Winkel.                                     |

Die Auflösung dieser Aufgaben geschieht durch die auflösenden Gleichungen (§. 358.) wie folgt.

360.

*Aufgabe.* I. Aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln eines Dreiecks, eine der beiden übrigen Seiten zu finden, also

aus  $a, \beta$  und  $\gamma \dots c$  oder  $b$

aus  $b, \gamma$  und  $\alpha \dots a$  oder  $c$

und aus  $c, \alpha$  und  $\beta \dots b$  oder  $a$ .

*Auflösung.* A. Die auflösenden Gleichungen (4. und 5.) (§. 358.) geben:

$$1. \begin{cases} a = a \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \text{ und } b = a \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}, \text{ also, weiterrückend,} \\ a = b \frac{\sin \alpha}{\sin(\gamma + \alpha)} \text{ und } c = b \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \alpha)}, \\ b = c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \text{ und } a = c \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{cases}$$

B. Mit den gegebenen drei Stücken, z. B.  $a, \beta$  und  $\gamma$ , nemlich mit einer Seite und zwei Winkeln, ist nur ein Dreieck möglich, also kann das gesuchte vierte Stück z. B.  $c$ , nur einen Werth haben.

C. Sind die Winkel, von welchen in diesen Ausdrücken die Sinus vorkommen, entweder sehr klein oder einem oder zwei rechten Winkeln sehr nahe, und man verlangt eine große Genauigkeit, so kann man sich der Reihen (S. 528.) bedienen, welche die Sinus und Cosinus durch den Bogen ausdrücken, nemlich der Reihen

$$2. \begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} \dots \text{ und} \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} \dots \end{cases}$$

Wäre z. B. der Winkel  $\gamma$  in dem Ausdruck  $c = a \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$  sehr klein oder einem rechten sehr nahe, und man bezeichnet die Länge des im ersten Fall zu dem Winkel  $\gamma$  selbst, im andern zu seinem Supplement gehörigen Bogens, für den Halbmesser 1, durch  $\gamma_1$ , so kann man setzen:

$$3. c = \frac{a}{\sin(\beta + \gamma)} \left( \gamma_1 - \frac{\gamma_1^3}{2.3} + \frac{\gamma_1^5}{2.3.4.5} - \dots \right).$$

Es werden, weil  $\gamma_1$  sehr klein vorausgesetzt wird, in der Regel nur die beiden ersten Glieder nöthig seyn. Wäre  $\beta + \gamma$  sehr klein, und man bezeichnet die dazu gehörigen Bogen durch  $\beta_1$  und  $\gamma_1$ , so wäre

$$4. c = a \frac{\gamma_1 - \frac{\gamma_1^3}{2.3} + \frac{\gamma_1^5}{2.3.4.5} \dots}{(\beta_1 + \gamma_1) - \frac{(\beta_1 + \gamma_1)^3}{2.3} + \frac{(\beta_1 + \gamma_1)^5}{2.3.4.5} - \dots}.$$

Wäre z. B.  $\gamma$  einem rechten Winkel sehr nahe, so schreibe man statt  $c = a \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$ ,  $c = a \frac{\cos(\varrho - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)}$ . Alsdann ist

$$5. c = \frac{a}{\sin(\beta + \gamma)} \left( 1 - \frac{(\varrho - \gamma_1)^2}{2} + \frac{(\varrho - \gamma_1)^4}{2.3.4} - \dots \right);$$

und so bei den andern Winkeln. Die Länge der Bogen für eine beliebige Zahl von Graden, Minuten und Secunden findet man gewöhnlich in den trigonometrischen Tafeln schon berechnet, z. B. in den Vegaschen Tafeln auf (S. 297.).

D. Verlangt man übrigens nicht mehr als diejenige Genauigkeit, welche die Logarithmen-Tafeln geben, so sind die allgemeinen Ausdrücke (1.) für alle Fälle gleich passend; denn obgleich allerdings die Sinus, z. B. von Winkeln, die einem rechten nahe kommen, nur wenig von einander abweichen, und wie die Tafeln zeigen (Vegasche Tafeln S. 193.) ein Winkel sogar von einem rechten um 90 Secunden oder  $1\frac{1}{2}$  Minuten verschieden seyn kann, ohne daß sich der Logarithmus seines Sinus auch nur in der siebenten Decimalstelle änderte, so ist dennoch die Genauigkeit immer die nemliche, eben weil die Logarithmen nicht von einander verschieden sind. Denn gesetzt in dem Ausdrucke

$$c = a \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

läge  $\gamma$  zwischen  $90^\circ$  und  $90^\circ, 1\frac{1}{2}'$ , so ist nach den Tafeln für alle verschiedenen Werthe von  $\gamma$  der Logarithme von  $\sin \gamma$  der nemliche. Dieses beweiset, daß die Verschiedenheit der Winkel  $\gamma$  auf  $c$ , in denjenigen Decimalstellen, bis auf welche man  $c$  findet, keinen Einfluß hat. Hätte man daher den Logarithmen von  $\sin \gamma$  auch genauer, so könnte daraus doch immer nur eine Abweichung der höhern Decimalstellen von  $c$  entstehen. Daher giebt der allgemeine Ausdruck sein Resultat in allen Fällen mit der nemlichen Genauigkeit.

*Beispiel für den allgemeinen Ausdruck.* Es sey  $\alpha = 1758,043$ ,  $\beta = 35^\circ.41'.3''$  und  $\gamma = 121^\circ.8'.25''$ , so ist  $\beta + \gamma = 156^\circ.49'.28''$  und

$$\begin{aligned} {}^{10}a &= 0,2450296 + 3 \\ + {}^{10}(\sin \gamma) &= {}^{10}(\cos 31^\circ.8'.25'') = 0,9324247 - 1 \\ &= 1,1774542 + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Abgezogen } {}^{10}(\sin(\beta + \gamma)) &= {}^{10}(\sin 23^\circ.10'.32'') = 0,5949997 - 1 \\ &\text{giebt } {}^{10}c = 0,6824646 + 3; \\ &\text{also } c = 3823,44. \end{aligned}$$

*Aufgabe. II.* Aus einer Seite eines Dreiecks und den beiden, sie nicht einschließenden Winkeln, die zwischen diesen beiden Winkeln liegenden Seiten zu finden, also  
aus  $a, \alpha$  und  $\gamma \dots b$ , oder aus  $a, \alpha$  und  $\beta \dots c$ ;  
aus  $b, \beta$  und  $\alpha \dots c$ , oder aus  $b, \beta$  und  $\gamma \dots a$ ;  
aus  $c, \gamma$  und  $\beta \dots a$ , oder aus  $c, \gamma$  und  $\alpha \dots b$ .

*Auflösung. A.* Die auflösenden Gleichungen (6. und 9. §. 358.) geben

$$\begin{cases} b = a \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha} \text{ und } c = a \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}, & \text{und durch Weiter-} \\ & \text{rücken,} \\ 6. \begin{cases} c = b \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \beta}, & a = b \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta}, \\ a = c \frac{\sin(\gamma + \beta)}{\sin \gamma}, & b = c \frac{\sin(\gamma + \alpha)}{\sin \gamma}. \end{cases} \end{cases}$$

*B.* Mit den gegebenen drei Stücken, z. B.  $a, \alpha$  und  $\gamma$ , ist wiederum nur ein Dreieck möglich; also kann das gesuchte vierte Stück, z. B.  $b$ , nur einen Werth haben.

*C.* Wegen des Falles, wenn man bei kleineren Winkeln eine grössere Genauigkeit verlangt, findet die obige Bemerkung Statt.

D. Die Berechnung in Zahlen ist der in (I.) ähnlich.

*Aufgabe. III. Aus einer Seite eines Dreiecks und zweien, dieselbe nicht einschließenden Winkeln, die andere anliegende Seite zu finden, also*

aus  $a, \alpha$  und  $\gamma \dots c$ , oder aus  $a, \alpha$  und  $\beta \dots b$ ;  
 aus  $b, \beta$  und  $\alpha \dots a$ , oder aus  $b, \beta$  und  $\gamma \dots c$ ;  
 aus  $c, \gamma$  und  $\beta \dots b$ , oder aus  $c, \gamma$  und  $\alpha \dots a$ .

*Auflösung. A. die auflösenden Gleichungen (2. und 3. §. 358.) geben*

$$7. \begin{cases} c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}, & b = a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \\ a = b \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, & c = b \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}, \\ b = c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, & a = c \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}. \end{cases} \text{ also durch Weiterrücken,}$$

B. Mit den gegebenen drei Stücken, z. B.  $a, \alpha$  und  $\gamma$ , ist nur ein Dreieck möglich; also kann das gesuchte vierte Stück, z. B.  $c$ , nur einen Werth haben.

C. Die Berechnung in Zahlen ist der in (I.) ähnlich.

*Aufgabe. IV. Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel einen der beiden übrigen Winkel zu finden, also*

aus  $a, b, \gamma \dots \alpha$  oder  $\beta$ ,  
 aus  $b, c, \alpha \dots \beta$  oder  $\gamma$ ,  
 aus  $c, a, \beta \dots \gamma$  oder  $\alpha$ .

*Erste Auflösung. A. Die auflösenden Gleichungen (5. und 6. §. 358.) nemlich*

$$\begin{aligned} a \sin \beta &= b \sin \beta \cos \gamma + b \cos \beta \sin \gamma \text{ und} \\ b \sin \alpha &= a \sin \gamma \cos \alpha + a \cos \gamma \sin \alpha; \text{ oder} \\ b \sin \gamma \cos \beta &= a \sin \beta - b \cos \gamma \sin \beta \text{ und} \\ a \sin \gamma \cos \alpha &= b \sin \alpha - a \cos \gamma \sin \alpha \end{aligned}$$

geben, wenn man die zweiten durch  $a \sin \gamma \sin \alpha$ , die ersten durch  $b \sin \gamma \sin \beta$  dividirt,

$$8. \begin{cases} \cot \alpha = \frac{b - a \cos \gamma}{a \sin \gamma}, & \cot \beta = \frac{a - b \cos \gamma}{b \sin \gamma}, \\ \cot \beta = \frac{c - b \cos \alpha}{b \sin \alpha}, & \cot \gamma = \frac{b - c \cos \alpha}{c \sin \alpha}, \\ \cot \gamma = \frac{a - c \cos \beta}{c \sin \beta}, & \cot \alpha = \frac{c - a \cos \beta}{a \sin \beta}; \end{cases} \text{ und durch Weiterrücken,}$$

woraus man die gesuchten Stücke findet.

B. Mit den gegebenen drei Stücken, nemlich zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, ist nur ein Dreieck möglich. Also kann das gesuchte vierte Stück nur einen Werth haben. In der That ist der nächste Winkel, welcher z. B. mit  $\alpha$  einerlei Cotangente hat,  $2\pi + \alpha$  (§. 345. 32.), welcher Winkel größer als  $2\pi$  oder  $4\rho$  ist; und ein solcher Winkel findet in einem Dreiecke nicht Statt.

Zweite Auflösung. Es ist  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a}{b} - 1}$ , und

$$\text{weil } \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \text{ (§. 358. 3.)}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + 1}{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} - 1} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$$

Nun ist  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$  (§. 345. 86.). Also ist

$$9. \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

Es ist aber, wegen  $\alpha + \beta + \gamma = 2\rho$ ,  $\alpha + \beta = 2\rho - \gamma$ , also  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \rho - \frac{1}{2}\gamma$ , folglich  $\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cot \frac{1}{2}\gamma$ .

mithin in (2.)  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\cot \frac{1}{2}\gamma}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$ , woraus

$$10. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}\gamma, \text{ oder} \\ \tan \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \frac{b-a}{b+a} \cot \frac{1}{2}\gamma, \\ \tan \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{1}{2}\alpha, \text{ oder} \\ \tan \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = \frac{c-b}{c+b} \cot \frac{1}{2}\alpha, \text{ und} \\ \tan \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{1}{2}\beta, \text{ oder} \\ \tan \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \frac{a-c}{a+c} \cot \frac{1}{2}\beta \end{array} \right.$$

folgt.

Hieraus findet man den halben Unterschied zweier Winkel des Dreiecks. Die halbe Summe der nemlichen zwei Winkel ist

$$11. \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \varrho - \frac{1}{2}\gamma, \\ \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \varrho - \frac{1}{2}\alpha, \\ \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) = \varrho - \frac{1}{2}\beta. \end{cases}$$

Addirt man zu dieser halben Summe, oder subtrahirt davon den obigen halben Unterschied, so findet man  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , z. B.

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \alpha, \quad \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \alpha \text{ und} \\ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \beta, \quad \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \beta \text{ u. s. w.}$$

Man findet also die gesuchten Stücke aus (10. und 11.).

*Dritte Auflösung.* Man setze

$$12. \quad \frac{a}{b} = \tan \varphi_1, \quad \frac{b}{c} = \tan \varphi_2, \quad \frac{c}{a} = \tan \varphi_3,$$

wo  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  Winkel bezeichnen, die vermittelt dieser Gleichungen durch  $a$  und  $b$ ,  $b$  und  $c$ ,  $c$  und  $a$  gegeben sind. Nun ist z. B.

$$\tan(\varphi_1 - \frac{1}{4}\pi) = \frac{\tan \varphi_1 - \tan \frac{1}{4}\pi}{1 + \tan \varphi_1 \tan \frac{1}{4}\pi} \quad (\S. 345. 24.), \text{ und weil}$$

$$\tan \frac{1}{4}\pi = 1 \text{ ist, } \tan(\varphi_1 - \frac{1}{4}\pi) = \frac{\tan \varphi_1 - 1}{\tan \varphi_1 + 1}, \text{ also weil}$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{a}{b} \text{ war, } \tan(\varphi_1 - \frac{1}{4}\pi) = \frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{a - b}{a + b}. \text{ Es}$$

$$\text{war aber in der zweiten Auflösung } \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{1}{2}\gamma. \text{ Also ist}$$

$$13. \begin{cases} \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \tan(\varphi_1 - \frac{1}{4}\pi) \cot \frac{1}{2}\gamma, \text{ oder} \\ \tan \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \tan(\frac{1}{4}\pi - \varphi_1) \cot \frac{1}{2}\gamma, \text{ und} \\ \tan \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \tan(\varphi_2 - \frac{1}{4}\pi) \cot \frac{1}{2}\alpha, \text{ oder} \\ \tan \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = \tan(\frac{1}{4}\pi - \varphi_2) \cot \frac{1}{2}\alpha, \\ \tan \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) = \tan(\varphi_3 - \frac{1}{4}\pi) \cot \frac{1}{2}\beta, \text{ oder} \\ \tan \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \tan(\frac{1}{4}\pi - \varphi_3) \cot \frac{1}{2}\beta. \end{cases}$$

Vermittelt (12. und 13.) findet man den halben Unterschied der gesuchten Winkel und hierauf die Winkel selbst, wie in der zweiten Auflösung.

Sind nicht sowohl die Seiten, wie z. B.  $a$  und  $b$  selbst, sondern ihre Logarithmen gegeben, so braucht man für die dritte Auflösung nicht, wie für die erste und zweite, erst  $a$  und  $b$  selbst zu suchen, sondern findet aus (12.) z. B.  $\tan \varphi_1$  unmittelbar und hierauf  $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$  aus (13.) und  $\alpha$  aus (11.).

*Vierte Auflösung*, für den Fall, wenn eine der beiden gegebenen Seiten gegen die andere sehr klein ist, und eine besondere Genauigkeit verlangt wird. Es ist (Rechenkunst §. 260.) z. B.

$$14. \begin{cases} \sin \gamma = \frac{e^{\gamma\sqrt{-1}} - e^{-\gamma\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, & \sin \alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \\ \cos \gamma = \frac{e^{\gamma\sqrt{-1}} + e^{-\gamma\sqrt{-1}}}{2}, & \cos \alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2} \end{cases}$$

wo  $e$  die Zahl bedeutet, deren natürlicher Logarithmus 1 ist. Setzt man diese Ausdrücke von  $\sin \gamma$ ,  $\sin \alpha$  und  $\cos \gamma$ ,  $\cos \alpha$  in  $\cot \alpha = \frac{b - a \cos \gamma}{a \sin \gamma}$  (8.), so erhält man, da  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  ist,

$$15. \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}} = \frac{2b - a(e^{\gamma\sqrt{-1}} + e^{-\gamma\sqrt{-1}})}{a(e^{\gamma\sqrt{-1}} - e^{-\gamma\sqrt{-1}})},$$

oder, wenn man einen Augenblick, der Kürze wegen,

$$16. e^{\alpha\sqrt{-1}} = p, \quad e^{\gamma\sqrt{-1}} = q$$

setzt und erwägt, daß  $e^{-\alpha\sqrt{-1}} = \frac{1}{e^{\alpha\sqrt{-1}}}$  und  $e^{-\gamma\sqrt{-1}} = \frac{1}{e^{\gamma\sqrt{-1}}}$  ist,

$$\frac{p + \frac{1}{p}}{p - \frac{1}{p}} = \frac{2b - a\left(q + \frac{1}{q}\right)}{a\left(q - \frac{1}{q}\right)}, \text{ oder}$$

$$\frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} = \frac{2bq - a(q^2 + 1)}{a(q^2 - 1)}, \text{ oder}$$

$(p^2 + 1)a(q^2 - 1) = (p^2 - 1)2bq - (p^2 - 1)a(q^2 + 1)$ , oder  
 $p^2 a(q^2 - 1) + a(q^2 - 1) = p^2(2bq) - p^2 a(q^2 + 1) - 2bq + a(q^2 + 1)$ ,  
 oder  $p^2(2aq^2 - 2bq) = 2a - 2bq$ , woraus

$$p^2 = \frac{a - bq}{aq^2 - bq}, \text{ oder}$$

$$17. p^2 = \frac{b - \frac{a}{q}}{b - aq} = \frac{1 - \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{q}}{1 - \frac{a}{b} \cdot q}$$

folgt. Es ist also vermöge (16.)

$$18. e^{2\alpha\sqrt{-1}} = \frac{1 - \frac{a}{b} e^{-\gamma\sqrt{-1}}}{1 - \frac{a}{b} e^{\gamma\sqrt{-1}}}.$$

Nimmt man hiervon die natürlichen Logarithmen, so erhält man

$$19. 2\alpha\sqrt{-1} = e\left(1 - \frac{a}{b} e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right) - e\left(1 - \frac{a}{b} e^{\gamma\sqrt{-1}}\right).$$

Nun ist nach (Rechenkunst §. 229. II. 4.)



$$e^{\left(1 - \frac{a}{b} e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right)} = -\frac{a}{b} e^{-\gamma\sqrt{-1}} - \frac{a^2}{2b^2} e^{-2\gamma\sqrt{-1}} - \frac{a^3}{3b^3} e^{-3\gamma\sqrt{-1}} \dots$$

$$e^{\left(1 - \frac{a}{b} e^{\gamma\sqrt{-1}}\right)} = -\frac{a}{b} e^{\gamma\sqrt{-1}} - \frac{a^2}{2b^2} e^{2\gamma\sqrt{-1}} - \frac{a^3}{3b^3} e^{3\gamma\sqrt{-1}} \dots$$

Setzt man dieses in (19.) und dividirt zugleich mit  $2\sqrt{-1}$ , so erhält man

$$\alpha = \frac{a}{b} \left( \frac{e^{\gamma\sqrt{-1}} - e^{-\gamma\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right) + \frac{a^2}{2b^2} \left( \frac{e^{2\gamma\sqrt{-1}} - e^{-2\gamma\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right) \dots$$

also vermöge (14.)

$$\alpha = \frac{a}{b} \sin \gamma + \frac{a^2}{2b^2} \sin 2\gamma \dots$$

Es ist also

$$20. \quad \begin{cases} \alpha = \frac{a}{b} \sin \gamma + \frac{a^2}{2b^2} \sin 2\gamma + \frac{a^3}{3b^3} \sin 3\gamma \dots \\ \beta = \frac{b}{a} \sin \gamma + \frac{b^2}{2a^2} \sin 2\gamma + \frac{b^3}{3a^3} \sin 3\gamma \dots \\ \beta = \frac{b}{c} \sin \alpha + \frac{b^2}{2c^2} \sin 2\alpha + \frac{b^3}{3c^3} \sin 3\alpha \dots \\ \gamma = \frac{c}{b} \sin \alpha + \frac{c^2}{2b^2} \sin 2\alpha + \frac{c^3}{3b^3} \sin 3\alpha \dots \\ \gamma = \frac{c}{a} \sin \beta + \frac{c^2}{2a^2} \sin 2\beta + \frac{c^3}{3a^3} \sin 3\beta \dots \\ \alpha = \frac{a}{c} \sin \beta + \frac{a^2}{2c^2} \sin 2\beta + \frac{a^3}{3c^3} \sin 3\beta \dots \end{cases}$$

Diese Ausdrücke geben die Bogen, welche das Maass der gesuchten Winkel für den Halbmesser 1 sind. Sie sind dann nützlich, wenn eine der beiden gegebenen Seiten gegen die andere sehr klein ist, z. B. in dem ersten Ausdruck (20.)  $\alpha$  gegen  $b$ ; denn alsdann convergirt die Reihe, welche  $\alpha$  ausdrückt, schnell.

**Fünfte Auflösung**, für den Fall, wenn der gegebene eingeschlossene Winkel  $\gamma$  wenig von zwei Rechten verschieden ist, also die gesuchten Winkel sehr klein sind und man eine besondere Genauigkeit verlangt.

Auch dann kann man sich wie in (I. C.) der Reihen bedienen, welche die Bogen durch die Sinus und Cosinus ausdrücken.

Zufolge (8.) ist

$$21. \quad \tan \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma},$$

und wenn man

$$22. \quad \gamma = 2\varphi - \tau$$

setzt, wo nun  $\tau$  sehr klein ist,

$$23. \quad \tan \alpha = \frac{a \sin \tau}{b + a \cos \tau}.$$

Setzt man hierin die Reihen für  $\sin \tau$  und  $\cos \tau$ , so erhält man

$$24. \quad \tan \alpha = \frac{a \left( \tau - \frac{\tau^3}{2 \cdot 3} + \frac{\tau^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots \right)}{b + a - \frac{a \tau^2}{2} + \frac{a \tau^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \dots}$$

und wenn man wirklich dividirt und bei der dritten Potestät von  $\tau$  stehen bleibt,

$$25. \quad \tan \alpha = \frac{a \tau}{b + a} \left( 1 + \frac{(2a - b) \tau^2}{6(b + a)} \right).$$

Nun ist

$$26. \quad \alpha = \tan \alpha - \frac{1}{3} \tan^3 \alpha \dots \text{ (Rechenkunst §. 267. L. 1.)}$$

also ist

$$\alpha = \frac{a \tau}{b + a} \left( 1 + \frac{2a - b}{6(b + a)} \tau^2 \right) - \frac{1}{3} \frac{a^3 \tau^3}{(b + a)^3} (1 - \dots)^3, \text{ oder}$$

$$\alpha = \frac{a \tau}{b + a} + \frac{a(2a - b)}{6(b + a)^2} \tau^3 - \frac{a^3 \tau^3}{3(b + a)^3} \tau^3 \dots, \text{ oder}$$

$$\alpha = \frac{a \tau}{a + b} \left( 1 + \frac{(a - b)b}{6(a + b)^2} \tau^2 \right).$$

Den andern Winkel  $\beta$  findet man, wenn man  $a$  mit  $b$  verwechselt, und durch Weiterrücken der Buchstaben überhaupt:

$$27. \quad \begin{cases} \alpha = \frac{a(2\varrho - \gamma)}{a + b} \left[ 1 + \frac{(a - b)b}{6(a + b)^2} (2\varrho - \gamma)^2 \right], \\ \beta = \frac{b(2\varrho - \gamma)}{a + b} \left[ 1 + \frac{(b - a)a}{6(a + b)^2} (2\varrho - \gamma)^2 \right], \\ \beta = \frac{b(2\varrho - \alpha)}{b + c} \left[ 1 + \frac{(b - c)c}{6(b + c)^2} (2\varrho - \alpha)^2 \right], \\ \gamma = \frac{c(2\varrho - \alpha)}{b + c} \left[ 1 + \frac{(c - b)b}{6(b + c)^2} (2\varrho - \alpha)^2 \right], \\ \gamma = \frac{c(2\varrho - \beta)}{c + a} \left[ 1 + \frac{(c - a)a}{6(c + a)^2} (2\varrho - \beta)^2 \right], \\ \alpha = \frac{a(2\varrho - \beta)}{c + a} \left[ 1 + \frac{(a - c)c}{6(c + a)^2} (2\varrho - \beta)^2 \right], \end{cases}$$

welches die Bogen der gesuchten Winkel giebt. Legendre (*éléments de géométrie* XI. edit. pag. 417. 8.) findet die nemlichen Resultate auf einem andern Wege.

**Beispiel.** Es sey

$$a = 134,081, \quad b = 8543,19, \quad \gamma = 178^\circ.5'.18''$$

und es werde  $\alpha$  gesucht.

$\alpha$ ) Rechnet man nach der ersten Auflösung, so erhält man

$$\cos \gamma = -\sin 88^\circ.5'.18'' = -\cos 1^\circ.54'.42''$$

$$\sin \gamma = \sin 1^\circ.54'.42'', \text{ also}$$

$$\cot \alpha = \frac{8543,19 + 134,081 \cdot \cos 1^\circ.54'.42''}{134,081 \sin 1^\circ.54'.42''},$$

also

$$\begin{aligned}
 {}^{10}134,081 &= 0,1273672 + 2 \\
 {}^{10}(\cos 1^\circ.54'.42'') &= 0,9997583 - 1 \\
 {}^{10}(134,081 \cdot \cos 1^\circ.54'.42'') &= 0,1271256 + 2 \\
 134,081 \cdot \cos 1^\circ.54'.42'' &= 134,006 \\
 &+ 8543,19 \\
 &= 8677,196.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{10}(134,081) &= 0,1273672 + 2 \\
 {}^{10}(\sin 1^\circ.54'.42'') &= 0,5232089 - 2 \\
 {}^{10}(134,081 \cdot \sin 1^\circ.54'.42'') &= 0,6605761 + 0 \\
 {}^{10}8677,196 &= 0,9383791 + 3 \\
 \cot \alpha &= 13,2878030 \\
 \alpha &= 0^\circ.1'.47''.
 \end{aligned}$$

$\beta$ ) Nach der zweiten Art erhält man

$$\begin{aligned}
 \cot \frac{1}{2}\gamma &= \cot 89^\circ.2'.39'' = \tan 0^\circ.57'.21'' \\
 b + a &= 8543,19 + 134,081 = 8677,271 \\
 b - a &= 8543,190 - 134,081 = 8409,109 \\
 {}^{10}(8409,109) &= 0,9247500 + 3 \\
 {}^{10}(\cot \frac{1}{2}\gamma) &= 0,2223000 - 2 \\
 {}^{10}((b - a) \cot \frac{1}{2}\gamma) &= 1,1470600 + 1 \\
 - {}^{10}(8677,271) &= 0,9383830 + 3 \\
 {}^{10}(\tan \frac{1}{2}(\beta - \alpha)) &= 0,2086670 - 2 \\
 \frac{1}{2}(\beta - \alpha) &= 0^\circ.55'.34'' \\
 \varphi - \frac{1}{2}\gamma &= \frac{1}{2}(\beta + \alpha) = 0^\circ.57'.21'' \\
 \alpha &= 0^\circ.1'.47'';
 \end{aligned}$$

wie in  $\alpha$ .

$\gamma$ ) Nach der dritten Art erhält man

$$\begin{aligned}
 {}^{10}a &= 1,1273672 + 1 \\
 {}^{10}b &= 0,9316201 + 3 \\
 {}^{10}\tan \varphi &= 0,1967471 - 2 \\
 \varphi &= 0^\circ.53'.57'' \\
 \frac{1}{4}\pi - \varphi &= 44^\circ.6'.3'' \\
 {}^{10}\tan(\frac{1}{4}\pi - \varphi) &= 0,9863666 - 1 \\
 {}^{10}(\cot \frac{1}{2}\gamma) &= 0,2223000 - 2 \\
 {}^{10}(\tan \frac{1}{2}(\beta - \alpha)) &= 1,2086666 - 2 \\
 \frac{1}{2}(\beta - \alpha) &= 0^\circ.55'.34'' \\
 \frac{1}{2}(\beta + \alpha) &= 0^\circ.57'.21'' \\
 \alpha &= 0^\circ.1'.47'';
 \end{aligned}$$

wie in  $\alpha$ .

Die Auflösungen (1. 2. 3.) erfordern, wie man sieht, ungefähr gleich viel Rechnung. In so fern also nicht etwa die Logarithmen der Seiten statt der Seiten selbst gegeben sind und deshalb

die dritte Auflösung vorzuziehen ist, ist die erste, als die einfachste und natürlichste, die beste; denn bei der einfachsten Art zu rechnen darf man am wenigsten fürchten zu fehlen. Die vierte Auflösung kommt nur vor, wenn eine der gegebenen Seiten gegen die andere, und die fünfte, wenn der eingeschlossene Winkel sehr klein ist und eine ungewöhnliche Genauigkeit verlangt wird.

*Anmerkung.* Man pflegt auch wohl den Satz (9.), z. B.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)},$$

der zu der zweiten Auflösung nöthig ist, noch insbesondere aus einer Figur zu beweisen, z. B. wie folgt.

Es sey (Fig. 172.) von den beiden Seiten  $CA$  und  $BA$  des Dreiecks  $ABC$ ,  $CA$  die kleinere und  $CA = CD = CF$ ;  $EAF$  sey eine grade Linie und  $EB$  mit  $AD$  parallel. Alsdann sind die Dreiecke  $ACD$  und  $ACF$  gleichschenkelig über  $AD$  und  $AF$ , also ist  $\kappa = \lambda$  und  $\mu = \nu$ , folglich  $\kappa + \mu = \lambda + \nu$ , desgleichen, weil  $\kappa + \mu + \lambda + \nu = 2\varrho$  ist,  $\kappa + \mu$  oder  $DAF = \varrho$ , folglich auch  $BEF = \varrho$ , weil  $BE$  mit  $DA$  parallel seyn soll. Nun ist, wegen eben dieser Parallelen,  $\varepsilon = \tau = \alpha - \kappa$ . Aber  $\alpha + \beta + \gamma = 2\varrho = \kappa + \lambda + \gamma$ , und, weil  $\kappa = \lambda$  ist,  $\alpha + \beta + \gamma = 2\kappa + \gamma$ , also  $\kappa = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ , folglich  $\tau$  oder  $\varepsilon = \alpha - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ . Desgleichen ist  $\varepsilon + \beta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ . Also ist  $EBA = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$  und  $EBF = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ .

Nun ist in den rechtwinkligen Dreiecken  $BEA$  und  $BEF$   $EA = EB \tan EBA$  und  $EF = EB \tan EBF$ ; also ist

$$\frac{EF}{EA} = \frac{\tan EBF}{\tan EBA} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}.$$

In den rechtwinkligen Dreiecken  $BEF$  und  $DAF$  ist aber

$$\frac{EF}{EA} = \frac{BF}{BD};$$

also ist  $\frac{BF}{BD} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$ . Da nun  $BF = a + b$  und  $BD = a - b$  ist, so ist

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)};$$

was zu beweisen war.

Man sehe über dergleichen Beweise die Bemerkungen am Schlusse der folgenden Aufgabe (V.).

**Aufgabe. V.** Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu finden. Also

aus  $a, b, \gamma \dots c,$

aus  $b, c, \alpha \dots a,$

aus  $c, a, \beta \dots b.$

**Erste Auflösung.** Die auflösende Gleichung (§. 358.) giebt

$$28. \begin{cases} c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}; \text{ also auch} \\ a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} \text{ und} \\ b = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta}. \end{cases}$$

Mit den gegebenen drei Stücken, nemlich zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, ist nur ein Dreieck möglich. Also kann das gesuchte vierte Stück nur einen Werth haben.

Sind etwa nicht sowohl die Seiten selbst, sondern vielmehr ihre Logarithmen gegeben, so braucht man nicht erst die Seiten zu suchen, sondern findet die dritte Seite auch unmittelbar.

**Zweite Auflösung.** Es ist z. B.  $\cos \gamma = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma$  (§. 345. 36.). Also ist in (28.)  $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + 4ab \sin^2 \frac{1}{2} \gamma}$ , oder, weil  $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$  ist,

$$c = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab \sin^2 \frac{1}{2} \gamma}, \text{ oder} \\ c = (a-b) \sqrt{1 + \frac{4ab \sin^2 \frac{1}{2} \gamma}{(a-b)^2}}.$$

Setzt man nun

$$29. \begin{cases} \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma}{a-b} \sqrt{ab} = \tan \varphi_1 \text{ und analog:} \\ \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha}{b-c} \sqrt{bc} = \tan \varphi_2, \\ \frac{2 \sin \frac{1}{2} \beta}{c-a} \sqrt{ca} = \tan \varphi_3, \end{cases}$$

wonach die Winkel  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sich richten, so erhält man, weil alsdann z. B.  $\frac{4 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma \cdot ab}{(a-b)^2} = \tan^2 \varphi_1$  ist,

$$c = (a-b) \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_1} = (a-b) \sec \varphi_1, \text{ oder}$$

$$30. \quad c = \frac{a-b}{\cos \varphi_1}, \quad a = \frac{b-c}{\cos \varphi_2}, \quad b = \frac{c-a}{\cos \varphi_3}.$$

Vermittelst der Ausdrücke (29. und 30.) läßt sich  $c$  aus  $a, b$  und  $\gamma$  finden.

Diese Auflösung giebt die dritte Seite in dem Fall wenn der gegenüberliegende Winkel sehr

klein ist, genauer als die erste, weil in (29.) der Sinus des halben Winkels zu nehmen ist, den man in den Tafeln genauer findet als den Cosinus eines sehr kleinen Winkels, in (28.).

*Dritte Auflösung.* In der zweiten Auflösung ist z. B.  $c = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab \sin^2 \frac{1}{2} \gamma}$ . Es ist aber  $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$ , also auch

$$c = \sqrt{(a-b)^2 + (a+b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma - (a-b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma}, \text{ oder}$$

$$c = \sqrt{(a+b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma + (a-b)^2 (1 - \sin^2 \frac{1}{2} \gamma)}, \text{ oder}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \sqrt{[(a+b) \sin \frac{1}{2} \gamma]^2 + [(a-b) \cos \frac{1}{2} \gamma]^2} \text{ und} \\ 31. \left\{ \begin{array}{l} a = \sqrt{[(b+c) \sin \frac{1}{2} \alpha]^2 + [(b-c) \cos \frac{1}{2} \alpha]^2}, \\ b = \sqrt{[(c+a) \sin \frac{1}{2} \beta]^2 + [(c-a) \cos \frac{1}{2} \beta]^2}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Diese Auflösung giebt die dritte Seite dann genauer als die erste, wenn der gegebene Winkel sehr klein und zugleich der Unterschied der gegebenen Seiten sehr klein ist.

*Vierte Auflösung.* Man suche erst aus den gegebenen Stücken einen der beiden übrigen Winkel, nach der ersten Art (IV.) nemlich aus

$$32. \cot \alpha = \frac{b - a \cos \gamma}{a \sin \gamma}, \cot \beta = \frac{c - b \cos \alpha}{b \sin \alpha} \text{ u. } \cot \gamma = \frac{a - c \cos \beta}{c \sin \beta}$$

(8.). Ist z. B.  $\alpha$  gefunden, so erhält man  $c$ , aus den Gleichungen (2. §. 358.) nemlich:

$$33. c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \text{ und } a = b \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, b = c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

*Fünfte Auflösung.* Man suche erst aus den gegebenen Stücken einen Winkel nach der zweiten Art (IV.), nemlich aus

$$34. \left\{ \begin{array}{l} \tan \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2} \gamma \text{ oder} \\ \tan \frac{1}{2} (\beta - \alpha) = \frac{b-a}{b+a} \cot \frac{1}{2} \gamma, \\ \tan \frac{1}{2} (\beta - \gamma) = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{1}{2} \alpha \text{ oder} \\ \tan \frac{1}{2} (\gamma - \beta) = \frac{c-b}{c+b} \cot \frac{1}{2} \alpha, \\ \tan \frac{1}{2} (\gamma - \alpha) = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{1}{2} \beta \text{ oder} \\ \tan \frac{1}{2} (\alpha - \gamma) = \frac{a-c}{a+c} \cot \frac{1}{2} \beta, \end{array} \right. \quad (10.)$$

und

$$35. \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \varrho - \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \varrho - \frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) = \varrho - \frac{1}{2}\beta \end{cases} \quad (11.).$$

Ist hieraus z. B.  $\alpha$  gefunden, so erhält man  $c$ , wie in der vierten Auflösung, aus

$$36. c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}, \quad a = b \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{und} \quad b = c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad (33.).$$

*Sechste Auflösung.* Man suche erst aus den gegebenen Stücken einen Winkel nach der dritten Art (IV.), nemlich aus

$$37. \frac{a}{b} = \tan \varphi_1, \quad \frac{b}{c} = \tan \varphi_2 \quad \text{und} \quad \frac{c}{a} = \tan \varphi_3 \quad (12.),$$

$$38. \begin{cases} \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \tan(\varphi_1 - \frac{1}{4}\pi) \cot \frac{1}{2}\gamma \quad \text{oder} \\ \tan \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \tan(\frac{1}{4}\pi - \varphi_1) \cot \frac{1}{2}\gamma, \\ \tan \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \tan(\varphi_2 - \frac{1}{4}\pi) \cot \frac{1}{2}\alpha \quad \text{oder} \\ \tan \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = \tan(\frac{1}{4}\pi - \varphi_2) \cot \frac{1}{2}\alpha, \\ \tan \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) = \tan(\varphi_3 - \frac{1}{4}\pi) \cot \frac{1}{2}\beta \quad \text{oder} \\ \tan \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \tan(\frac{1}{4}\pi - \varphi_3) \cot \frac{1}{2}\beta, \end{cases} \quad (13.)$$

und

$$39. \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \varrho - \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \varrho - \frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) = \varrho - \frac{1}{2}\beta \end{cases} \quad (11.).$$

Ist hieraus z. B.  $\alpha$  gefunden, so erhält man  $c$ , wie in der vierten Auflösung, aus

$$40. c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}, \quad a = b \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad b = c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad (33.).$$

Mit dieser Auflösung verhält es sich wie mit der ersten. Sind etwa nicht die beiden Seiten selbst, sondern ihre Logarithmen gegeben, so braucht man die Seiten nicht erst zu suchen, sondern kann mit den Logarithmen unmittelbar rechnen.

*Siebente Auflösung,* für den Fall, wenn eine von den beiden gegebenen Seiten gegen die andere sehr klein ist, und eine große Genauigkeit verlangt wird.

Es ist z. B.

$$41. a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = (a - b e^{\gamma\sqrt{-1}})(a - b e^{-\gamma\sqrt{-1}});$$

denn multiplicirt man die beiden Factoren rechterhand, so erhält man

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 - ab(e^{\gamma\sqrt{-1}} + e^{-\gamma\sqrt{-1}}) + b^2, \quad \text{oder}$$

$$-2ab \cos \gamma = -ab(e^{\gamma\sqrt{-1}} + e^{-\gamma\sqrt{-1}}), \quad \text{oder}$$

$$\cos \gamma = \frac{e^{\gamma\sqrt{-1}} + e^{-\gamma\sqrt{-1}}}{2},$$

wie gehörig.

Nun ist, wenn  $a$  und  $b$  die beiden gegebenen Seiten eines Dreiecks sind und  $\gamma$  der eingeschlossene Winkel ist,

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2 \quad (28.),$$

wo  $c$  die dritte Seite ist. Es ist also

$$42. \quad c^2 = (a - b e^{\gamma\sqrt{-1}})(a - b e^{-\gamma\sqrt{-1}}) \\ = a^2 \left(1 - \frac{b}{a} e^{\gamma\sqrt{-1}}\right) \left(1 - \frac{b}{a} e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right).$$

Nimmt man hiervon die natürlichen Logarithmen, so erhält man

$$2 \cdot {}^e c = 2 \cdot {}^e a + {}^e \left(1 - \frac{b}{a} e^{\gamma\sqrt{-1}}\right) + {}^e \left(1 - \frac{b}{a} e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right),$$

oder nach (Rechenkunst §. 229. II. 11.)

$$2 \cdot {}^e c = 2 \cdot {}^e a - \frac{b}{a} e^{\gamma\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2} e^{2\gamma\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3} e^{3\gamma\sqrt{-1}} \dots \\ - \frac{b}{a} e^{-\gamma\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2} e^{-2\gamma\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3} e^{-3\gamma\sqrt{-1}} \dots,$$

oder

$$2 \cdot {}^e c = 2 \cdot {}^e a - 2 \frac{b}{a} \cos \gamma - 2 \frac{b^2}{2a^2} \cos 2\gamma - 2 \frac{b^3}{3a^3} \cos 3\gamma \dots, \text{ oder}$$

$$43. \quad \begin{cases} {}^e c = {}^e a - \frac{b}{a} \cos \gamma - \frac{b^2}{2a^2} \cos 2\gamma - \frac{b^3}{3a^3} \cos 3\gamma \dots, \text{ und} \\ {}^e a = {}^e b - \frac{c}{b} \cos \alpha - \frac{c^2}{2b^2} \cos 2\alpha - \frac{c^3}{3b^3} \cos 3\alpha \dots \\ {}^e b = {}^e c - \frac{a}{c} \cos \beta - \frac{a^2}{2c^2} \cos 2\beta - \frac{a^3}{3c^3} \cos 3\beta \dots; \end{cases}$$

oder auch, weil man die beiden gegebenen Seiten nach Belieben verwechseln kann,

$$44. \quad \begin{cases} {}^e c = {}^e b - \frac{a}{b} \cos \gamma - \frac{a^2}{2b^2} \cos 2\gamma - \frac{a^3}{3b^3} \cos 3\gamma \dots; \\ {}^e a = {}^e c - \frac{b}{c} \cos \alpha - \frac{b^2}{2c^2} \cos 2\alpha - \frac{b^3}{3c^3} \cos 3\alpha \dots, \\ {}^e b = {}^e a - \frac{c}{a} \cos \beta - \frac{c^2}{2a^2} \cos 2\beta - \frac{c^3}{3a^3} \cos 3\beta \dots \end{cases}$$

Man findet hierdurch aus zwei gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite.

Die Reihen convergiren um so mehr, je kleiner eine der beiden gegebenen Seiten gegen die andere ist.

*Achte Auflösung*, für den Fall, wenn der eingeschlossene Winkel wenig von zwei Rechten abweicht.

Es ist z. B.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Man setze  $\gamma = 2\rho - \tau$ , wo nun  $\tau$  nach der Voraussetzung sehr klein ist. Da  $\cos \gamma = -\cos \tau$ , so ist

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \tau,$$

oder, weil  $\cos \tau = 1 - \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \dots (2.)$ ,

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab \frac{\tau^2}{2} + 2ab \frac{\tau^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \dots; \text{ oder}$$

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab \frac{\tau^2}{2} + 2ab \frac{\tau^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \dots$$



δ) Nach der vierten Art erhält man

$$\begin{aligned}
 {}^{10}a &= 0,7246698 + 1 \\
 {}^{10}(\cos \gamma) &= 0,2850380 - 1 \\
 {}^{10}(a \cos \gamma) &= 1,0097078 + 0 \\
 a \cos \gamma &= 10,2260 \\
 b &= 68,5328 \\
 b - a \cos \gamma &= 58,3068 \\
 {}^{10}a &= 0,7246698 + 1 \\
 {}^{10}(\sin \gamma) &= 0,9917770 - 1 \\
 {}^{10}(a \sin \gamma) &= 0,7164468 + 1 \\
 {}^{10}(b - a \cos \gamma) &= 0,7657191 + 1 \\
 {}^{10}(\cot \alpha) &= 0,0492723 + 0, \\
 \alpha &= 41^\circ. 55'. 23''. \\
 {}^{10}a &= 0,7246698 + 1 \\
 {}^{10}(\sin \gamma) &= 0,9917772 - 1 \\
 {}^{10}(a \sin \gamma) &= 1,7164470 + 0 \\
 {}^{10}(\sin \alpha) &= 0,8234513 - 1 \\
 {}^{10}\left(a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}\right) &= 0,8929957 + 1 = {}^{10}c \\
 c &= 78,162;
 \end{aligned}$$

wie in α.

ε) Nach der fünften Auflösung erhält man

$$\begin{aligned}
 b - a &= 15,4847 \\
 b + a &= 121,5809 \\
 \frac{1}{2}\gamma &= 39^\circ. 26'. 34'', \\
 \frac{1}{2}(\beta + \alpha) &= 90 - \frac{1}{2}\gamma = 50^\circ. 33'. 26''. \\
 {}^{10}(b - a) &= 0,1899028 + 1 \\
 {}^{10}(\cot \frac{1}{2}\gamma) &= 0,0848053 + 0 \\
 {}^{10}((b - a) \cot \frac{1}{2}\gamma) &= 1,2747081 + 0 \\
 {}^{10}(b + a) &= 1,0848651 + 1 \\
 \left(\frac{b - a}{b + a} \cot \frac{1}{2}\gamma\right) &= 0,1898430 - 1 = {}^{10}(\tan \frac{1}{2}(\beta - \alpha)) \\
 \frac{1}{2}(\beta - \alpha) &= 8^\circ. 48'. 3'' \\
 \alpha &= 50^\circ. 33'. 26'' - 8^\circ. 48'. 3'' = 41^\circ. 45'. 23'' \\
 {}^{10}a &= 0,7246698 + 1 \\
 {}^{10}(\sin \gamma) &= {}^{10}(\cos 11^\circ. 6'. 52'') = 0,9917772 - 1 \\
 {}^{10}(a \sin \gamma) &= 1,7164470 + 0 \\
 {}^{10}(\sin \alpha) &= {}^{10}(\sin 41^\circ. 45'. 23'') = 0,8234513 - 1 \\
 {}^{10}\left(a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}\right) &= 0,8929957 + 1 = {}^{10}c, \\
 c &= 78,162;
 \end{aligned}$$

wie in (α).

5) Nach der sechsten Art erhält man

$${}^{10}\alpha = 1,7246698 + 0$$

$${}^{10}b = 0,8358984 + 1$$

$${}^{10}\tan \varphi = 0,8887714 - 1,$$

$$\varphi = 37^\circ.44'.30'',$$

$$\frac{1}{2}\pi - \varphi = + 7^\circ.15'.30''.$$

$${}^{10}\tan\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right) = 0,1050460 - 1$$

$${}^{10}(\cot \frac{1}{2}\gamma) = 0,0848053 + 0$$

$${}^{10}\tan \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 0,1898513 - 1$$

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 8^\circ.48'.3''.$$

$$\frac{1}{2}(\beta + \alpha) = \rho - \frac{1}{2}\gamma = 60^\circ.33'.26'',$$

$$\alpha = 50^\circ.33'.26'' - 8^\circ.48'.3'' = 41^\circ.45'.23''$$

$${}^{10}\alpha = 0,7246698 + 1$$

$${}^{10}(\sin \gamma) = 0,9917770 - 1$$

$${}^{10}(a \sin \gamma) = 1,7164468 + 0$$

$${}^{10}(\sin \alpha) = 0,8234513 - 1$$

$${}^{10}\left(a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}\right) = 0,8929957 + 1 = {}^{10}c$$

$$c = 78,162;$$

wie in ( $\alpha$ ).

Wie man sieht, erfordern alle sechs Auflösungen ungefähr gleich viel Rechnung. Daher ist in der Regel, wenn nicht etwa wegen der Kleinheit des eingeschlossenen Winkels, und mehrerer Genauigkeit wegen, oder weil etwa nicht die Seiten selbst, sondern ihre Logarithmen gegeben sind, eine andere Auflösung nothwendig ist, die erste Auflösung, als die einfachste und natürlichste, die beste. Die siebente und achte Auflösung kommen nur vor, wenn eine ungewöhnliche Genauigkeit verlangt wird.

*Anmerkung.* Den Ausdruck (31.), auf welchem die dritte Auflösung beruht, pflegt man wieder, wie den Ausdruck (9.) in (IV.), auch für sich aus einer Figur zu beweisen, z. B. wie folgt.

Es sey wie vorhin (Fig. 172.)  $CD = CA$ ,  $GB$  mit  $AD$  parallel, und  $CG$  und  $BK$  auf  $GB$  senkrecht, so ist  $GH = BK$ , und  $GB = HK$ . Die grade Linie  $CG$  halbirte aber den Winkel  $\gamma$ ; denn wegen  $CA = CD$  und  $CH = CH$  sind die rechtwinkligen Dreiecke  $CHD$  und  $CHA$ , und folglich die Winkel  $GCB$  und  $HCA$  gleich; also ist in den rechtwinkligen Dreiecken  $GCB$  und  $HCA$ ,

$$GB = a \sin \frac{1}{2}\gamma, \quad GC = a \cos \frac{1}{2}\gamma;$$

$$AH = b \sin \frac{1}{2}\gamma, \quad HC = b \cos \frac{1}{2}\gamma.$$

Da nun  $GB + AH = AK$  und  $GC - HC = BK$  ist, so ist

$$AK = (a + b) \sin \frac{1}{2} \gamma \text{ und } BK = (a - b) \cos \frac{1}{2} \gamma.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck  $AKB$  ist aber  $\sqrt{(AK^2 + BK^2)} = AB = c$ . Also ist

$$c = \sqrt{[(a + b) \sin \frac{1}{2} \gamma]^2 + [(a - b) \cos \frac{1}{2} \gamma]^2},$$

welches die erste Gleichung (31.) ist.

Dergleichen besondere Beweise einzelner Sätze aus der Figur sind zwar zur Uebung im Erkennen und Entwickeln der geometrischen Eigenschaften der Figuren sehr nützlich; allein es ist nicht gut, wenn man darauf Sätze oder Auflösungen von Aufgaben, die, wie die obigen, aus frühern, allgemein bewiesenen Sätzen folgen, gründet, oder dieselben gar davon abhängig macht. Denn die allgemeinen Sätze müssen nicht allein ohne die besondern dennoch aufgestellt werden, so daß das Nämliche zweimal geschieht, sondern das Gedächtniß wird auch durch die besonderen Beweise unnütz belastet und einer der Hauptvorthelle der Allgemeinheit, daß sie mehreres Einzelne zusammenfasset und den Ueberblick des Zusammenhanges und des Systems der Sätze, ohne welche keine wahre Einsicht Statt findet, erleichtert, geht verloren.

*Aufgaben VI. Aus zwei gegebenen Seiten eines Dreiecks und einem anliegenden Winkel den andern anliegenden Winkel zu finden, also*

aus  $a, c$  und  $\gamma \dots \alpha,$

aus  $b, a$  und  $\alpha \dots \beta,$

aus  $c, b$  und  $\beta \dots \gamma.$

*Auflösung. A. Aus der auflösenden Gleichung (3. §. 358.) folgt*

$$46. \sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha;$$

also ist auch  $\sin \gamma = \frac{c}{b} \sin \beta, \sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma.$

B. Durch die gegebenen drei Stücke, nemlich zwei Seiten und einen anliegenden Winkel, z. B.  $b, a$  und  $\alpha$ , wird aber das Dreieck nicht unbedingt bestimmt, sondern nur dann, wenn der gegebene Winkel der größern von den beiden gegebenen Seiten gegenüber liegt (§. 53.). Der Ausdruck (46.) kann also auch den gesuchten Winkel nicht unbedingt geben.

In der That haben z. B. die beiden Winkel  $\beta$  und  $2\varrho - \beta$  einerlei Sinus, also ist, wenn man

$$47. 2\varrho - \beta = \beta,$$

setzt, eben so wohl

$$48. \sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha, \text{ als}$$

$$49. \sin \beta_1 = \frac{b}{a} \sin \alpha.$$

Es sind drei Fälle möglich.

Erster Fall. Es sey

$$50. a > b,$$

so ist  $\frac{b}{a} < 1$ , und folglich, vermöge  $\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha$ ,  $\sin \beta < \sin \alpha$ , also eben so  $\sin \beta_1 < \sin \alpha$ , oder  $\sin(2\rho - \beta) < \sin(2\rho - \alpha)$ .

Nun kann  $\alpha$  spitz oder stumpf seyn, weil  $a$  die grössere von den beiden Seiten  $a$  und  $b$  seyn soll.

Es sey  $\alpha$  spitz oder  $< \rho$ , so ist wegen  $\sin \beta < \sin \alpha$ ,  $\beta < \alpha$ , also  $2\rho - \beta > 2\rho - \alpha$ . Aus  $2\rho - \beta > 2\rho - \alpha$  aber folgt  $(2\rho - \beta) + \alpha > 2\rho$ , oder  $\beta_1 + \alpha > 2\rho$ , so daß die Summe des gegebenen Winkels  $\alpha$  und des gesuchten Winkels  $\beta_1$  grösser als zwei Rechte seyn müßte, was nicht angeht. Also findet der zweite Winkel  $\beta_1 = 2\rho - \beta$  nicht Statt; sondern nur der erste  $\beta$ .

Es sey  $\alpha$  stumpf oder  $> \rho$ , so ist wegen  $\sin \beta < \sin \alpha$ ,  $\beta > \alpha$ , also  $2\rho - \beta < 2\rho - \alpha$ . Aus  $2\rho - \beta < 2\rho - \alpha$  aber folgt  $(2\rho - \beta) + \alpha < 2\rho$  oder  $\beta_1 + \alpha < 2\rho$ , welches seyn kann. Hingegen  $\beta > \alpha$  ist nicht möglich, weil  $\alpha$  schon stumpf ist und mithin  $\beta$  um so mehr stumpf seyn würde, ein Dreieck aber nicht zwei stumpfe Winkel haben kann. Also findet der erste Winkel  $\beta$  nicht Statt, sondern nur der zweite  $\beta_1$ .

Ist daher  $a < b$ , so giebt es zu den gegebenen drei Stücken  $b$ ,  $a$  und  $\alpha$  immer nur einen Winkel  $\beta$ , und folglich nur ein Dreieck. Und zwar ist

$$51. \sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha, \text{ wenn } \alpha < \rho \text{ ist, und}$$

$$52. \sin(2\rho - \beta) = \frac{b}{a} \sin \beta, \text{ wenn } \alpha > \rho \text{ ist.}$$

Zweiter Fall. Es sey

$$53. a < b, \text{ aber zugleich } a > b \sin \alpha.$$

Alsdann ist  $\frac{b \sin \alpha}{a} < 1$ , folglich, weil  $\frac{b \sin \alpha}{a} = \sin \beta$  (46.),

$\sin \beta < 1$ . Da der Sinus von  $\beta$  kleiner als 1 ist, so ist überhaupt der Winkel  $\beta$ , und mit den gegebenen Stücken  $b$ ,  $a$  und  $\alpha$  ein Dreieck möglich.

Da  $a$  die kleinere von den beiden Seiten  $b$  und  $c$  seyn soll, so kann der ihr gegenüberliegende Winkel  $\alpha$  nur spitz oder kleiner als  $\varrho$  seyn; denn wäre er stumpf oder gröfser als  $\varrho$ , so wäre der der gröfsern Seite  $b$  gegenüberliegende Winkel  $\beta$  noch um so mehr  $> \varrho$  und folglich  $\beta + \alpha > 2\varrho$ ; welches nicht seyn kann.

Da nun  $a < b$ , also der  $b$  gegenüberliegende Winkel  $\beta$  gröfser als  $\alpha$  ist, so kann  $\beta$  sowohl spitz als stumpf seyn. Und folglich finden die beiden Winkel  $\beta$  und  $\beta_1$  Statt.

Ist daher  $a < b$  und zugleich  $a < b \sin \alpha$ , so giebt es zu den gegebenen drei Stücken  $b$ ,  $a$  und  $\alpha$  zwei Winkel  $\beta$  und  $2\varrho - \beta$ , und folglich zwei verschiedene Dreiecke mit den nemlichen Stücken  $b$ ,  $a$  und  $\alpha$ . Und zwar ist sowohl

$$54. \sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha, \text{ als}$$

$$55. \sin(2\varrho - \beta) = \frac{b}{a} \sin \alpha.$$

Dritter Fall. Es sey

$$56. a < b, \text{ aber zugleich } a < b \sin \alpha.$$

Alsdann ist vermöge  $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$ ,  $\sin \beta > 1$ . Da es aber keinen Sinus giebt, der gröfser ist als 1, so existirt der Winkel  $\beta$  gar nicht. Und folglich giebt es gar kein Dreieck, welches die gegebenen Stücke  $b$ ,  $a$  und  $\alpha$  hätte.

C. Findet sich, dafs  $\beta$  einem rechten Winkel sehr nahe kommt, so geben die Tafeln den Winkel  $\beta$  aus  $\sin \beta$  wenig genau, weil die Sinus von Winkeln, die beinahe rechte sind, wenig von einander abweichen. Alsdann kann man sich des Ausdrucks

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) &= \sin \frac{1}{4}\pi \cos x - \cos \frac{1}{4}\pi \sin x \\ &= (\cos x - \sin x) \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{(1 - \sin 2x)} \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (\S. 345. 51.), \text{ also} \\ 57. \sin\left(\frac{1}{4}\pi - x\right) &= \sqrt{\left(\frac{1 - \sin 2x}{2}\right)} \end{aligned}$$

bedienen, welcher, wenn man  $\alpha$  statt  $2x$  und  $\frac{1}{2}\varrho$  statt  $\frac{1}{4}\pi$  setzt,

$$68. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}(\varrho - \alpha) = \sqrt{\left(\frac{1 - \sin \alpha}{2}\right)} \text{ und} \\ \sin \frac{1}{2}(\varrho - \beta) = \sqrt{\left(\frac{1 - \sin \beta}{2}\right)}, \\ \sin \frac{1}{2}(\varrho - \gamma) = \sqrt{\left(\frac{1 - \sin \gamma}{2}\right)}. \end{cases}$$

oder wenn man z. B. für  $\sin \beta$  seinen Ausdruck  $\frac{b}{a} \sin \alpha$

setzt,  $\sin \frac{1}{2}(\varrho - \beta) = \sqrt{\left(\frac{1 - \frac{b}{a} \sin \alpha}{2}\right)}$ , also

$$69. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}(\varrho - \alpha) = \sqrt{\left(\frac{c - a \sin \gamma}{2c}\right)}, \\ \sin \frac{1}{2}(\varrho - \beta) = \sqrt{\left(\frac{a - b \sin \alpha}{2a}\right)}, \\ \sin \frac{1}{2}(\varrho - \gamma) = \sqrt{\left(\frac{b - c \sin \beta}{2b}\right)} \end{cases}$$

gibt. Da z. B.  $\beta$  und  $\varrho$  wenig verschieden sind, so ist  $\varrho - \beta$ , und um so mehr  $\frac{1}{2}(\varrho - \beta)$  sehr klein und den Sinus sehr kleiner Winkel geben die Tafeln am genauesten.

Die Kennzeichen ob nur ein, oder ob zwei Dreiecke, oder ob gar keins möglich ist, bleiben übrigens die nemlichen.

D. Sind der gegebene und der gesuchte Winkel sehr klein oder einer von beiden wenig von  $90^\circ$  verschieden, so kann man sich auch der Reihen, die den Sinus durch den Bogen, und umgekehrt, geben, bedienen.

Erstlich. Es sey der gegebene Winkel, z. B. in (46.)  $\alpha$  sehr klein und die ihm gegenüberliegende Seite  $a$  gröfser als die andere gegebene Seite  $b$ , so wird der gesuchte, der Seite  $b$  gegenüberliegende Winkel  $\beta$  noch kleiner seyn und es gibt nach (B. Erster Fall) nur ein Dreieck.

Man setze statt  $\sin \alpha$ , wenn  $\alpha_1$  den zu dem Winkel  $\alpha$  gehörigen Bogen bedeutet, die Reihe

$$60. \sin \alpha = \alpha_1 - \frac{\alpha_1^3}{2.3} + \frac{\alpha_1^5}{2.3.4.5} \dots (2.),$$

so erhält man, wenn man, weil  $\alpha$  sehr klein ist, schon bei dem zweiten Gliede stehen bleibt,

$$61. \sin \beta = \frac{b}{a} \left( \alpha_1 - \frac{\alpha_1^3}{2.3} \right).$$

Nun ist, wenn  $\beta_1$  den Bogen zum Winkel  $\beta$  bezeichnet,

$$62. \beta_1 = \sin \beta + \frac{1}{6} \sin \beta^3 + \frac{1.5}{2.4.5} \sin \beta^5 \dots (\S. 345. 154.).$$

Also ist, wenn man  $\sin \beta$  aus (61.) setzt, und da  $\sin \beta$  sehr klein ist, wiederum schon bei dem zweiten Gliede stehen bleibt,

$$\beta_1 = \frac{b}{a} \left( \alpha_1 - \frac{\alpha_1^3}{2.3} \right) + \frac{1}{6} \frac{b^3}{a^3} (\alpha_1 \dots)^3, \text{ oder}$$

$$\beta_1 = \frac{b}{a} \alpha_1 \left( 1 - \frac{1}{6} \alpha_1^2 + \frac{1}{6} \frac{b^2}{a^2} \alpha_1^2 \right), \text{ oder}$$

$$63. \begin{cases} \beta_1 = \frac{b}{a} \alpha_1 \left( 1 - \frac{a^2 - b^2}{6a^2} \alpha_1^2 \right); \text{ also auch} \\ \gamma_1 = \frac{c}{b} \beta_1 \left( 1 - \frac{b^2 - c^2}{6b^2} \beta_1^2 \right), \\ \alpha_1 = \frac{a}{c} \gamma_1 \left( 1 - \frac{c^2 - a^2}{6c^2} \gamma_1^2 \right). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke geben z. B.  $\beta$  aus  $b$ ,  $a$  und  $\alpha$ , wenn  $a > b$  und  $\alpha$  sehr klein ist.

Zweitens. Es sey der gegebene Winkel, z. B. in (46.)  $\alpha$ , wenig von  $2\varphi$  verschieden und also die ihm gegenüberliegende Seite  $a$  nothwendig gröfser als die andere gegebene Seite  $b$ , so ist auch nothwendig  $\sin \beta$  und  $\beta_1$  sehr klein. Es bleibt, wie leicht zu sehen, Alles wie im ersten Falle, nur dafs man  $2\varphi - \alpha_1$  statt  $\alpha_1$  setzen mufs. Man erhält also

$$64. \begin{cases} \beta_1 = \frac{b}{a} (2\varphi - \alpha_1) \left( 1 - \frac{a^2 - b^2}{6a^2} (2\varphi - \alpha_1)^2 \right), \\ \gamma_1 = \frac{c}{b} (2\varphi - \beta_1) \left( 1 - \frac{b^2 - c^2}{6b^2} (2\varphi - \beta_1)^2 \right), \\ \alpha_1 = \frac{a}{c} (2\varphi - \gamma_1) \left( 1 - \frac{c^2 - a^2}{6c^2} (2\varphi - \gamma_1)^2 \right). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke geben z. B.  $\beta$  aus  $b$ ,  $a$  und  $\alpha$ , wenn  $a$  sehr wenig von  $2\varphi$  verschieden ist.

Drittens. Es sey der gegebene Winkel, z. B. in (46.)  $\alpha$  sehr klein und die ihm gegenüberliegende Seite  $a$  zwar kleiner als die andere gegebene Seite  $b$ , aber  $a \sin \alpha$  noch sehr klein gegen  $a$ , so ist auch hier nothwendig  $\sin \beta$  sehr klein und folglich  $\beta$  entweder sehr klein, oder sehr nahe an  $2\varphi$ ; denn in  $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$  ist  $\frac{b \sin \alpha}{a}$  nach der Voraussetzung ein sehr kleiner Bruch. Die Rechnung bleibt, wie leicht zu sehen, die nemliche wie im ersten Falle und man findet, wie dort,

$$65. \begin{cases} \beta_1 = \frac{b}{a} \alpha_1 \left( 1 - \frac{b^2 - a^2}{6a^2} \alpha_1^2 \right), \\ \gamma_1 = \frac{c}{b} \beta_1 \left( 1 + \frac{c^2 - b^2}{6b^2} \beta_1^2 \right), \\ \alpha_1 = \frac{a}{c} \gamma_1 \left( 1 + \frac{a^2 - c^2}{6c^2} \gamma_1^2 \right). \end{cases}$$

Da aber jetzt, zu Folge (B. Zweiter Fall) zwei Dreiecke existiren, so gehören die Bogen  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $\alpha_1$  sowohl zu den Winkeln  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$ , als zu den Winkeln  $2\varphi - \beta$ ,  $2\varphi - \gamma$  und  $2\varphi - \alpha$ .

Man findet durch die Ausdrücke (65.) z. B.  $\beta$  aus  $a$  und  $\alpha$ , wenn  $\alpha$  sehr klein und  $b > a$ , aber  $b \sin \alpha$  gegen  $a$  sehr klein ist.

**Beispiele. I. A.** Es sey

$$b = 89.125, \quad a = 103.47$$

und  $\alpha$  spitz, z. B.  $\alpha = 18^\circ : 35' : 49''$ , so ist

$$\begin{aligned} 10b &= 0,9499995 + 1 \\ 10(\sin \alpha) &= 0,5036664 - 1 \\ 10(b \sin \alpha) &= 1,4536659 + 0 \\ 10a &= 0,0148144 + 2 \\ 10(\sin \beta) &= 0,4388515 - 1 \\ \beta &= 15^\circ . 56' . 38'' . \end{aligned}$$

Da  $a > b$ , so findet nur ein Dreieck mit den gegebenen Stücken Statt, und der der Seite  $\beta$  gegenüberliegende Winkel ist  $15^\circ . 56' . 38''$ .

B. Es sey wie vorhin

$b = 89,125$ ,  $a = 103,47$ ,  
 $\alpha$  aber stumpf, z. B.  $\alpha = 121^\circ . 8' . 52''$ , so ist

$$\begin{aligned} 10b &= 0,9499995 + 1 \\ 10(\sin \alpha) &= 0,9323906 - 1 \\ 10(b \sin \alpha) &= 0,9023901 + 1 \\ 10a &= 0,0148144 + 2 \\ 10(\sin \beta) &= 0,8875757 - 1 ; \end{aligned}$$

folglich, weil wegen  $\sin \beta < \sin \alpha$ ,  $\alpha > \beta$  seyn muß,  
 $\beta = 129^\circ . 28' . 22''$ .

Dieser stumpfe Winkel findet aber nicht Statt, sondern nur sein Complement

$$2\varrho - \beta = 50^\circ . 31' . 38'' .$$

Es giebt mit den gegebenen Stücken nur ein Dreieck und der der Seite  $\beta$  gegenüberliegende Winkel ist  $50^\circ . 31' . 38''$ .

II. Es sey

$b = 143,85$ ,  $a = 35,4207$  und  $\alpha = 14^\circ . 15' . 17''$ ,  
so ist

$$\begin{aligned} 10b &= 0,1579099 + 2 \\ 10(\sin \alpha) &= 0,3913465 - 1 \\ 10(b \sin \alpha) &= 1,5492564 + 0 \\ 10a &= 0,5492571 + 1 \\ 10(\sin \beta) &= 0,9999993 - 1 \\ \beta &= 89^\circ . 54' . \end{aligned}$$

Da aber  $a < b$  und  $a > b \sin \alpha$ , wie in der Rechnung die Logarithmen von  $b \sin \alpha$  und von  $a$  zeigen, so sind zwei Dreiecke möglich. Ihre Winkel, der Seite  $b$  gegenüber, sind

$$\begin{aligned} \beta &= 89^\circ . 54' \\ 2\varrho - \beta &= 90^\circ . 6' . \end{aligned}$$



Es ist aber hier ein Fall, wo man den Winkel  $\beta$  nach dem Ausdrucke  $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$  nicht genau, nemlich nicht bis auf die Secunden, sondern nur bis auf mehr als  $\frac{1}{3}$  Minute finden kann. Denn, wie die Tafeln zeigen (Vegasche Tafeln S. 193.), sind die Logarithmen der Sinus von  $89^\circ.6'.0''$  bis  $89^\circ.6'.20''$  sämmtlich  $0,9999993 - 1$ , so dafs man von dem Winkel  $\beta$ , nach dem Ausdrucke  $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$ , nur findet, dafs er nicht viel kleiner als  $89^\circ.6'.0''$ , und nicht viel gröfser als  $89^\circ.6'.20''$  seyn kann, nicht aber wieviel Secunden er enthält.

Man mufs also nach dem Ausdruck (59.) oder besser nach (58.) wie folgt rechnen.

Die zu dem Logarithmen  $0,9999993 - 1$  gehörige Zahl ist (Vegasche Tafel S. 136.)  $0,9999985$ . Also ist

$$\sin \beta = 0,9999985$$

$$\text{folglich } 1 - \sin \beta = 0,0000015$$

$$\text{und } \frac{1 - \sin \beta}{2} = 0,00000075$$

$$^{10} \left( \frac{1 - \sin \beta}{2} \right) = 1,8750613 - 8$$

$$^{10} \sqrt{\left( \frac{1 - \sin \beta}{2} \right)} = 0,9375306 - 4 = ^{10} (\sin \frac{1}{2} (\varrho - \beta)),$$

$$\text{also } \frac{1}{2} (\varrho - \beta) = 0^\circ.2'.58, 7''$$

$$\varrho - \beta = 0^\circ.5'.57, 4''$$

$$\text{folglich } \beta = 89^\circ.54'.2, 6''$$

$$\text{desgleichen } 2\varrho - \beta = 90^\circ.5'.57, 4''$$

welches die gesuchten Winkel bis auf Secunden sind.

III. Es sey wie vorhin

$$b = 143,85, \quad a = 35,4207,$$

aber  $\alpha$ , statt  $14^\circ.15'.17''$ , gleich  $38^\circ.18'.5''$ , so ist

$$^{10} b = 0,1579099 + 2$$

$$^{10} (\sin \alpha) = 0,7922602 - 1$$

$$^{10} (b \sin \alpha) = 0,9501601 + 1,$$

$$^{10} a = 0,5492571 + 1.$$

Da, wie die Logarithmen zeigen,  $a < b \sin \alpha$  ist, so ist kein Dreieck mit den gegebenen Stücken möglich.

IV. Um wenigstens ein Beispiel von der Anwendung der Ausdrücke mit Reihen für die goniometrischen Linien zu geben, sey

# 360. Beliebige Dreiecke, Seiten und Winkel. 409

$$b = 68,047, a = 111,836, \alpha = 0^\circ.0'.38''.$$

Es ist also  $a > b$  und  $\alpha$  sehr klein. Daher gehört das Dreieck für den ersten Fall (D.). Es ist

$$a + b = 179,882, a - b = 43,788.$$

Die Länge des Bogens von 38 Sekunden ist zufolge der Vegaschen Tafeln (S. 297.)  $\alpha_1 = 0,00018423$  und ihr Logarithme  $^{10}\alpha_1 = 0,2653604 - 4$ ;

$$\begin{array}{rcl} ^{10}(a+b) & = & 0,2549853 + 2 \\ + ^{10}(a-b) & = & 0,6413551 + 1 \\ + 2 \cdot ^{10}\alpha_1 & = & 0,5307208 - 8 \\ \hline ^{10}((a^2 - b^2)\alpha_1^2) & = & 0,4270612 - 4 \\ - ^{10}a & = & 0,0485778 + 2 \\ \hline & = & 0,3784834 - 6 \\ - ^{10}a & = & 1,0485778 + 2 \\ \hline & = & 1,3299056 - 9 \\ - ^{10}a & = & 0,7781513 + 0 \\ \hline ^{10}\left(\frac{(a^2 - b^2)\alpha_1^2}{6a^2}\right) & = & 0,5517543 - 9 \\ ^{10}b & = & 0,8328090 + 1 \\ + ^{10}\alpha_1 & = & 0,2653604 - 4 \\ \hline ^{10}(b\alpha_1) & = & 1,0981694 - 3 \\ - ^{10}a & = & 1,0485778 + 2 \\ \hline ^{10}\left(\frac{b}{a}\alpha_1\right) & = & 0,0495916 - 4 \\ + \left(\frac{(a^2 - b^2)\alpha_1^2}{6a^2}\right) & = & 0,5517543 - 9 \\ \hline ^{10}\left(\frac{b}{a}\alpha_1 \frac{(a^2 - b^2)\alpha_1^2}{6a^2}\right) & = & 0,6013459 - 13 \\ \frac{b}{a}\alpha_1 & = & 0,0001120965000 \\ - \frac{b}{a}\alpha_1 \frac{(a^2 - b^2)\alpha_1^2}{6a^2} & = & 0,00000000000004 \\ \hline \beta_1 & = & 0,0001120964996 \\ \beta & = & 23,127 \text{ Sekunden.} \end{array}$$

**Aufgabe. VII.** Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem einen anliegenden Winkel den eingeschlossenen Winkel zu finden, also z. B.

aus  $a, b$  und  $\alpha$  oder  $\beta \dots \gamma$

aus  $b, c$  und  $\beta$  oder  $\gamma \dots \alpha$

aus  $c, a$  und  $\gamma$  oder  $\alpha \dots \beta$ .

**Erste Auflösung. A.** Die auflösende Gleichung

$$66. \quad b \sin \alpha = a \sin \gamma \cos \alpha + a \cos \gamma \sin \alpha \quad (6. \S. 358.)$$

gibt  $b \sin \alpha - a \sin \gamma \cos \alpha = a \cos \gamma \sin \alpha$  und  
 $b^2 \sin^2 \alpha - 2ab \sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma + a^2 \sin^2 \gamma \cos^2 \alpha = a^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha$ ,  
 oder

$$b^2 \sin^2 \alpha - 2ab \sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma + a^2 (\sin^2 \gamma (1 - \sin^2 \alpha) - (1 - \sin^2 \gamma) \sin^2 \alpha) = 0, \text{ oder}$$

$$b^2 \sin^2 \alpha - 2ab \sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma + a^2 (\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha) = 0,$$

$$\text{oder } \sin^2 \gamma - \frac{2b}{a} \sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma + \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \sin^2 \alpha = 0; \text{ also}$$

$$\sin \gamma = \frac{b}{a} \sin \alpha \cos \alpha \pm \sqrt{\left( \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right)}$$

oder

$$\sin \gamma = \frac{b}{a} \sin \alpha \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\left( \frac{b^2}{a^2} (1 - \sin^2 \alpha) - \frac{b^2}{a^2} + 1 \right)}, \text{ oder}$$

$$\sin \gamma = \frac{b}{a} \sin \alpha \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \alpha \right)}, \text{ oder}$$

$$\sin \gamma = \frac{b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}}{a}, \text{ und wenn man auch } b$$

und  $a, \beta$  und  $\alpha$  verwechselt,

$$67. \left\{ \begin{array}{l} \sin \gamma = \frac{b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}}{a} \\ \sin \alpha = \frac{a \cos \beta \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \beta}}{b} \\ \sin \alpha = \frac{c \cos \beta \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 \beta}}{b} \\ \sin \beta = \frac{b \cos \gamma \pm \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 \gamma}}{c} \\ \sin \beta = \frac{a \cos \gamma \pm \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \gamma}}{c} \\ \sin \gamma = \frac{c \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha}}{a} \end{array} \right.$$

B. Aus der nemlichen auflösenden Gleichung (66.)  
 folgt:

$$b^2 \sin \alpha - a \cos \gamma \sin \alpha = a \sin \gamma \cos \alpha, \text{ oder}$$

$$b^2 \sin^2 \alpha - 2ab \sin \alpha^2 \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma \sin \alpha = a^2 \sin^2 \gamma \cos^2 \alpha,$$

oder

$$b^2 \sin^2 \alpha - 2ab \sin \alpha^2 \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma (1 - \cos^2 \alpha) - a^2 (1 - \cos^2 \gamma) \cos^2 \alpha = 0, \text{ also}$$

$$b^2 \sin^2 \alpha - 2ab \sin \alpha^2 \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma - a^2 \cos^2 \alpha = 0, \text{ oder}$$

$$\cos^2 \gamma - \frac{2b}{a} \sin \alpha^2 \cos \gamma + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 0; \text{ also}$$

$$\cos \gamma = \frac{b}{a} \sin \alpha^2 \pm \sqrt{\left( \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \alpha - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \right)}, \text{ oder}$$

$$\cos \gamma = \frac{b}{a} \sin \alpha^2 \mp \sqrt{\left(-\frac{b^2}{a^2} \sin \alpha^2 \cos \alpha^2 + \cos \alpha^2\right)}, \text{ oder}$$

$$\cos \gamma = \frac{b}{a} \sin \alpha^2 \mp \cos \alpha \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2} \sin \alpha^2\right)}, \text{ oder}$$

$$68. \left\{ \begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{b \sin \alpha^2 \mp \cos \alpha \sqrt{(a^2 - b^2 \sin \alpha^2)}}{a} \\ &= \frac{a \sin \beta^2 \mp \cos \beta \sqrt{(b^2 - a^2 \sin \beta^2)}}{b} \\ \cos \alpha &= \frac{c \sin \beta^2 \mp \cos \beta \sqrt{(b^2 - c^2 \sin \beta^2)}}{b} \\ &= \frac{b \sin \gamma^2 \mp \cos \gamma \sqrt{(c^2 - b^2 \sin \gamma^2)}}{c} \\ \cos \beta &= \frac{a \sin \gamma^2 \mp \cos \gamma \sqrt{(c^2 - a^2 \sin \gamma^2)}}{c} \\ &= \frac{c \sin \alpha^2 \mp \cos \alpha \sqrt{(a^2 - c^2 \sin \alpha^2)}}{a} \end{aligned} \right.$$

C. Aus (67. und 68.) folgt auch, weil z. B.  $\frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \tan \gamma$  ist,

$$69. \left\{ \begin{aligned} \tan \gamma &= \frac{b \cos \alpha \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin \alpha^2)}}{b \sin \alpha \mp \cot \alpha \sqrt{(a^2 - b^2 \sin \alpha^2)}} \\ &= \frac{a \cos \beta \pm \sqrt{(b^2 - a^2 \sin \beta^2)}}{a \sin \beta \mp \cot \beta \sqrt{(b^2 - a^2 \sin \beta^2)}} \\ \tan \alpha &= \frac{c \cos \beta \pm \sqrt{(b^2 - c^2 \sin \beta^2)}}{c \sin \beta \mp \cot \beta \sqrt{(b^2 - c^2 \sin \beta^2)}} \\ &= \frac{b \cos \gamma \pm \sqrt{(c^2 - b^2 \sin \gamma^2)}}{b \sin \gamma \mp \cot \gamma \sqrt{(c^2 - b^2 \sin \gamma^2)}} \\ \tan \beta &= \frac{a \cos \gamma \pm \sqrt{(c^2 - a^2 \sin \gamma^2)}}{a \sin \gamma \mp \cot \gamma \sqrt{(c^2 - a^2 \sin \gamma^2)}} \\ &= \frac{c \cos \alpha \pm \sqrt{(a^2 - c^2 \sin \alpha^2)}}{c \sin \alpha \mp \cot \alpha \sqrt{(a^2 - c^2 \sin \alpha^2)}} \end{aligned} \right.$$

D. Zur Rechnung in Zahlen sind aber alle drei Ausdrücke (67. 68. 69.) nicht bequem, weil man sich dabei nicht gut der Logarithmen bedienen kann. Die Ausdrücke kommen nur vor, wenn man mit Buchstaben weiter rechnet. Bequemer für die Zahlen-Rechnung ist folgende Auflösung.

*Zweite Auflösung.* Man berechnet aus den beiden gegebenen Seiten und dem einen anliegenden Win-

kel erst den andern anliegenden Winkel nach (VI.), also nach den Ausdrücken

$$70. \sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha, \sin \gamma = \frac{c}{b} \sin \beta, \sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma \quad (46.)$$

oder, wenn  $\beta, \gamma, \alpha$  einem rechten Winkel sehr nahe kommen, nach den Ausdrücken

$$71. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}(\varrho - \beta) = \sqrt{\left(\frac{1 - \sin \beta}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a - b \sin \alpha}{2a}\right)}, \\ \sin \frac{1}{2}(\varrho - \gamma) = \sqrt{\left(\frac{1 - \sin \gamma}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{b - c \sin \beta}{2b}\right)}, \\ \sin \frac{1}{2}(\varrho - \alpha) = \sqrt{\left(\frac{1 - \sin \alpha}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{c - a \sin \gamma}{2c}\right)}; \end{cases}$$

(58.), wobei man auf alle dortigen Bedingungen sehen muß.

Ist auf diese Weise der andere anliegende Winkel gefunden, so findet man, weil  $\alpha + \beta + \gamma = 2\varrho$  ist, den gesuchten eingeschlossenen Winkel  $\gamma$  aus

$$72. \gamma = 2\varrho - \alpha - \beta, \alpha = 2\varrho - \beta - \gamma, \beta = 2\varrho - \gamma - \alpha.$$

*Beispiel. A.* Es sey z. B. wie im ersten Beispiel (I. A.) (VI.)

$$a = 103,47, b = 89,125, \alpha = 18^\circ . 35' . 49'',$$

so ist, nach der dortigen Berechnung,

$$\beta = 15^\circ . 56' . 38''.$$

Also ist der gesuchte Winkel

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 145^\circ . 27' . 33''.$$

*B.* Im Beispiel (1. B.) (VI.), wo

$$a = 103,47, b = 89,125 \text{ und } \alpha = 121^\circ . 8' . 52''$$

war, ist nach der dortigen Rechnung  $\beta = 50^\circ . 31' . 38''$ .  
Also ist der gesuchte Winkel

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 8^\circ . 19' . 30''.$$

*C.* Im dritten Beispiel (II. VI.), wo

$$a = 35,4207, b = 143,85 \text{ und } \beta = 14^\circ . 15' . 17''$$

war, ist nach der dortigen Rechnung  
 $\beta = 89^\circ . 54' . 2,6''$  und  $\beta = 90^\circ . 5' . 57,4''$ ;  
also ist der gesuchte Winkel

$$\gamma = 75^\circ . 60' . 40,4'' \text{ und } \gamma = 75^\circ . 58' . 45,6''.$$

*Aufgabe. VIII.* Aus zwei gegebenen Seiten eines Dreiecks und einem anliegenden Winkel die dritte Seite zu finden, also

aus  $a, b$  und  $\alpha$  oder  $\beta \dots c$ ,  
 aus  $b, c$  und  $\beta$  oder  $\gamma \dots a$ ,  
 aus  $c, a$  und  $\gamma$  oder  $\alpha \dots b$ .

**Erste Auflösung.** Die auflösende Gleichung

$$73. \quad b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2 \quad (11. \S. 358.)$$

gibt  $c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 - a^2 = 0$ , also

$$c = b \cos \alpha \pm \sqrt{(b^2 \cos^2 \alpha - b^2 + a^2)}, \text{ oder}$$

$$74. \quad \begin{cases} c = b \cos \alpha \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2 \alpha)} = a \cos \beta \pm \sqrt{(b^2 - a^2 \sin^2 \beta)}, \\ a = c \cos \beta \pm \sqrt{(b^2 - c^2 \sin^2 \beta)} = b \cos \gamma \pm \sqrt{(c^2 - b^2 \sin^2 \gamma)}, \\ b = a \cos \gamma \pm \sqrt{(c^2 - a^2 \sin^2 \gamma)} = c \cos \alpha \pm \sqrt{(a^2 - c^2 \sin^2 \alpha)}. \end{cases}$$

Zur Rechnung mit Zahlen sind diese Ausdrücke nicht bequem.

**Zweite Auflösung.** Man berechne aus den beiden gegebenen Seiten und dem einen anliegenden Winkel erst den eingeschlossenen Winkel, nach (VII. zweite Auflösung), also nach den Ausdrücken

$$75. \quad \sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha, \quad \sin \gamma = \frac{c}{b} \sin \beta, \quad \sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma \quad (46.),$$

$$76. \quad \gamma = 2\varrho - \alpha - \beta, \quad \alpha = 2\varrho - \beta - \gamma, \quad \beta = 2\varrho - \gamma - \alpha,$$

mit allen Beobachtungen (VI.).

Ist auf diese Weise der eingeschlossene Winkel gefunden, so ist die Aufgabe in dem Falle (III.) und z. B. die auflösende Gleichung (2. §. 358.) gibt

$$77. \quad c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}, \text{ also auch } a = b \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad b = c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

**Beispiel A.** Es sey, wie im ersten Beispiel (I. A. VI.),

$$a = 103,47, \quad b = 89,125 \text{ und } \alpha = 18^\circ.35'.49'',$$

so ist nach (VII. Beispiel A.)

$$\gamma = 145^\circ.27'.33'',$$

also nunmehr nach (46.)

$$\begin{aligned} {}^{10}a &= 0,0148144 \div 2 \\ {}^{10}(\sin \gamma) &= 0,7535780 - 1 \\ {}^{10}(a \sin \gamma) &= 0,7683924 \div 1 \\ {}^{10}(\sin \alpha) &= 0,5036664 - 1 \\ {}^{10}c &= 0,2647260 \div 2 \\ c &= 183,961. \end{aligned}$$

**B.** Es sei, wie im zweiten Beispiel (I. B. VI.),

$$a = 103,47, \quad b = 89,125 \text{ und } \alpha = 121^\circ.8'.52'',$$

so ist nach (VII. Beispiel B.)

$$\gamma = 8^\circ.19'.30'',$$

also nach (46.)

$$\begin{aligned}
 {}^{10}a &= 0,0148144 + 2 \\
 {}^{10}(\sin \gamma) &= 0,1607322 - 1 \\
 {}^{10}(a \sin \gamma) &= 0,1755466 + 0 \\
 {}^{10}(\sin \alpha) &= 0,9323906 - 1 \\
 {}^{10}c &= 0,2431560 + 1 \\
 c &= 17,504.
 \end{aligned}$$

C. Es sey, wie im dritten Beispiel (II. VI.),  
 $a = 35,4204$ ,  $b = 143,85$  und  $\alpha = 14^\circ. 15'. 17''$ ,  
 so ist nach (VII. Beispiel C.)

$$\gamma = 75^\circ. 50'. 40,4'' \text{ und } \gamma = 75^\circ. 38'. 45,6''.$$

Der erste Werth von  $\gamma$  giebt nach (46.)

$$\begin{aligned}
 {}^{10}a &= 0,5492571 + 1 \\
 {}^{10}(\sin \gamma) &= 0,9866085 - 1 \\
 {}^{10}(a \sin \gamma) &= 1,5358656 + 0 \\
 {}^{10}(\sin \alpha) &= 0,3913465 - 1 \\
 {}^{10}c &= 0,1445191 + 2 \\
 c &= 139,482.
 \end{aligned}$$

Der zweite Werth von  $\gamma$  giebt

$$\begin{aligned}
 {}^{10}a &= 0,5492571 + 1 \\
 {}^{10}(\sin \gamma) &= 0,9862065 - 1 \\
 {}^{10}(a \sin \gamma) &= 1,5364836 + 0 \\
 {}^{10}(\sin \alpha) &= 0,3913465 - 1 \\
 {}^{10}c &= 0,1441371 + 2 \\
 c &= 139,360.
 \end{aligned}$$

In diesem dritten Beispiel hat also  $c$  die zwei Werthe  
 $c = 139,482$  und  $c = 139,360$ .

*Aufgabe IX.* Aus den drei gegebenen Seiten eines  
 Dreiecks einen Winkel zu finden, also aus  $a, b, c \dots$   $\alpha$ ,  
 $\beta$  oder  $\gamma$ .

*Auflösung A.* Die auflösende Gleichung  
 78.  $b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2$  (11. §. 358.)  
 giebt  $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \alpha$ , also

$$79. \begin{cases} \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ \cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \\ \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \end{cases}$$

Vermittelst dieser Ausdrücke findet man  $\alpha, \beta, \gamma$  aus  
 $a, b$  und  $c$ .

B. Die Ausdrücke (79.) sind aber zur Rechnung  
 mit Logarithmen nicht bequem. Folgende sind es mehr.

Aus (79.) folgt z. B.

$$1 - \cos \alpha^2 = 1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right), \text{ oder}$$

$$\sin \alpha^2 = \left( 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left( 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right), \text{ oder}$$

$$\sin \alpha^2 = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \cdot \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ oder}$$

$$\sin \alpha^2 = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} \cdot \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}, \text{ oder,}$$

$$\sin \alpha^2 = \frac{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)}{4b^2c^2}, \text{ also}$$

$$80. \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{[(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)]}}{2bc}, \\ \sin \beta = \frac{\sqrt{[(b + c + a)(b + c - a)(b - c + a)(c + a - b)]}}{2ca}, \\ \sin \gamma = \frac{\sqrt{[(c + a + b)(c + a - b)(c - a + b)(a + b - c)]}}{2ab} \end{cases}$$

Nach diesen Ausdrücken lässt sich mit Logarithmen leichter rechnen.

Der Zähler ist in allen drei Ausdrücken der nämliche.

C. Aus (79.) folgt auch z. B.

$$1 - \cos \alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ oder}$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}, \text{ oder}$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}.$$

Nun ist  $1 - \cos \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2$  (§. 345. 35.). Also ist

$$2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2 = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}, \text{ folglich}$$

$$81. \begin{cases} \sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{bc} \right]}, \\ \sin \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \frac{(b - c + a)(b + c - a)}{ca} \right]}, \\ \sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \frac{(c - a + b)(c + a - b)}{ab} \right]}. \end{cases}$$

Ferner folgt aus (79.) z. B.

$$1 + \cos \alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ oder}$$



$$1 + \cos \alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ oder}$$

$$1 + \cos \alpha = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}.$$

Nun ist  $1 + \cos \alpha = 2 \cos \frac{1}{2} \alpha^2$  (§. 345. 35.). Also ist

$$82. \begin{cases} \cos \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{bc}}, \\ \cos \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(c+a+b)(c+a-b)}{ca}}, \\ \cos \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}. \end{cases}$$

D. Dividirt man (81.) durch (82.), und umgekehrt, so erhält man auch, weil z. B.  $\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha} = \tan \frac{1}{2} \alpha$  und  $\frac{\cos \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha} = \cot \frac{1}{2} \alpha$  ist,

$$83. \begin{cases} \tan \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c+a)(b+c-a)}}, \\ \tan \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{(b-c+a)(b+c-a)}{(c+a+b)(c+a-b)}}, \\ \tan \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{(c-a+b)(c+a-b)}{(a+b+c)(a+b-c)}}. \end{cases}$$

$$84. \begin{cases} \cot \frac{1}{2} \alpha = \tan (\varrho - \frac{1}{2} \alpha) = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(a-b+c)(a+b-c)}}, \\ \cot \frac{1}{2} \beta = \tan (\varrho - \frac{1}{2} \beta) = \sqrt{\frac{(c+a+b)(c+a-b)}{(b-c+a)(b+c-a)}}, \\ \cot \frac{1}{2} \gamma = \tan (\varrho - \frac{1}{2} \gamma) = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(c-a+b)(c+a-b)}}. \end{cases}$$

E. Die Ausdrücke (80. 81. 82. 83. 84.) enthalten sämtlich eine zweite Wurzel, und daher können z. B.  $\sin \alpha$ ,  $\sin \frac{1}{2} \alpha$ ,  $\cos \frac{1}{2} \alpha$  und  $\tan \frac{1}{2} \alpha$  sowohl positiv als negativ genommen werden. Die negativen Werthe kommen aber nicht in Betracht, weil ein Dreieck keinen negativen Winkel haben kann. Sie kommen nur dadurch in die Rechnung, daß in der auflösenden Gleichung (11. §. 358.)  $\alpha$  auch negativ seyn kann, ohne daß sich die Gleichung änderte, indem z. B.  $\cos \alpha = \cos -\alpha$  ist. Der negative Werth von  $\alpha$  ist aber nicht gemeint. Die Wurzelgröße in den Ausdrücken (80. 81. 82. 83. 84.) darf also immer nur positiv genommen werden.

In den Ausdrücken (80.) gehören auch noch zwei Winkel, z. B.  $\alpha$  und  $2\rho - \alpha$ , zu dem nämlichen Sinus. Gleichwohl kann nur von einem die Rede seyn, weil das Dreieck durch die gegebenen drei Seiten unbedingt bestimmt wird, d. h. nur ein Dreieck mit den nämlichen drei Seiten existirt. Die dem gesuchten Winkel, z. B.  $\alpha$ , gegenüber liegende Seite  $a$  muß entscheiden, ob z. B.  $\sin \alpha$  zu  $\alpha$  oder zu  $2\rho - \alpha$  gehört, das heißt, ob  $\alpha$  im ersten oder im zweiten Quadranten liegt.

1) Ist  $a$  nicht die größte aller drei Seiten, so kann  $\alpha$  nicht stumpf seyn (§. 47. III.),  $\alpha$  kann also alsdann nur im ersten Quadranten liegen.

2) Ist  $a$  die größte aller drei Seiten, so kann  $\alpha$  sowohl spitz als stumpf seyn. Alsdann kommt es darauf an, ob  $\cos \alpha$  (79.) positiv oder negativ ist, das heißt, ob

85.  $b^2 + c^2 > a^2$  oder  $b^2 + c^2 < a^2$  ist, oder auch ob  $\tan \frac{1}{2}\alpha$  kleiner oder größer als 1 ist. Denn da  $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$ , so ist  $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ , wenn  $\tan \frac{1}{2}\alpha < 1$ , und  $\alpha > \frac{1}{2}\pi$ , wenn  $\tan \frac{1}{2}\alpha > 1$ . Es kommt also vermöge (83.) darauf an, ob

$$36. \begin{cases} (a-b+c)(a+b-c) < (b+c-a)(b+c+a) \\ (a-b+c)(a+b-c) > (b+c-a)(b+c+a) \end{cases} \text{ oder}$$

ist. Im ersten Falle liegt  $\alpha$  im ersten, im zweiten Falle im zweiten Quadranten.

F. Durch den Ausdruck (80.) findet man den gesuchten Winkel, wenn derselbe einem rechten Winkel nahe kommt, weniger genau, weil die Sinus von Winkeln, die wenig von einem Rechten abweichen, nur wenig verschieden sind. Alsdann geben die Ausdrücke (81. 82. 83. 84.) den Winkel genauer; denn der halbe Winkel ist alsdann wenig von einem halben rechten Winkel verschieden.

Kommt der gesuchte Winkel der Null nahe, so geben ihn die Ausdrücke (80. 81. und 83.) genauer, nicht aber die Ausdrücke (82. und 84.), weil die Cosinus sehr kleiner Winkel wenig von einander abweichen und die Cotangenten sehr groß sind.

Kommt der gesuchte Winkel zwei Rechten sehr nahe, so geben ihn am genauesten die Ausdrücke (80. 82. und 84.), weil die Sinus von Winkeln, die nahe an  $2\rho$  liegen, und die Cosinus und Cotangenten der halben Winkel, die dann einem rechten nahe kommen, fast dem Bogen, erster des Supplements, letzter des Complements gleich sind.

Hieraus folgt, daß die Ausdrücke (83. und 84.) vorzugsweise vor den andern zur Berechnung in Zahlen in allen Fällen geschickt sind. Ist der gesuchte Winkel einem rechten Winkel nahe, so sind sie beide gleich gut. Ist derselbe nahe an 0, so nimmt man den Ausdruck (83.), und ist der Winkel nahe an  $2\varrho$ , so nimmt man den Ausdruck (84.). Der Vorzug von (83. und 84.) ist deshalb noch um so größer, weil die Producte  $(a+b+c)(a+b-c)$  und  $(a-b+c)(b+c-a)$  in diesen Ausdrücken, z. B. für den Winkel  $\alpha$ , nach (86.) zugleich entscheiden, ob  $\alpha$  im ersten oder zweiten Quadranten liegt. Auch braucht man für beide Ausdrücke (83. und 84.) immer nur die Logarithmen von den vier Factoren, also immer nur von den nämlichen Größen zu nehmen.

G. Die Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten eines Dreiecks, z. B.  $\alpha$  aus  $a, b, c$ , geschieht also in allen Fällen auf folgende Weise.

- 1) Man berechnet die drei Summen  $a+b, a+c$  und  $b+c$ .
- 2) Von der ersten zieht man  $c$ , von der zweiten  $b$  und von der dritten  $a$  ab, desgleichen addirt man noch z. B., zu der ersten  $c$ , dieses giebt  $a+b-c, a+c-b, b+c-a$  und  $a+b+c$ .
- 3) Von diesen vier Größen sucht man in den Tafeln die Logarithmen, nimmt z. B. für den Winkel  $\alpha$  die Summen der Logarithmen von  $a-b+c, a+b-c$  und von  $a+b+c, b+c-a$ .
- 4) Die größere Summe zieht man von der kleinern ab, und nimmt von dem negativen Reste die Hälfte.
- 5) Diese Hälfte ist, wenn  $(a-b+c)(a+b-c) < (b+c-a)(b+c+a)$  war, der Logarithme von  $\tan \frac{1}{2}\alpha$ . Ist  $(a-b+c)(a+b-c) > (b+c-a)(b+c+a)$ , so ist sie der Logarithme von  $\cot \frac{1}{2}\alpha$ . Das zugehörige  $\frac{1}{2}\alpha$  wird immer im ersten Quadranten genommen. Das doppelte von  $\frac{1}{2}\alpha$  giebt den gesuchten Winkel  $\alpha$ .

Beispiele. I. Die Seiten des gegebenen Dreiecks  $a, b, c$  sollen

$$a = 6319,51, \quad b = 3817,23, \quad c = 5034,81$$

seyn. Der Winkel  $\alpha$ , der Seite  $a$  gegenüber, wird gesucht. Es ist:

$$\begin{aligned} a + b &= 10136,74, \\ a + c &= 11354,32, \\ b + c &= 8852,04; \text{ also} \\ a + b + c &= 15171,55, \\ b + c - a &= 2532,53, \\ a - b + c &= 7537,09, \\ a + b - c &= 5101,93. \end{aligned}$$

$$10(a + b + c) = 0,1810299 + 4$$

$$10(b + c - a) = 0,4033831 + 3$$

$$10[(a + b + c)(b + c - a)] = 0,5844130 + 7.$$

$$10(a - b + c) = 0,8771990 + 3$$

$$10(a + b - c) = 0,7077345 + 3$$

$$10[(a - b + c)(a + b - c)] = 0,5849335 + 7..$$

Da, wie man sieht,  $(a - b + c)(a + b - c)$  größer ist, als  $(a + b + c)(b + c - a)$ , so muß man den ersten Ausdruck (84.) nehmen. Es ist also

$$\begin{aligned} &1,5844130 + 6 \\ &- 0,5849335 + 7 \\ 10(\cot \frac{1}{2} \alpha) &= 10(\tan(\rho - \frac{1}{2} \alpha)) = 0,9994795 - 1 \end{aligned}$$

$$\rho - \frac{1}{2} \alpha = 44^\circ . 57' . 56''$$

$$\frac{1}{2} \alpha = 45^\circ . 2' . 4''$$

$$\alpha = 90^\circ . 4' . 8''.$$

II. Es sey

$$a = 5813,03, b = 4372,18, c = 10184,85$$

und es werde der Winkel  $\alpha$ , der Seite  $a$  gegenüber, gesucht.

Es ist

$$\begin{aligned} a + b &= 10185,21, \\ a + c &= 15997,88, \\ b + c &= 14557,03; \text{ also} \end{aligned}$$

$$a + b + c = 20370,06,$$

$$b + c - a = 8744,00,$$

$$a - b + c = 11625,70,$$

$$a + b - c = 0,36,$$

$$10(a + b + c) = 0,3089922 + 4$$

$$10(b + c - a) = 0,9417101 + 3$$

$$10((a + b + c)(b + c - a)) = 0,2507023 + 8$$

$$10(a - b + c) = 0,0654191 + 4$$

$$10(a + b - c) = 8,5563025 - 1$$

$$10((a - b + c)(a + b - c)) = 0,6217216 + 3.$$

Da, wie man sieht,  $(a + b + c)(b + c - a)$  größer ist als  $(a - b + c)(a + b - c)$ , so muß man den ersten Ausdruck (83.) nehmen. Es ist also

$$\begin{array}{r} 0,6217216 + 3 \\ - 0,2507023 + 8 \\ \hline \end{array}$$

$$10(\tan \frac{1}{2} \alpha) = 0,3710193 - 6.$$

Da dieser Logarithme so klein ist, daß man den zugehörigen Winkel in der Tafel gar nicht findet, nehme man erst die zugehörige Zahl. Diese ist

$$\tan \frac{1}{2} \alpha = 0,0000235.$$

Für so kleine Winkel sind die Tangenten den Bogen fast gleich, also kann man  $\frac{1}{2} \alpha$ , statt  $\tan \frac{1}{2} \alpha$  setzen. Nun ist der Bogen von 1 Secunde nach den Vega'schen Tafeln (S. 296.) gleich

$$\frac{1}{2} \alpha = \frac{0,0000235}{0,0000485} \text{ Sekunden,}$$

und folglich

$$\alpha = \frac{470}{485} = 0,969 \text{ Sekunden.}$$

Die in diesem Paragraph enthaltenen Aufgaben, aus drei bestimmenden Stücken eines Dreiecks die übrigen zu finden, kommen besonders häufig vor; deshalb sind sie umständlich und ausführlich abgehandelt worden.

361.

*Anmerkung.* Aus den Gleichungen (1. 2. und 3. §. 358.) folgt:

$$1. \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad 2. \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}, \quad 3. \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Wegen dieser Ausdrücke kann man, wenn in Zähler und Nenner irgend eines Bruchs, Seiten oder Sinus der Winkel eines Dreiecks vorkommen, ohne Weiteres statt der Seiten die Sinus der gegenüber liegenden Winkel, und umgekehrt, schreiben; nur muß die Verwechslung in allen Gliedern des Zählers und Nenners, mit allen den Potestäten der Seiten und Sinus geschehen, deren Exponenten zusammen gleich sind. Z. B. es sey der Ausdruck.

$$4. \frac{a^m b^n + a^p c^q d^r + b^x e^k}{a^y d e + c^z b^t e^v},$$

gegeben, wo  $a, b, c$  Seiten eines Dreiecks,  $d$  und  $e$  aber beliebige andere Größen bedeuten, so setze man  $b = x a$ ,  $c = \lambda a$ . Alsdann ist auch  $\sin \beta = x \sin \alpha$  und  $\sin \gamma = \lambda \sin \alpha$ , wenn  $\alpha, \beta, \gamma$  die in dem Dreieck, den Seiten  $a, b, c$  gegenüber liegenden Winkel bedeuten; denn nach den Gleichungen (3. und 2.) ist

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \text{ und } \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Nun stelle man sich vor, es werde in den Ausdruck (4.) statt  $b$  und  $c$  auf die Weise  $\kappa a$  und  $\lambda a$  gesetzt, daß man aus den Potestäten von  $a$ , welche jetzt alle Glieder in Zähler und Nenner enthalten, irgend eine Potestät von  $a$ , z. B.  $a^\mu$  zum gemeinschaftlichen Factor nehmen kann, so wird dieser gemeinschaftliche Factor sich offenbar oben und unten aufheben. Ganz das nämliche würde aber auch geschehen seyn, wenn statt derjenigen verschiedenen Potestäten von  $a$ ,  $b$  und  $c$ , die sich in den gemeinschaftlichen Factor  $a^\mu$  vereinigten, die nämlichen Potestäten von  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$ ,  $\sin \gamma$  gestanden hätten. Dieselben würden den gemeinschaftlichen Factor  $\sin a^\mu$  gegeben haben, weil  $\sin \beta = \kappa \sin \alpha$  und  $\sin \gamma = \lambda \sin \alpha$  ist, eben wie  $b = \kappa a$  und  $c = \lambda a$ . Diese gemeinschaftlichen Factoren  $\sin a^\mu$  würden sich also ebenfalls oben und unten aufgehoben haben; und da Alles übrige, was der Ausdruck außer den gemeinschaftlichen Factoren  $a^\mu$  und  $\sin a^\mu$  enthält, in beiden Fällen das Nämliche ist, so bedeutet der Ausdruck (4.) ganz gleich viel, ob darin  $a$ ,  $b$ ,  $c$  zusammen auf die Potestät  $\mu$  erhoben sind, oder ob  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$  und  $\sin \gamma$  zusammen auf eben die Potestät steigen. Daher kann man nach Willkühr Eines statt des Andern setzen. Hätte der Ausdruck (4.) Glieder, die gar kein  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , oder gar kein  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$ ,  $\sin \gamma$  enthalten, so müßte man, wenn man in den übrigen Gliedern die Potestäten von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$ ,  $\sin \gamma$  bis zur Exponenten-Summe  $\mu$  verwechseln wollte, zuvor oben und unten mit  $a^\mu$ , oder  $\sin a^\mu$ , oder auch mit  $b^\mu$  oder  $\sin \beta^\mu$ , oder mit  $c^\mu$  oder  $\sin \gamma^\mu$  multipliciren. Alsdann findet die Verwechselung, bis zur Exponenten-Summe  $\mu$ , wie vorhin Statt.

Es ist z. B.

$$\begin{aligned} 5. & \frac{a^5 b^3 + a^3 c^7 d^3 + b^{10} e^3}{a^{11} d e + c^2 b^7 e^4} \\ &= \frac{a^5 \sin \alpha^3 b^4 \sin \beta^4 + a^3 \sin \alpha c \sin \gamma^5 d^3 + b^4 \sin \beta^6 e^3}{a^5 \sin \alpha^6 d e + \sin \gamma^2 \sin \beta^4 b^3 e^4} \\ &= \frac{a^5 b^4 \sin \alpha^3 \sin \beta^4 + a^3 c d^3 \sin \alpha \sin \gamma^5 + b^4 e^3 \sin \beta^6}{a^5 d e \sin \alpha^6 + b^3 e^4 \sin \beta^4 \sin \gamma^2}. \end{aligned}$$

In der That erhält man, wenn man in (5.) linkerhand  $\kappa a$  statt  $b$  und  $\lambda a$  statt  $c$  setzt,

$$\frac{a^3 b^4 (a^2 x^4 a^4) + a^2 c d^3 (a \lambda^5 a^5) + b^4 e^3 (x^6 a^6)}{a^5 d e (a^6) + b^3 e^4 (\lambda^2 a^2 \cdot x^4 a^4)},$$

oder weil nun  $a^6$  oben und unten ein gemeinschaftlicher Factor ist,

$$6. \quad \frac{x^4 a^3 b^4 + \lambda^5 a^2 c d^3 + x^6 b^4 e^3}{a^5 d e + \lambda^2 x^4 b^3 e^4}.$$

Setzt man dagegen in den Ausdruck (5.) rechterhand  $x \sin \alpha$  statt  $\sin \beta$  und  $\lambda \sin \alpha$  statt  $\sin \gamma$ , so erhält man

$$\frac{a^3 b^4 (\sin \alpha^2 x^4 \sin \alpha^4) + a^2 c d^3 (\sin \alpha \lambda^5 \sin \alpha^5) + b^4 e^3 (x^6 \sin \alpha^6)}{a^5 d e (\sin \alpha^6) + b^3 e^4 (x^4 \sin \alpha^4 \lambda^2 \sin \alpha^2)}$$

oder, weil jetzt  $\sin \alpha^6$  oben und unten ein gemeinschaftlicher Factor ist,

$$7. \quad \frac{x^4 a^3 b^4 + \lambda^5 a^2 c d^3 + x^6 b^4 e^3}{a^5 d e + \lambda^2 x^4 b^3 e^4},$$

welcher Ausdruck, wie man sieht, mit (6.) übereinstimmt.

Es bleibt alles das nämliche, wenn auch die Exponenten der Potestäten Brüche oder beliebige andere Zahlen sind.

Hätte man einen Ausdruck wie

$$8. \quad \frac{a^3 b^{\frac{1}{2}} + c^2 d^{\frac{3}{2}} + e^{\frac{7}{2}}}{b^3 e^{\frac{1}{2}} + d e^{\frac{5}{2}}},$$

welcher in einigen Gliedern gar kein  $a, b, c$  enthält, und man wollte statt der Dreiecks-Seiten  $a, b, c$  die Sinus der gegenüberstehenden Winkel, bis zur Exponenten-Summe  $\frac{1}{2}$  einführen, so müßte man erst mit  $a^{\frac{1}{2}}$  oder  $b^{\frac{1}{2}}$  oder  $c^{\frac{1}{2}}$  oben und unten multipliciren; alsdann kann man mit (8.) wie mit (5.) verfahren.

362.

**Lehrsatz.** Wenn  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  die Winkel eines beliebigen Dreiecks sind, so ist

$$1. \quad \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

$$2. \quad \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma.$$

$$3. \quad \begin{cases} \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma, \\ \sin 2\beta + \sin 2\gamma - \sin 2\alpha = 4 \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha, \\ \sin 2\gamma + \sin 2\alpha - \sin 2\beta = 4 \cos \gamma \cos \alpha \sin \beta. \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma, \\ \sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha = 4 \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \alpha, \\ \sin \gamma + \sin \alpha - \sin \beta = 4 \sin \frac{1}{2} \gamma \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta. \end{cases}$$

$$5. \quad \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

$$6. \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma - 1$$

$$7. \quad \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma.$$

$$8. \quad \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \cot \alpha \cot \beta \cot \gamma \\ - \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta \operatorname{cosec} \gamma.$$

**Beweis.** Diese Ausdrücke findet man aus den allgemeinen Ausdrücken (119. bis 126. §. 345.), wenn man daselbst  $\alpha, \beta, \gamma$  statt  $x, y, z$  schreibt, und weil hier  $\alpha + \beta + \gamma = 2\rho$  ist, dort  $x + y + z = 2\rho$  setzt.

I. Der erste dortige Ausdruck (119.) nemlich giebt für  $x + y + z = 2\rho$ , weil alsdann  $\sin(x + y + z) = 0$ ,  $\sin(x + y - z) = \sin(2\rho - z - z) = \sin 2z$  und eben so  $\sin(x - y + z) = \sin 2y$ ,  $\sin(y + z - x) = \sin 2x$  ist,  $4 \sin x \sin y \sin z = \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z$ ; welches der gegenwärtige Ausdruck (I.) ist.

II. In dem zweiten dortigen Ausdruck (120.) ist jetzt

$\sin \frac{1}{2}(x + y) = \sin \frac{1}{2}(2\rho - z) = \sin(\rho - \frac{1}{2}z) = \cos \frac{1}{2}z$ ,  
und eben so

$\sin \frac{1}{2}(x + z) = \cos \frac{1}{2}y$ ,  $\sin \frac{1}{2}(y + z) = \cos \frac{1}{2}x$ , also dort  
 $\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}y \cos \frac{1}{2}z$ ;

welches der gegenwärtige Ausdruck (2.) ist.

III. Der siebente dortige Ausdruck (125.) ist jetzt

$4 \sin x \cos y \cos z = \sin 2z + \sin 2y - \sin 2x$ ,  
oder hier

$4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin 2\gamma + \sin 2\beta - \sin 2\alpha$ ;  
welches der zweite Ausdruck (3.) ist, woraus man die andern beiden (3.) durch Weiterrücken der Buchstaben findet.

IV. Der achte obige Ausdruck (126.) ist jetzt, weil  
 $\sin \frac{1}{2}(x + y) = \cos \frac{1}{2}z$ ,  $\cos \frac{1}{2}(x + z) = \cos \frac{1}{2}(2\rho - y)$   
 $= \cos(\rho - \frac{1}{2}y) = \sin \frac{1}{2}y$ , und eben so  $\cos \frac{1}{2}(y + z) = \sin \frac{1}{2}x$  ist,

$\sin x + \sin y - \sin z = 4 \cos \frac{1}{2}z \sin \frac{1}{2}y \sin x$ ,

oder hier

$\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma$ ;  
welches der erste der drei obigen Ausdrücke (4.) ist. Die andern beiden findet man durch Weiterrücken der Buchstaben.

V. Der dritte obige Ausdruck (127.) ist jetzt, weil  
 $\cos(x + y + z) = \cos 2\rho = -1$ ,  $\cos(x + y - z)$   
 $= \cos(2\rho - z - z) = \cos(2\rho - 2z) = -\cos 2z$  und eben so

$\cos(x - y + z) = -\cos 2y$ ,  $\cos(y + z - x) = -\cos 2x$  ist,

$4 \cos x \cos y \cos z = -1 - \cos 2x - \cos 2y - \cos 2z$ ;

welches den gegenwärtigen Ausdruck (5.) giebt.

VI. Der vierte obige Ausdruck (124.) ist jetzt, weil  
 $\cos \frac{1}{2}(x + y) = \sin \frac{1}{2}z$ ,  $\cos \frac{1}{2}(x + z) = \sin \frac{1}{2}y$  und  
 $\cos \frac{1}{2}(y + z) = \sin \frac{1}{2}x$  ist,

$\cos x + \cos y + \cos z = 4 \sin \frac{1}{2}x \sin \frac{1}{2}y \sin \frac{1}{2}z - 1$ ;

welches den gegenwärtigen Ausdruck (6.) giebt.



VII. Der fünfte obige Ausdruck (125.) ist jetzt, weil  $\sin(x+y+z) = 0$  ist,

$\text{tang } x \text{ tang } y \text{ tang } z = \text{tang } x + \text{tang } y + \text{tang } z;$   
welches der gegenwärtige Ausdruck (7.) ist.

VIII. Der sechste obige Ausdruck (124.) ist jetzt, weil  $\cos(x+y+z) = -1$  und

$\frac{1}{\sin x} = \text{cosec } x, \frac{1}{\sin y} = \text{cosec } y, \frac{1}{\sin z} = \text{cosec } z$  ist,  
 $\cot x \cot y \cot z = \cot x + \cot y + \cot z + \text{cosec } x \text{ cosec } y \text{ cosec } z;$   
welches den gegenwärtigen Ausdruck (8.) giebt.

363.

*Erläuterung.* Aus den Stücken, welche ein Dreieck bestimmen; muß sich auch der Flächen-Inhalt derselben finden lassen, also

- 1) aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel;
- 2) aus zwei Seiten und einem anliegenden Winkel;
- 3) aus einer Seite und zwei anliegenden Winkeln;
- 4) aus einer Seite und einem anliegenden und dem gegenüber liegenden Winkel;
- 5) aus den drei Seiten.

Dieses geschieht wie folgt.

364.

*Aufgabe I.* Den Inhalt  $\Delta$  eines beliebigen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu finden, also z. B. (Fig. 171. I. und II.)

$\Delta$  aus  $a, b$  und  $\gamma,$

$\Delta$  aus  $b, c$  und  $\alpha,$  und

$\Delta$  aus  $c, a$  und  $\beta.$

*Auflösung.* Wenn man z. B.  $BC = a$  zur Grundlinie nimmt, so ist das Perpendikel von  $A$  auf  $BC$  die Höhe des Dreiecks, also der Inhalt  $\Delta$  gleich  $\frac{1}{2} a \cdot AD$  (§. 116.).

Es ist aber  $AD = b \sin \gamma,$  also ist

$$1. \quad \begin{cases} \Delta = \frac{1}{2} a b \sin \gamma \text{ und folglich, durch Weiterrücken} \\ \text{der Buchstaben,} \\ \Delta = \frac{1}{2} b c \sin \alpha \\ \Delta = \frac{1}{2} c a \sin \beta. \end{cases}$$

Hiernach läßt sich bequem mit Logarithmen rechnen. Die Zahl, welche man für  $\Delta$  findet, ist die Zahl der Quadrate der Längen-Einheit, welche auf die Fläche des Dreiecks gehen.

**Aufgabe II.** Den Inhalt  $\Delta$  eines beliebigen Dreiecks aus zwei Seiten und einem anliegenden Winkel zu finden; also:

$\Delta$  aus  $a, b$  und  $\alpha$ , oder  $a, b$  und  $\beta$ ,

$\Delta$  aus  $b, c$  und  $\beta$ , oder  $b, c$  und  $\gamma$ ,

$\Delta$  aus  $c, a$  und  $\gamma$ , oder  $c, a$  und  $\alpha$ .

**Auflösung.** Zuzufolge (I.) ist z. B.  $\Delta = \frac{1}{2} b c \sin \alpha$ , oder  $= \frac{1}{2} a c \sin \beta$ .

Drückt man im ersten Falle  $c$  durch die gegebenen Stücke  $a, b$  und  $\alpha$  nach (§. 359. 74. 1ste Gleichung 1.) aus, nämlich durch

$$c = b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha},$$

so erhält man

$$2. \quad \begin{cases} \Delta = \frac{1}{2} b \sin \alpha [b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}] \\ \Delta = \frac{1}{2} c \sin \beta [c \cos \beta \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 \beta}] \\ \Delta = \frac{1}{2} a \sin \gamma [a \cos \gamma \pm \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \gamma}]. \end{cases}$$

Drückt man im andern Falle  $c$  durch  $a, b$  und  $\beta$  nach (§. 359. 74. 1ste Gleichung 2.) aus, nämlich durch  $c = a \cos \beta \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \beta}$ , so findet man

$$3. \quad \begin{cases} \Delta = \frac{1}{2} a \sin \beta [a \cos \beta \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \beta}] \\ \Delta = \frac{1}{2} b \sin \gamma [b \cos \gamma \pm \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 \gamma}] \\ \Delta = \frac{1}{2} c \sin \alpha [c \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha}]. \end{cases}$$

Die Gleichungen (2.) gehen in (3.) wie gehörig über, wenn man  $a$  und  $b, \alpha$  und  $\beta; b$  und  $c, \beta$  und  $\gamma; c$  und  $a, \gamma$  und  $\alpha$  verwechselt.

**Erster Fall.** Liegt der gegebene Winkel der größern von den beiden gegebenen Seiten gegenüber, so ist nur ein Dreieck möglich. In der That ist, wenn z. B. im ersten Ausdruck (2.)  $a > b$  ist,  $a^2 - b^2 \sin^2 \alpha$  größer als  $b^2 - b^2 \sin^2 \alpha$ , oder größer als  $b^2 \cos^2 \alpha$ ; mithin  $\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}$  größer als  $b \cos \alpha$ ; also ist alsdann einer von den beiden Werthen von  $b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}$  und folglich von  $\Delta$  negativ, was nicht Statt findet. Mithin hat alsdann  $\Delta$  nur einen Werth. Es folgt daraus, daß in diesem Falle in dem Ausdruck (2.), so wie (3.), nur das obere Zeichen gilt.

**Zweiter Fall.** Liegt der gegebene Winkel der kleinern von den beiden gegebenen Seiten gegenüber, so sind entweder zwei Dreiecke möglich, oder es ist keins möglich. In der That ist, wenn z. B. in dem ersten Ausdruck (2.)  $a > b$  ist,  $a^2 - b^2 \sin^2 \alpha$  kleiner als  $b^2 - b^2 \sin^2 \alpha$ , oder klei-

ner als  $b^2 \cos \alpha^2$ , mithin  $\sqrt{a^2 - b^2 \sin \alpha^2}$ , in so fern  $a^2 - b^2 \sin \alpha^2$  nicht negativ und also die WurzelgröÙe unmöglich ist, kleiner als  $b \cos \alpha$ . Also kann alsdann sowohl das obere als das untere Zeichen in den Ausdrücken (2.) und (3.) Statt finden.

Es giebt also, wenn z. B.  $a < b$  und zugleich  $a > b \sin \alpha$  ist, so daß die WurzelgröÙe  $\sqrt{a^2 - b^2 \sin \alpha^2}$  noch reell ist, zwei Dreiecke, deren Inhalt die Gleichungen (2.) (3.) durch das zweifache Zeichen ausdrücken. Ist z. B.  $a < b$  und auch  $a < b \sin \alpha$ , so ist kein Dreieck mit den gegebenen Winkeln möglich, und der Ausdruck des Inhalts (2.) und (3.) ist unmöglich.

*Aufgabe III.* Den Inhalt  $\Delta$  eines Dreiecks aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu finden,

also  $\Delta$  aus  $a, \beta$  und  $\gamma$ ,

$\Delta$  aus  $b, \gamma$  und  $\alpha$ , und

$\Delta$  aus  $c, \alpha$  und  $\beta$ .

*Auflösung.* Zuzolge (I.) ist z. B.  $\Delta = \frac{1}{2} ac \sin \beta$ .

Nun ist nach (§. 359. I.)  $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$ ; also ist

$$3. \quad \Delta = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)} = \frac{b^2 \sin \gamma \sin \alpha}{2 \sin(\gamma + \alpha)} = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)},$$

wonach sich bequem mit Logarithmen rechnen läßt.

Da z. B.

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma,$$

so ist auch  $\Delta = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 (\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma)}$ , und wenn man oben und unten mit  $\sin \beta \sin \gamma$  dividirt,

$$4. \quad \Delta = \frac{\frac{1}{2} a^2}{\cot \gamma + \cot \beta} = \frac{\frac{1}{2} b^2}{\cot \alpha + \cot \gamma} = \frac{\frac{1}{2} c^2}{\cot \beta + \cot \alpha}.$$

*Aufgabe IV.* Den Inhalt  $\Delta$  eines Dreiecks aus einer Seite und einem anliegenden und dem gegenüber liegenden Winkel zu finden, also

$\Delta$  aus  $a, \beta$  und  $\alpha$ , oder aus  $a, \gamma$  und  $\alpha$ ,

$\Delta$  aus  $b, \gamma$  und  $\beta$ , oder aus  $b, \alpha$  und  $\beta$ ,

$\Delta$  aus  $c, \alpha$  und  $\gamma$ , oder aus  $c, \beta$  und  $\gamma$ .

*Auflösung.* Zuzolge (I.) ist z. B.  $\Delta = \frac{1}{2} ac \sin \beta$ .

Nun ist nach (§. 359. II.)  $c = a \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$ , also ist

$$5. \quad \Delta = \frac{a^2 \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha} = \frac{b^2 \sin \gamma \sin(\beta + \gamma)}{2 \sin \beta} \\ = \frac{c^2 \sin \alpha \sin(\gamma + \alpha)}{2 \sin \gamma}.$$

Desgleichen ist nach (I.)  $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$  und nach (§. 359. II.),  $b = a \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha}$ . Also ist

$$6. \quad \Delta = \frac{a^2 \sin \gamma \sin(\alpha + \gamma)}{2 \sin \alpha} = \frac{b^2 \sin \alpha \sin(\beta + \alpha)}{2 \sin \beta} = \frac{c^2 \sin \beta \sin(\gamma + \beta)}{2 \sin \gamma};$$

wonach sich wiederum bequem mit Logarithmen rechnen läßt.

*Aufgabe V.* Den Inhalt  $\Delta$  eines Dreiecks aus den drei Seiten zu finden, also

$\Delta$  aus  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

*Auflösung.* Zuzufolge (I.) ist  $\Delta = \frac{1}{2} ac \sin \beta$ . Nun ist nach (§. 359. IX. 80.)

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)]}}{2ca}.$$

Also ist

$$7. \quad \Delta = \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)]},$$

wonach sich wieder bequem mit Logarithmen rechnen läßt.

Der Ausdruck (7.) stimmt mit (§. 174.) überein, und wie daselbst gezeigt, läßt sich auch der Inhalt des Dreiecks durch die drei Seiten wie folgt ausdrücken:

$$8. \quad \begin{cases} \Delta = \frac{1}{4} \sqrt{[(a^2 + c^2)^2 - (a^2 - c^2)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]}, \\ \Delta = \frac{1}{4} \sqrt{[(b^2 + a^2)^2 - (b^2 - a^2)^2 - (b^2 + a^2 - c^2)^2]}, \\ \Delta = \frac{1}{4} \sqrt{[(c^2 + b^2)^2 - (c^2 - b^2)^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2]}; \end{cases}$$

wonach sich mit Hülfe von Quadrat-Tafeln bequem rechnen läßt.

Da in (§. 359. u. 360.) von den Auflösungen ähnlicher Ausdrücke in Zahlen mehrere Beispiele gegeben worden, so wird sich hier und ferner der Raum, den noch mehrere Beispiele einnehmen würden, ersparen lassen.

### 365.

*Anmerkung.* Da noch viele andere Linien und Winkel als die Seiten und zwischen ihnen die Winkel, ein Dreieck bestimmen, so läßt sich auch der Inhalt eines Dreiecks noch auf viele andere Art ausdrücken, z. B. wie folgt.

### 366.

*Aufgabe.* Der Inhalt  $\Delta$  eines Dreiecks aus seinem Umfange  $p = a + b + c$ , wenn  $a$ ,  $b$  und  $c$  die Seiten sind, und aus seinen Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  zu finden.

*Auflösung.* Zufolge (§. 361.) ist z. B.

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{\sin \alpha}, \text{ also}$$

$$a = \sin \alpha \cdot \frac{a+b+c}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}, \text{ oder}$$

$$a = \frac{p \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}.$$

Eben so ist  $b = \frac{p \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}.$

Nun ist  $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$  (§. 364. I.). Also ist

$$1. \quad \Delta = \frac{\frac{1}{2} p^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2}.$$

Zufolge (§. 362. 1. und 2.) ist

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) \text{ und}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma.$$

Ferner ist zufolge (§. 345. 34.)

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha \cdot 2 \sin \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \beta \cdot 2 \sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \gamma.$$

Es ist also auch

$$2. \quad \Delta = \frac{1}{8} p^2 \cdot \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2} \text{ und}$$

$$\Delta = \frac{\frac{1}{2} p^2 \cdot 8 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma}{16 \cos \frac{1}{2} \alpha^2 \cos \frac{1}{2} \beta^2 \cos \frac{1}{2} \gamma^2}, \text{ oder}$$

$$3. \quad \Delta = \frac{1}{4} p^2 \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \beta \tan \frac{1}{2} \gamma,$$

oder auch, da  $\alpha + \beta + \gamma = 2\rho$ , also z. B.

$$\frac{1}{2} \gamma = \rho - \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \text{ und } \tan \frac{1}{2} \gamma = \cot \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \text{ ist,}$$

$$\Delta = \frac{1}{4} p^2 \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \beta \cot \frac{1}{2} (\alpha + \beta), \text{ oder}$$

$$\Delta = \frac{1}{4} p^2 \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \beta \frac{\cot \frac{1}{2} \alpha \cot \frac{1}{2} \beta - 1}{\cot \frac{1}{2} \alpha + \cot \frac{1}{2} \beta} \quad (\S. 345. 26.),$$

folglich

$$\Delta = \frac{1}{4} p^2 \cdot \frac{1 - \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \beta}{\cot \frac{1}{2} \alpha + \cot \frac{1}{2} \beta},$$

$$\Delta = \frac{1}{4} p^2 \cdot \frac{1 - \tan \frac{1}{2} \beta \tan \frac{1}{2} \gamma}{\cot \frac{1}{2} \beta + \cot \frac{1}{2} \gamma},$$

$$\Delta = \frac{1}{4} p^2 \cdot \frac{1 - \tan \frac{1}{2} \gamma \tan \frac{1}{2} \alpha}{\cot \frac{1}{2} \gamma + \cot \frac{1}{2} \alpha}.$$

367.

*Erläuterung.* Ist eine Seite oder ein Winkel weniger gegeben als ein Dreieck bestimmen, dagegen aber der Inhalt, so läßt sich aus den Gleichungen zwischen dem Inhalt und den bestimmenden Stücken umgekehrt das fehlende Stück finden. Die Gleichungen (§. 364. u. 365.)

enthalten daher zugleich die Auflösungen von eben so viel Aufgaben als auf diese Weise entstehen; wie folgt.

## 368.

**Aufgabe I.** Aus dem Inhalt und zwei Seiten eines Dreiecks den von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkel zu finden.

**Auflösung.** Folgt aus (§. 364. I.) unmittelbar, nämlich:

$$1. \sin \alpha = \frac{2\Delta}{bc}, \quad \sin \beta = \frac{2\Delta}{ca}, \quad \sin \gamma = \frac{2\Delta}{ab}.$$

**Aufgabe II.** Aus dem Inhalt eines Dreiecks, einer Seite und einem daran liegenden Winkel, die andere, an dem Winkel liegende Seite zu finden.

**Auflösung.** Folgt aus (§. 364. I.) unmittelbar, nämlich

$$2. a = \frac{2\Delta}{b \sin \gamma}, \quad b = \frac{2\Delta}{c \sin \alpha}, \quad c = \frac{2\Delta}{a \sin \beta},$$

$$3. b = \frac{2\Delta}{a \sin \gamma}, \quad c = \frac{2\Delta}{b \sin \alpha}, \quad a = \frac{2\Delta}{c \sin \beta}.$$

**Aufgabe III.** Aus dem Inhalt eines Dreiecks, einer Seite und dem gegenüber liegenden Winkel, eine der beiden andern Seiten zu finden.

**Auflösung A.** Aus (§. 364. II. 2. erste Gleichung) z. B. folgt

$$2\Delta - b^2 \sin \alpha \cos \alpha = \pm b \sin \alpha \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}, \text{ also}$$

$$4\Delta^2 - 4\Delta b^2 \sin \alpha \cos \alpha + b^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$= a^2 b^2 \sin^2 \alpha - b^4 \sin^2 \alpha, \text{ oder}$$

$$b^4 \sin^2 \alpha - (a^2 \sin \alpha + 4\Delta \cos \alpha) b^2 \sin \alpha + 4\Delta^2 = 0, \text{ oder}$$

$$b^4 - (a^2 + 4\Delta \cot \alpha) b^2 + 4\Delta^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha = 0, \text{ folglich}$$

$$6. b^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2\Delta \cot \alpha \pm \sqrt{[(\frac{1}{2}a^2 + 2\Delta \cot \alpha)^2 - 4\Delta^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha]}.$$

**B.** Setzt man in den Ausdruck (§. 364. 2. erste Gleichung), woraus diese Gleichung genommen,  $c$  statt  $b$ , so erhält man den Ausdruck (§. 364. II. 3. dritte Gleichung). Was aus diesem folgt, muß man also aus (5.) finden, wenn man  $c$  statt  $b$  setzt. Also ist

$$6. c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2\Delta \cot \alpha \pm \sqrt{[(\frac{1}{2}a^2 + 2\Delta \cot \alpha)^2 - 4\Delta^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha]}.$$

**C.** Da  $b$  nicht nothwendig gleich  $c$  ist, so folgt, daß man für  $b$  und  $c$  verschiedene Zeichen der Wurzelgröße nehmen muß, so daß  $b^2$  und  $c^2$  im Grunde nur einen Werth haben. Es ist also z. B.

$$7. b^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2\Delta \cot \alpha + \sqrt{[(\frac{1}{2}a^2 + 2\Delta \cot \alpha)^2 - 4\Delta^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha]},$$

$$8. c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2\Delta \cot \alpha - \sqrt{[(\frac{1}{2}a^2 + 2\Delta \cot \alpha)^2 - 4\Delta^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha]}.$$

D. Zusammen also ist

$$\begin{aligned} 8. & \begin{cases} b^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2\Delta \cot \alpha + \sqrt{[(\frac{1}{2}a^2 + 2\Delta \cot \alpha)^2 - 4\Delta^2 \operatorname{cosec} \alpha^2]}, \\ c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2\Delta \cot \alpha - \sqrt{[(\frac{1}{2}a^2 + 2\Delta \cot \alpha)^2 - 4\Delta^2 \operatorname{cosec} \alpha^2]}. \end{cases} \\ 9. & \begin{cases} c^2 = \frac{1}{2}b^2 + 2\Delta \cot \beta + \sqrt{[(\frac{1}{2}b^2 + 2\Delta \cot \beta)^2 - 4\Delta^2 \operatorname{cosec} \beta^2]}, \\ a^2 = \frac{1}{2}b^2 + 2\Delta \cot \beta - \sqrt{[(\frac{1}{2}b^2 + 2\Delta \cot \beta)^2 - 4\Delta^2 \operatorname{cosec} \beta^2]}. \end{cases} \\ 10. & \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2\Delta \cot \gamma + \sqrt{[(\frac{1}{2}c^2 + 2\Delta \cot \gamma)^2 - 4\Delta^2 \operatorname{cosec} \gamma^2]}, \\ b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2\Delta \cot \gamma - \sqrt{[(\frac{1}{2}c^2 + 2\Delta \cot \gamma)^2 - 4\Delta^2 \operatorname{cosec} \gamma^2]}. \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe IV. Aus dem Inhalt und zweiten Seiten eines Dreiecks einen anliegenden Winkel zu finden.

Auflösung A. Aus (§. 364. II. 2. erste Gleichung)

folgt

$$2\Delta - b^2 \sin \alpha \cos \alpha = \pm b \sin \alpha \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}, \text{ oder } 4\Delta^2 - 4\Delta b^2 \sin \alpha \cos \alpha + b^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = b^2 a^2 \sin^2 \alpha - b^4 \sin^4 \alpha,$$

oder

$$4\Delta^2 - 4\Delta b^2 \sin \alpha \cos \alpha + b^4 \sin^2 \alpha = b^2 a^2 \sin^2 \alpha, \text{ oder mit } \sin^2 \alpha \text{ dividirt,}$$

$$4\Delta^2 \operatorname{cosec} \alpha^2 - 4\Delta b^2 \cot \alpha + b^2(b^2 - a^2) = 0, \text{ oder } 4\Delta \cot \alpha^2 - 4\Delta b^2 \cot \alpha + 4\Delta^2 + b^2(b^2 - a^2) = 0; \text{ also } 2\Delta \cot \alpha = b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4\Delta^2 - b^4 + b^2 a^2}, \text{ oder}$$

$$11. \cot \alpha = \frac{b^2 \pm \sqrt{(b^2 a^2 - 4\Delta^2)}}{2\Delta}.$$

B. Da die erste Gleichung (§. 364. II. 2.), woraus dieser Ausdruck genommen in die erste Gleichung (§. 364. II. 3.) übergeht, wenn man  $\alpha$  mit  $\beta$  und  $a$  mit  $b$  wechselt, so giebt diese letzte:

$$12. \cot \beta = \frac{a^2 \pm \sqrt{(a^2 b^2 - 4\Delta^2)}}{2\Delta}.$$

C. Da  $\cot \alpha$  und  $\cot \beta$  nur einen Werth haben können, so kann man in den beiden Ausdrücken (11. u. 12.) nur entgegengesetzte Zeichen der Wurzelgröße nehmen. Es ist also, zusammengekommen:

$$13. \begin{cases} \cot \alpha = \frac{b^2 + \sqrt{(a^2 b^2 - 4\Delta^2)}}{2\Delta}, \\ \cot \beta = \frac{a^2 - \sqrt{(a^2 b^2 - 4\Delta^2)}}{2\Delta}; \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \cot \beta = \frac{c^2 + \sqrt{(b^2 c^2 - 4\Delta^2)}}{2\Delta}, \\ \cot \gamma = \frac{b^2 - \sqrt{(b^2 c^2 - 4\Delta^2)}}{2\Delta}; \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \cot \gamma = \frac{a^2 + \sqrt{(c^2 a^2 - 4\Delta^2)}}{2\Delta}, \\ \cot \alpha = \frac{c^2 - \sqrt{(c^2 a^2 - 4\Delta^2)}}{2\Delta}. \end{cases}$$

**Aufgabe V.** Aus dem Inhalt eines Dreiecks und einem daran liegenden Winkel die diesem Winkel gegenüber liegende Seite zu finden.

**Auflösung.** Wie in (IV.) findet man aus der ersten Gleichung (§. 364. II. 2.)

$$4\Delta^2 - 4\Delta b^2 \sin \alpha \cos \alpha + b^4 \sin^2 \alpha = b^2 a^2 \sin^2 \alpha,$$

also, wenn man mit  $b^2 \sin^2 \alpha$  dividirt,

$$16. \quad a^2 = \frac{4\Delta^2}{b^2 \sin^2 \alpha} - 4\Delta \cot \alpha + b^2;$$

und da die erste Gleichung (§. 364. II. 2.) in die zweite (§. 364. II. 3.) übergeht, wenn man  $\alpha$  mit  $\gamma$  und  $a$  mit  $c$  verwechselt,

$$17. \quad c^2 = \frac{4\Delta^2}{b^2 \sin^2 \gamma} - 4\Delta \cot \gamma + b^2.$$

Es ist also, zusammengenommen:

$$18. \quad \begin{cases} a^2 = \frac{4\Delta^2}{b^2 \sin^2 \alpha} - 4\Delta \cot \alpha + b^2, \\ c^2 = \frac{4\Delta^2}{b^2 \sin^2 \gamma} - 4\Delta \cot \gamma + b^2; \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} b^2 = \frac{4\Delta^2}{c^2 \sin^2 \beta} - 4\Delta \cot \beta + c^2, \\ a^2 = \frac{4\Delta^2}{c^2 \sin^2 \alpha} - 4\Delta \cot \alpha + c^2; \end{cases}$$

$$20. \quad \begin{cases} c^2 = \frac{4\Delta^2}{a^2 \sin^2 \gamma} - 4\Delta \cot \gamma + a^2, \\ b^2 = \frac{4\Delta^2}{a^2 \sin^2 \beta} - 4\Delta \cot \beta + a^2. \end{cases}$$

**Aufgabe VI.** Aus dem Inhalt eines Dreiecks, einer Seite und einem daran liegenden Winkel, den andern anliegenden Winkel zu finden.

**Auflösung.** Aus (§. 364. III. 4.) z. B. folgt

$$\cot \gamma + \cot \beta = \frac{a^2}{2\Delta}. \quad \text{Also ist}$$

$$21. \quad \cot \gamma = \frac{a^2}{2\Delta} - \cot \beta, \quad \cot \beta = \frac{a^2}{2\Delta} - \cot \gamma,$$

$$22. \quad \cot \alpha = \frac{b^2}{2\Delta} - \cot \gamma, \quad \cot \gamma = \frac{b^2}{2\Delta} - \cot \alpha,$$

$$23. \quad \cot \beta = \frac{c^2}{2\Delta} - \cot \alpha, \quad \cot \alpha = \frac{c^2}{2\Delta} - \cot \beta.$$

**Aufgabe VII.** Aus dem Inhalt eines Dreiecks und zwei Winkeln die zwischen diesen Winkeln liegende Seite zu finden.



*Auflösung.* Aus (§. 364. III. 3.) folgt  
 $a^2 = \frac{2 \Delta \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}$ , also

$$24. \quad a^2 = \frac{2 \Delta \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma},$$

$$25. \quad b^2 = \frac{2 \Delta \sin(\gamma + \alpha)}{\sin \gamma \sin \alpha},$$

$$26. \quad c^2 = \frac{2 \Delta \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

*Aufgabe VIII.* Aus dem Inhalt eines Dreiecks, einem Winkel und einer daran liegenden Seite, den dieser Seite gegenüber liegenden Winkel zu finden.

*Auflösung.* Aus (§. 364. IV. 5.) folgt  
 $\Delta = \frac{a^2 \sin \beta (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}{2 \sin \alpha}$

$$= \frac{1}{2} a^2 \sin \beta (\cos \beta + \sin \beta \cot \alpha), \text{ oder}$$

$$2 \Delta - a^2 \sin \beta \cos \beta = a^2 \sin \beta \cot \alpha, \text{ also}$$

$$\cot \alpha = \frac{2 \Delta}{a^2 \sin \beta} - \cos \beta.$$

Eben so findet man aus (§. 364. IV. 6.)

$$\cot \alpha = \frac{2 \Delta}{a^2 \sin \gamma} - \cos \gamma. \text{ Also ist, zusammengenommen:}$$

$$27. \quad \cot \alpha = \frac{2 \Delta}{a^2 \sin \beta} - \cos \beta = \frac{2 \Delta}{a^2 \sin \gamma} - \cos \gamma,$$

$$28. \quad \cot \beta = \frac{2 \Delta}{b^2 \sin \gamma} - \cos \gamma = \frac{2 \Delta}{b^2 \sin \alpha} - \cos \alpha,$$

$$29. \quad \cot \gamma = \frac{2 \Delta}{c^2 \sin \alpha} - \cos \alpha = \frac{2 \Delta}{c^2 \sin \beta} - \cos \beta.$$

*Aufgabe IX.* Aus dem Inhalt eines Dreiecks und zwei Winkeln die dem einen von ihnen gegenüber liegende Seite zu finden.

*Auflösung.* Aus (§. 364. IV. 5. und 6.) folgt unmittelbar

$$30. \quad a^2 = \frac{2 \Delta \sin \alpha}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \frac{2 \Delta \sin \alpha}{\sin \gamma \sin(\alpha + \gamma)},$$

also auch

$$31. \quad b^2 = \frac{2 \Delta \sin \beta}{\sin \gamma \sin(\beta + \gamma)} = \frac{2 \Delta \sin \beta}{\sin \alpha \sin(\beta + \alpha)},$$

$$32. \quad c^2 = \frac{2 \Delta \sin \gamma}{\sin \alpha \sin(\gamma + \alpha)} = \frac{2 \Delta \sin \gamma}{\sin \beta \sin(\gamma + \beta)}.$$

*Auf-*

**Aufgabe X.** Aus dem Inhalt eines Dreiecks, einem Winkel und der ihm gegenüber liegenden Seite, einen der anliegenden Winkel zu finden.

**Auflösung.** A. Aus (§. 364. IV. 5.) folgt

$$2 \Delta \sin \alpha = a^2 \sin \beta (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta),$$

und wenn man mit  $\sin \alpha \sin \beta^2$  dividirt,

$$2 \Delta \operatorname{cosec} \beta^2 = a^2 (\cot \beta + \cot \alpha), \text{ oder}$$

$$\cot \beta^2 - \frac{a^2}{2 \Delta} \cot \beta - \frac{a^2}{2 \Delta} \cot \alpha + 1 = 0, \text{ also}$$

$$\cot \beta = \frac{a^2}{4 \Delta} \pm \sqrt{\left( \frac{a^4}{16 \Delta^2} + \frac{a^2 \cot \alpha}{2 \Delta} - 1 \right)}, \text{ oder}$$

$$\cot \beta = \frac{a^2 \pm \sqrt{(a^4 + 8 a^2 \Delta \cot \alpha - 16 \Delta^2)}}{4 \Delta}.$$

B. Da der erste Ausdruck (§. 364. IV. 5.) in den ersten Ausdruck (§. 364. IV. 6.) übergeht, wenn man  $\gamma$  statt  $\beta$  setzt, so ist auch

$$\cot \gamma = \frac{a^2 \pm \sqrt{(a^4 + 8 a^2 \Delta \cot \alpha - 16 \Delta^2)}}{4 \Delta}.$$

C. Wegen der Gleichheit der Ausdrücke haben die Wurzelgrößen in  $\cot \beta$  und  $\cot \gamma$  entgegengesetzte Zeichen. Also ist zusammengenommen

$$33. \quad \begin{cases} \cot \beta = \frac{a^2 + \sqrt{(a^4 + 8 a^2 \Delta \cot \alpha - 16 \Delta^2)}}{4 \Delta}, \\ \cot \gamma = \frac{a^2 - \sqrt{(a^4 + 8 a^2 \Delta \cot \alpha - 16 \Delta^2)}}{4 \Delta}; \end{cases}$$

$$34. \quad \begin{cases} \cot \gamma = \frac{b^2 + \sqrt{(b^4 + 8 b^2 \Delta \cot \beta - 16 \Delta^2)}}{4 \Delta}, \\ \cot \alpha = \frac{b^2 - \sqrt{(b^4 + 8 b^2 \Delta \cot \beta - 16 \Delta^2)}}{4 \Delta}; \end{cases}$$

$$35. \quad \begin{cases} \cot \alpha = \frac{c^2 + \sqrt{(c^4 + 8 c^2 \Delta \cot \gamma - 16 \Delta^2)}}{4 \Delta}, \\ \cot \beta = \frac{c^2 - \sqrt{(c^4 + 8 c^2 \Delta \cot \gamma - 16 \Delta^2)}}{4 \Delta}. \end{cases}$$

**Aufgabe XI.** Aus dem Inhalt eines Dreiecks und zwei seiner Seiten die dritte Seite zu finden.

**Auflösung.** Aus dem ersten Ausdruck (§. 364. V. 8.) folgt

$$16 \Delta^2 = (a^2 + c^2)^2 - (a^2 - c^2)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2, \text{ oder}$$

$$16 \Delta^2 = 4 a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2, \text{ oder}$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2 \sqrt{(a^2 c^2 - 4 \Delta^2)}; \text{ also}$$

$$36. \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \sqrt{(a^2 c^2 - 4 \Delta^2)} \text{ und eben so}$$

$$37. c^2 = b^2 + a^2 - 2\sqrt{(b^2 a^2 - 4\Delta^2)},$$

$$38. a^2 = c^2 + b^2 - 2\sqrt{(c^2 b^2 - 4\Delta^2)}.$$

**Aufgabe XII.** Aus dem Inhalt und den Winkeln eines Dreiecks seinen Umfang  $p$  zu finden.

**Auflösung.** Aus (§. 366. 3.) folgt unmittelbar

$$39. p^2 = 4\Delta \cot \frac{1}{2}\alpha \cot \frac{1}{2}\beta \cot \frac{1}{2}\gamma.$$

**Aufgabe XIII.** Aus dem Inhalt, Umfang und einem Winkel eines Dreiecks, einen der beiden übrigen Winkel zu finden.

**Auflösung.** A. Aus dem ersten Ausdruck (§. 366. 4.) folgt

$$4\Delta \left( \frac{1}{\tan \frac{1}{2}\alpha} + \frac{1}{\tan \frac{1}{2}\beta} \right) = p^2 (1 - \tan \frac{1}{2}\alpha \tan \frac{1}{2}\beta),$$

oder

$$4\Delta (\tan \frac{1}{2}\beta + \tan \frac{1}{2}\alpha) = p^2 (\tan \frac{1}{2}\alpha \tan \frac{1}{2}\beta - \tan \frac{1}{2}\alpha^2 \tan \frac{1}{2}\beta^2),$$

oder

$$\frac{4\Delta}{p^2} (\cot \frac{1}{2}\beta + \tan \frac{1}{2}\alpha \cot \frac{1}{2}\beta^2) = \tan \frac{1}{2}\alpha \cot \frac{1}{2}\beta - \tan \frac{1}{2}\alpha^2, \text{ oder}$$

$$\tan \frac{1}{2}\alpha^2 - \tan \frac{1}{2}\alpha \cot \frac{1}{2}\beta \left( 1 - \frac{4\Delta \cot \frac{1}{2}\beta}{p^2} \right) + \frac{4\Delta \cot \frac{1}{2}\beta}{p^2} = 0;$$

also

$$\tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2}\beta \left( 1 - \frac{4\Delta \cot \frac{1}{2}\beta}{p^2} \right)$$

$$\pm \sqrt{\left( \frac{1}{4} \cot \frac{1}{2}\beta^2 \left( 1 - \frac{4\Delta \cot \frac{1}{2}\beta}{p^2} \right)^2 - \frac{4\Delta \cot \frac{1}{2}\beta}{p^2} \right)}, \text{ oder}$$

$$\tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{\cot \frac{1}{2}\beta}{2p^2} [(p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\beta) \pm \sqrt{(p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\beta)^2 - 16p^2 \Delta \tan \frac{1}{2}\beta}].$$

B. Das eine Zeichen der Wurzelgröſſe gilt für  $\alpha$ , das andere für  $\gamma$ ; also ist überhaupt

$$40. \begin{cases} \tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{\cot \frac{1}{2}\beta}{2p^2} [p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\beta + \sqrt{(p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\beta)^2 - 16p^2 \Delta \tan \frac{1}{2}\beta}] \\ \tan \frac{1}{2}\gamma = \frac{\cot \frac{1}{2}\beta}{2p^2} [p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\beta - \sqrt{(p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\beta)^2 - 16p^2 \Delta \tan \frac{1}{2}\beta}] \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} \tan \frac{1}{2}\beta = \frac{\cot \frac{1}{2}\gamma}{2p^2} [p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\gamma + \sqrt{(p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\gamma)^2 - 16p^2 \Delta \tan \frac{1}{2}\gamma}] \\ \tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{\cot \frac{1}{2}\gamma}{2p^2} [p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\gamma - \sqrt{(p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\gamma)^2 - 16p^2 \Delta \tan \frac{1}{2}\gamma}] \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} \tan \frac{1}{2}\gamma = \frac{\cot \frac{1}{2}\alpha}{2p^2} [p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{(p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\alpha)^2 - 16p^2 \Delta \tan \frac{1}{2}\alpha}] \\ \tan \frac{1}{2}\beta = \frac{\cot \frac{1}{2}\alpha}{2p^2} [p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\alpha - \sqrt{(p^2 - 4\Delta \cot \frac{1}{2}\alpha)^2 - 16p^2 \Delta \tan \frac{1}{2}\alpha}] \end{cases}$$

**Aufgabe XIV.** Aus dem Inhalt, Umfang und einem Winkel eines Dreiecks eine Seite zu finden.

**Auflösung.** Man suche nach (XIII.) einen der beiden übrigen Winkel, z. B. wenn  $\alpha$  gegeben ist,  $\gamma$ , so hat man auch  $\beta = 2\rho - \alpha - \gamma$ , folglich sind alsdann  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$  und  $\sin \gamma$  bekannt.

Nun ist

$$p = a + b + c = a \left( 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right) = a \left( 1 + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right)$$

$$(\S. 361.) = \frac{a}{\sin \alpha} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma), \text{ folglich}$$

$$43. \quad a = \frac{p \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$$

$$44. \quad b = \frac{p \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$$

$$45. \quad c = \frac{p \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$$

369.

**Anmerkung.** Die Aufgaben des vorigen Paragraphs kommen gewöhnlich so vor, daß verlangt wird: eine Fläche von gegebener Grösse mittelst einer geraden Linie von einem Dreieck, oder von einer andern Figur, oder auch von einem unbestimmten Winkelraum auf die Weise abzuschneiden, daß die abgeschnittene Fläche ein Dreieck ist. Die gegebenen Stücke können, außer dem Inhalt, diese oder jene Seiten und Winkel, oder der Umfang des abzuschneidenden Dreiecks seyn. Mehr Fälle als im vorigen Paragraph kommen, in sofern nur von Seiten und Winkeln, oder von Umfang und Winkeln des abzuschneidenden Dreiecks die Rede ist, nicht vor.

Die gewöhnlichsten Aufgaben sind folgende.

Ein Dreieck ABC (Fig. 173.) von gegebener Grösse  $\Delta$  von einer gegebenen beliebigen Figur ADEGH, oder von einem gegebenen Winkelraum DAH so abzuschneiden,

- 1) daß die schneidende Linie BC mit dem einem Schenkel des Winkels DAH, z. B. mit AD, einen gegebenen Winkel  $\beta$  macht;
- 2) daß die schneidende Linie BC den einen Schenkel des Winkels DAH, z. B. AD, in gegebener Entfernung  $AB = a$  vom Scheitel begegnet;
- 3) daß die schneidende Linie BC eine gegebene Länge  $a$  hat;
- 4) daß das abgeschnittene Dreieck ABC einen gegebenen Umfang  $p$  hat.

Im ersten Falle ist gegeben  $\Delta$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ : gesucht wird z. B.  $c$  und  $b$ . Zuzfolge (§. 368. VII. 26. und VIII. 31.) ist

$$c^2 = \frac{2 \Delta \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad b^2 = \frac{2 \Delta \sin \beta}{\sin \alpha \sin(\beta + \alpha)}.$$

Im zweiten Falle ist gegeben  $\Delta$ ,  $c$  und  $\alpha$ : gesucht wird z. B.  $b$ .

Zuzfolge (§. 368. II. 2.) ist

$$b = \frac{2 \Delta}{c \sin \alpha}.$$

Im dritten Falle ist gegeben  $\Delta$ ,  $\alpha$  und  $\alpha$ : gesucht werden  $b$  und  $c$ .

Zuzfolge (§. 368. III. 8.) ist

$$b^2 = \frac{1}{2} a^2 + 2 \Delta \cot \alpha + \sqrt{[(\frac{1}{2} a^2 + 2 \Delta \cot \alpha)^2 - 4 \Delta^2 \operatorname{cosec} \alpha^2]},$$

$$c^2 = \frac{1}{2} a^2 + 2 \Delta \cot \alpha - \sqrt{[(\frac{1}{2} a^2 + 2 \Delta \cot \alpha)^2 - 4 \Delta^2 \operatorname{cosec} \alpha^2]}.$$

Im vierten Falle ist gegeben  $\Delta$ ,  $\alpha$  und  $p$ : gesucht werden  $b$  und  $c$ .

Man suche zu Folge (§. 368. XIII. 42.) aus

$$\tan \frac{1}{2} \gamma = \frac{\cot \frac{1}{2} \alpha}{2 p^2} [p^2 - 4 \Delta \cot \frac{1}{2} \alpha + \sqrt{(p^2 - 4 \Delta \cot \frac{1}{2} \alpha)^2 - 16 p^2 \Delta \tan \frac{1}{2} \alpha}]$$

den Winkel  $\gamma$  und aus  $\beta = 2 \rho - \beta - \gamma$  den Winkel  $\beta$ , so findet man nach (§. 368. XIV. 44. und 45.)

$$b = \frac{p \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} \quad \text{und} \quad c = \frac{p \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}.$$

Die bestimmenden Stücke in der Aufgabe: ein Dreieck von gegebener Grösse aus einem Winkel abzuschneiden, können auch noch auf manche andere Art gegeben seyn. Einer der gewöhnlichen Fälle ist folgender.

370.

**Aufgabe.** Von einer beliebigen gegebenen Figur (Fig. 173.), oder vielmehr von einem gegebenen Winkelraume DAH, mittelst einer graden Linie BC ein Dreieck ABC von gegebener Grösse  $\Delta$  so abzuschneiden, dass die Schnittlinie durch einen gegebenen Punct P geht.

**Auflösung.** Es sey PM mit AH parallel und AM = q, PM = s, wodurch der Punct P gegeben ist. Die Dreiecke BPM und BCA sind ähnlich. Also ist  $\frac{BM}{PM} = \frac{AB}{AC}$  oder  $\frac{q-c}{s} = \frac{c}{b}$ , woraus  $b = \frac{cs}{q-c}$  folgt.

Nun ist  $\Delta = \frac{\frac{1}{2} c^2 s \sin \alpha}{q-c}$ . Daraus folgt  $2 \Delta q - 2 \Delta c$

$$= c^2 s \sin \alpha, \quad \text{oder} \quad c^2 + \frac{2 \Delta}{s \sin \alpha} \cdot c - \frac{2 \Delta q}{s \sin \alpha}, \quad \text{also}$$

$$c = -\frac{\Delta}{s \sin \alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta^2}{s^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2\Delta q}{s \sin \alpha}\right)}, \text{ oder}$$

$$c = \frac{\Delta}{s \sin \alpha} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \frac{2qs \sin \alpha}{\Delta}} \right].$$

Dadurch findet man den Punct B und folglich die Lage der Schnittlinie PBC.

## B. Polygonometrie.

371.

**Erläuterung.** Der Gegenstand der Polygonometrie ist: aus diesen oder jenen bestimmenden Stücken eines beliebigen Vielecks andere nicht gegebene Stücke, oder den Inhalt, oder andere Eigenschaften der Figur zu finden. Am gewöhnlichsten werden aus den bestimmenden Seiten und Winkeln die übrigen Seiten und Winkel, oder der Inhalt der Figur gesucht.

An den Seiten und Winkeln, wenn sie die bestimmenden Stücke seyn sollen, können (man sehe §. 96.) fehlen:

I. drei Winkel, welche

- 1) entweder an einander liegen, oder von welchen
- 2) zwei an einander liegen und einer abgesondert ist, oder welche
- 3) alle drei getrennt sind.

II. Zwei Winkel und eine Seite, und zwar

- 4) die Winkel an einander, die Seite dazwischen;
- 5) die Winkel an einander, die Seite an einem Winkel;
- 6) die Winkel an einander, die Seite abgesondert;
- 7) die Winkel getrennt, die Seite an einem Winkel;
- 8) die Winkel getrennt, die Seite abgesondert;

III. Zwei Seiten, und zwar

- 9) an einander, oder
- 10) getrennt.

Die übrigen Seiten und Winkel sind die bestimmenden.

Mehr Fälle als die aufgezählten sind nicht möglich, und die fehlenden Seiten und Winkel müssen allemal aus den gegebenen gefunden werden können, weil die Figur durch die gegebenen Stücke bestimmt ist und folglich die fehlenden Stücke von den gegebenen abhängen.

## 372.

**Erläuterung.** Will man sich, wie oben beim Dreieck, auflösender Gleichungen bedienen, so müssen diese Gleichungen ausser den gegebenen Stücken noch eines von den fehlenden Seiten und Winkeln enthalten, damit dieses eine Stück daraus gefunden werden kann. Es dürfen also in den auflösenden Gleichungen an den sämtlichen Seiten und Winkeln nur fehlen:

I. zwei Winkel,

1) neben einander, oder

2) getrennt.

II. 3) Eine Seite, und nach Belieben ein Winkel, welcher sich durch die übrigen Winkel findet.

Es giebt daher in allem nur drei auflösende Gleichungen, welche die Auflösung aller möglichen Aufgaben: aus den bestimmenden Seiten und Winkeln eines beliebigen Vielecks die übrigen Seiten und Winkel zu finden, enthalten.

Diese auflösenden Gleichungen beruhen auf folgenden Lehrsätzen.

## 373.

**Lehrsätze.** I. Wenn man die Seiten eines  $n$  Ecks (Fig. 174.), in der Reihe wie sie auf einander folgen, durch  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ , und die Winkel, welche je zwei Seiten, verlängert wenn es nöthig ist, mit einander einschließen, durch die Zeichen der Seiten, in Klammern eingeschlossen, z. B. durch  $(c_1 c_2), (c_1 c_3), (c_2 c_3), (c_1 c_4)$  etc. bezeichnet, so ist, wenn man z. B. die Seite  $c_1$  zur Grundlinie nimmt,

$$1. c_2 \sin(c_2 c_1) + c_3 \sin(c_3 c_1) + c_4 \sin(c_4 c_1) \dots + c_n \sin(c_n c_1) = 0 \text{ und}$$

$$2. c_2 \cos(c_2 c_1) + c_3 \cos(c_3 c_1) + c_4 \cos(c_4 c_1) \dots + c_n \cos(c_n c_1) = c_1$$

Solche Gleichungen finden für jede Seite, die man zur Grundlinie nimmt, Statt, und man erhält die Gleichungen für die folgenden Grundlinien, wenn man die Zeiger von  $c$  weiter rückt; wobei zu bemerken, daß auf den Zeiger  $n$  wieder der Zeiger 1 folgt. Nimmt man z. B. die folgende Seite  $c_2$  zur Grundlinie an, so mußs man alle Zeiger um 1 weiter rücken, welches

$$c_3 \sin(c_3 c_2) + c_4 \sin(c_4 c_2) + c_5 \sin(c_5 c_2) \dots c_1 \sin(c_1 c_2) = 0 \text{ und}$$

$$c_3 \cos(c_3 c_2) + c_4 \cos(c_4 c_2) + c_5 \cos(c_5 c_2) \dots c_1 \cos(c_1 c_2) = c_2$$

giebt.

II. Bezeichnet man die Winkel, welche die Seiten mit den nächst folgenden insbesondere, einschließen,

von den Winkeln zwischen  $c_1$  und  $c_2$  anfangend, durch  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ , so sind die Winkel, welche die Seiten der Reihe nach, z. B. mit der Grundlinie  $c_1$  einschließen,

$$3. \begin{cases} (c_2 c_1) = \gamma_1, \\ (c_3 c_1) = \gamma_1 + \gamma_2 - 2\rho, \\ (c_4 c_1) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 4\rho, \\ (c_5 c_1) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 6\rho, \\ \dots \\ (c_n c_1) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1} - 2(n-2)\rho. \end{cases}$$

Durch Weiterrücken der Buchstaben findet man diejenigen, welche sie der Reihe nach mit der Grundlinie  $c_2$  einschließen, nemlich:

$$3. I. \begin{cases} (c_3 c_2) = \gamma_2, \\ (c_4 c_2) = \gamma_2 + \gamma_3 - 2\rho, \\ (c_5 c_2) = \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 4\rho, \\ (c_6 c_2) = \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 - 6\rho, \\ \dots \\ (c_n c_2) = \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \dots + \gamma_n - 2(n-2)\rho; \end{cases}$$

u. s. w.

### III. Bezeichnet man

Erstlich die Summe der Producte einer beliebigen Zahl auf einander folgender Seiten eines Vielecks, jede in die allen vorhergehende Seite und auch in den Sinus des Winkels multiplicirt, welchen sie mit jener Seite einschließt, durch  $p$ , mit dem Zeiger der ersten und letzten Seite, und wenn die  $n$ te Seite dazwischen liegt, auch mit  $n$  dazwischen, also z. B. die Producten-Summe

$$4. \begin{cases} c_2 \sin(c_2 c_1) + c_3 \sin(c_3 c_1) + c_4 \sin(c_4 c_1) + \dots + c_n \sin(c_n c_1) \text{ durch } p_{2,n}, \\ c_3 \sin(c_3 c_2) + c_4 \sin(c_4 c_2) + \dots + c_n \sin(c_n c_2) + c_2 \sin(c_2 c_7) \text{ durch } p_{3,n,2}, \\ c_5 \sin(c_5 c_4) + c_6 \sin(c_6 c_4) + c_7 \sin(c_7 c_4) + \dots + c_{11} \sin(c_{11} c_4) \text{ durch } p_{5,11}, \end{cases}$$

u. s. w.

Zweitens. Die Summen der Producte einer beliebigen Zahl auf einander folgender Seiten, jede in die allen vorhergehende Seite und noch in den Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen sie mit jener Seite einschließt, durch  $q$ , mit dem Zeiger der ersten und letzten Seite, und wenn die  $n$ te Seite dazwischen liegt, auch mit  $n$  dazwischen, also z. B. die Größen

$$5. \begin{cases} c_2 \cos(c_2 c_1) + c_3 \cos(c_3 c_1) + c_4 \cos(c_4 c_1) + \dots + c_n \cos(c_n c_1) \text{ durch } q_{2,n}, \\ c_3 \cos(c_3 c_2) + c_4 \cos(c_4 c_2) + \dots + c_n \cos(c_n c_2) + c_2 \cos(c_2 c_7) \text{ durch } q_{3,n,2}, \\ c_5 \cos(c_5 c_4) + c_6 \cos(c_6 c_4) + c_7 \cos(c_7 c_4) + \dots + c_{11} \cos(c_{11} c_4) \text{ durch } q_{5,11}, \end{cases}$$

u. s. w.





# 373. Grundgleichungen für Seiten u. Winkel. 441

$$10. \quad q_{2,n} = c_2 \cos \gamma - c_3 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \\ + c_4 \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \\ - c_5 \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \\ \pm c_n \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1}) = c_1;$$

desgleichen ist z. B. die Grösse

$$11. \quad z_{2,n}^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + \dots + c_n^2 \\ - 2c_3c_2 \cos(c_3c_2) - 2c_4c_2 \cos(c_4c_2) - 2c_5c_2 \cos(c_5c_2) \dots 2c_n c_2 \cos(c_n c_2) \\ - 2c_4c_3 \cos(c_4c_3) - 2c_5c_3 \cos(c_5c_3) \dots - 2c_n c_3 \cos(c_n c_3) \\ - 2c_5c_4 \cos(c_5c_4) \dots 2c_n c_4 \cos(c_n c_4) \\ \dots \dots \dots$$

folgende:

$$12. \quad z_{2,n}^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + \dots + c_n^2 \\ - 2c_3c_2 \cos \gamma_2 + 2c_4c_3 \cos(\gamma_2 + \gamma_3) \\ - 2c_5c_2 \cos(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \dots \pm 2c_n c_2 \cos(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{n-1}) \\ - 2c_4c_3 \cos \gamma_3 + 2c_5c_3 \cos(\gamma_3 + \gamma_4) \dots \pm 2c_n c_3 \cos(\gamma_3 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{n-1}) \\ - 2c_5c_4 \cos \gamma_4 \dots \pm 2c_n c_4 \cos(\gamma_4 + \gamma_5 + \dots + \gamma_{n-1}) \dots \dots \dots \\ - 2c_n \dots c_{n-1} \cos \gamma_{n-1};$$

und eben so für andere Seiten und Winkel.

Die Regel der Zusammensetzung der Ausdrücke ist leicht sichtbar.

V. Es ist auch

$$13. \quad p_{2,n} = (c_2 - q_{3,n}) \sin \gamma_1 - p_{3,n} \cos \gamma_1.$$

$$14. \quad q_{2,n} = (c_2 - q_{3,n}) \cos \gamma_1 - p_{3,n} \sin \gamma_1.$$

$$15. \quad p_{2,n-1} = c_n \sin \gamma_n.$$

$$16. \quad q_{2,n-1} = c_1 - c_n \cos \gamma_n.$$

$$17. \quad z_{2,n}^2 = z_{3,n}^2 + c_2^2 - 2c_2 q_{3,n}.$$

VI. Man kann auch die Grösse  $z^2$ , statt wie oben durch Quadrate und Producte, durch Quadrate allein ausdrücken.

Es ist z. B.

$$18. \quad z_{2,n}^2 = (c_3 + c_2)^2 \sin^2 \frac{1}{2} (c_3 c_2) + (c_3 - c_2)^2 \cos^2 \frac{1}{2} (c_3 c_2) \\ + (c_4 + c_2)^2 \sin^2 \frac{1}{2} (c_4 c_2) + (c_4 - c_2)^2 \cos^2 \frac{1}{2} (c_4 c_2) \\ + (c_5 + c_2)^2 \sin^2 \frac{1}{2} (c_5 c_2) + (c_5 - c_2)^2 \cos^2 \frac{1}{2} (c_5 c_2) \\ \dots \dots \dots \\ + (c_4 + c_3)^2 \sin^2 \frac{1}{2} (c_4 c_3) + (c_4 - c_3)^2 \cos^2 \frac{1}{2} (c_4 c_3) \\ + (c_5 + c_3)^2 \sin^2 \frac{1}{2} (c_5 c_3) + (c_5 - c_3)^2 \cos^2 \frac{1}{2} (c_5 c_3) \\ \dots \dots \dots \\ + (c_5 + c_4)^2 \sin^2 \frac{1}{2} (c_5 c_4) + (c_5 - c_4)^2 \cos^2 \frac{1}{2} (c_5 c_4) \\ \dots \dots \dots \\ - (n-3)(c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + \dots + c_n^2).$$

Dieser Ausdruck hat aber mehr Glieder als der Ausdruck (11. oder 12.).

Wenn  $C_3 C_4 S_4$  grade ist, so ist der Winkel  $S_4 C_4 Q_4$  gleich dem Winkel  $C_4 C_3 R_3$ , gleich  $(c_4 c_1)$ . Der Winkel  $S_4 C_4 C_3$ , aber ist gleich  $2\rho - \gamma_4$ . Nun ist  $C_3 C_4 Q_4$  oder  $(c_3 c_1)$  gleich  $S_4 C_4 Q_4 - S_4 C_4 C_3$ , weil  $(c_3 c_1)$  negativ ist. Also ist  $(c_3 c_1) = (c_4 c_1) - (2\rho - \gamma_4) = (c_4 c_1) + \gamma_4 - 2\rho$  und folglich, weil vorhin  $(c_4 c_1) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 4\rho$  war,  $(c_3 c_1) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 6\rho$ ; u. s. w.

Dieses sind die Gleichungen (3.). Man findet die Gleichungen für die folgenden Grundlinien durch Weiterrücken der Zeiger.

III. Der Beweis der Gleichungen (8.) läßt sich am besten an einem Beispiel geben. An der Form der Ausdrücke zeigt sich, daß was für den besondern Fall statt findet, auch allgemein gilt.

Man nehme also z. B. die Größen

$p_{2,5} = c_2 \sin(c_2 c_1) + c_3 \sin(c_3 c_1) + c_4 \sin(c_4 c_1) + c_5 \sin(c_5 c_1)$  und  
 $q_{2,5} = c_2 \cos(c_2 c_1) + c_3 \cos(c_3 c_1) + c_4 \cos(c_4 c_1) + c_5 \cos(c_5 c_1)$ ;  
 so ist

$$p_{2,5}^2 = c_2^2 \sin^2(c_2 c_1) + c_3^2 \sin^2(c_3 c_1) + c_4^2 \sin^2(c_4 c_1) + c_5^2 \sin^2(c_5 c_1) \\ + 2c_2 c_3 \sin(c_2 c_1) \sin(c_3 c_1) + 2c_2 c_4 \sin(c_2 c_1) \sin(c_4 c_1) + 2c_2 c_5 \sin(c_2 c_1) \sin(c_5 c_1) \\ + 2c_3 c_4 \sin(c_3 c_1) \sin(c_4 c_1) + 2c_3 c_5 \sin(c_3 c_1) \sin(c_5 c_1) \\ + 2c_4 c_5 \sin(c_4 c_1) \sin(c_5 c_1) \text{ und}$$

$$q_{2,5}^2 = c_2^2 \cos^2(c_2 c_1) + c_3^2 \cos^2(c_3 c_1) + c_4^2 \cos^2(c_4 c_1) + c_5^2 \cos^2(c_5 c_1) \\ + 2c_2 c_3 \cos(c_2 c_1) \cos(c_3 c_1) + 2c_2 c_4 \cos(c_2 c_1) \cos(c_4 c_1) + 2c_2 c_5 \cos(c_2 c_1) \cos(c_5 c_1) \\ + 2c_3 c_4 \cos(c_3 c_1) \cos(c_4 c_1) + 2c_3 c_5 \cos(c_3 c_1) \cos(c_5 c_1) \\ + 2c_4 c_5 \cos(c_4 c_1) \cos(c_5 c_1).$$

Addirt man  $p_{2,5}^2$  und  $q_{2,5}^2$ , so enthält die Summe die Quadrate der nemlichen Linien  $c_2, c_3$  etc. mit den Summen der Quadrate von Sinus und Cosinus der nemlichen Winkel multiplicirt, und die Producte der nemlichen Linien, mit den Summen der Producte der Sinus und der Producte der Cosinus der nemlichen Winkel multiplicirt. Erstere, die Summen der Quadrate von Sinus und Cosinus der nemlichen Winkel sind, wie z. B.  $\sin^2(c_2 c_1) + \cos^2(c_2 c_1) = 1$ ; letztere, die Summen der Producte der Sinus und der Producte der Cosinus der nemlichen Winkel, sind gleich den Cosinus der Differenzen der Winkel, wie z. B.

$$\sin(c_2 c_1) \sin(c_3 c_1) + \cos(c_2 c_1) \cos(c_3 c_1) = \cos(c_3 c_1 - c_2 c_1).$$

Also ist

$$p_{2,5}^2 + q_{2,5}^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 \\ + 2c_2 c_3 \cos(c_3 c_1 - c_2 c_1) + 2c_2 c_4 \cos(c_4 c_1 - c_2 c_1) + 2c_2 c_5 \cos(c_5 c_1 - c_2 c_1) \\ + 2c_3 c_4 \cos(c_4 c_1 - c_3 c_1) + 2c_3 c_5 \cos(c_5 c_1 - c_3 c_1) \\ + 2c_4 c_5 \cos(c_5 c_1 - c_4 c_1)$$

Nun ist aber zu Folge (3, und 3. I.) etc.

$$\begin{aligned}
 (c_3 c_1 - c_2 c_1) &= \gamma_2 - 2\rho &= (c_3 c_2) - 2\rho, \\
 (c_4 c_1 - c_2 c_1) &= \gamma_2 + \gamma_3 - 4\rho &= (c_4 c_2) - 2\rho, \\
 (c_5 c_1 - c_2 c_1) &= \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 6\rho &= (c_5 c_2) - 2\rho, \\
 (c_4 c_1 - c_3 c_1) &= \gamma_3 - 2\rho &= (c_4 c_3) - 2\rho, \\
 (c_5 c_1 - c_3 c_1) &= \gamma_3 + \gamma_4 - 4\rho &= (c_5 c_3) - 2\rho, \\
 (c_5 c_1 - c_4 c_1) &= \gamma_4 - 2\rho &= (c_5 c_4) - 2\rho;
 \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned}
 p_{2,5}^2 + q_{2,5}^2 &= c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 \\
 &- 2c_2 c_3 \cos(c_2 c_3) - 2c_2 c_4 \cos(c_4 c_2) - 2c_2 c_5 \cos(c_5 c_2) \\
 &- 2c_3 c_4 \cos(c_4 c_3) - 2c_3 c_5 \cos(c_5 c_3) \\
 &- 2c_4 c_5 \cos(c_5 c_4).
 \end{aligned}$$

Die Gröfse rechterhand ist eben diejenige, welche in (III. Drittens 6.) durch  $z_{2,5}^2$  bezeichnet wurde.

Also ist

$$p_{2,5}^2 + q_{2,5}^2 = z_{2,5}^2.$$

Aehnliche Ausdrücke finden für eine beliebige Zahl auf einander folgender Winkel statt; welches die Gleichungen (8.) giebt.

IV. Die Gleichungen (9. 10. und 12.) findet man, wenn man die Ausdrücke von  $(c_2 c_1)$ ,  $(c_3 c_1) \dots (c_5 c_1)$ ;  $(c_1 c_3)$ ,  $(c_5 c_2) \dots (c_4 c_2)$  etc. aus (3.) in (1. 2. und 11.) setzt.

Es ist zu Folge (3.)

$$\begin{array}{ll}
 \cos(c_2 c_1) = + \cos \gamma_1, & \sin(c_2 c_1) = + \sin \gamma_1, \\
 \cos(c_3 c_1) = - \cos(\gamma_1 + \gamma_2), & \sin(c_3 c_1) = - \sin(\gamma_1 + \gamma_2), \\
 \cos(c_4 c_1) = + \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), & \sin(c_4 c_1) = + \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \\
 \cos(c_5 c_1) = - \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4), & \sin(c_5 c_1) = - \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4), \\
 \dots & \dots \\
 \cos(c_3 c_2) = + \cos \gamma_2, & \sin(c_3 c_2) = + \sin \gamma_2, \\
 \cos(c_4 c_2) = - \cos(\gamma_2 + \gamma_3), & \sin(c_4 c_2) = - \sin(\gamma_2 + \gamma_3), \\
 \cos(c_5 c_2) = + \cos(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4), & \sin(c_5 c_2) = + \sin(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4), \\
 \cos(c_6 c_2) = - \cos(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5), & \sin(c_6 c_2) = - \sin(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5), \\
 \dots & \dots \\
 \cos(c_4 c_3) = + \cos \gamma_3, & \sin(c_4 c_3) = + \sin \gamma_3, \\
 \cos(c_5 c_3) = - \cos(\gamma_3 + \gamma_4), & \sin(c_5 c_3) = - \sin(\gamma_3 + \gamma_4), \\
 \cos(c_6 c_3) = + \cos(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5), & \sin(c_6 c_3) = + \sin(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5), \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

u. s. w. Die Zeichen wechseln stets ab.

Setzt man diese Ausdrücke in (1. 2. u. 11.), so findet man die Ausdrücke (9. 10. u. 12.).

V.  $\alpha$ ) Es ist z. B.

$$p_{2,n} = c_2 \sin \gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \dots \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \dots \dots + \gamma_{n-1}) \quad (9)$$

Da nun

$$\begin{aligned} \sin(\gamma_1 + \gamma_2) &= \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 + \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \\ \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) &= \sin \gamma_1 \cos(\gamma_2 + \gamma_3) + \cos \gamma_1 \sin(\gamma_2 + \gamma_3) \\ \text{u. s. w., so ist} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{2,n} &= c_2 \sin \gamma_1 - c_4 (\sin \gamma_1 \cos \gamma_2 + \cos \gamma_1 \sin \gamma_2) \\ &\quad + c_4 (\sin \gamma_1 \cos(\gamma_2 + \gamma_3) + \cos \gamma_1 \sin(\gamma_2 + \gamma_3)) \\ &\quad - c_6 (\sin \gamma_1 \cos(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) + \cos \gamma_1 \sin(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad \pm c_n (\sin \gamma_1 \cos(\gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-1}) + \cos \gamma_1 \sin(\gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-1})) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} p_{2,n} &= [c_2 - c_3 \cos \gamma_2 - c_4 \cos(\gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \pm c_n \cos(\gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-1})] \sin \gamma_1 \\ &\quad - [c_3 \sin \gamma_2 - c_4 \sin(\gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \mp c_n \sin(\gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-1})] \cos \gamma_1 \end{aligned}$$

und folglich, weil

$$\begin{aligned} c_3 \cos \gamma_2 - c_4 \cos(\gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \mp c_n \cos(\gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-1}) &= q_{3,n} \text{ und} \\ c_3 \sin \gamma_2 - c_4 \sin(\gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \mp c_n \sin(\gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-1}) &= p_{3,n} \end{aligned}$$

ist (10. und 9.),

$$p_{2,n} = (c_2 - q_{3,n}) \sin \gamma_1 - p_{3,n} \cos \gamma_1;$$

welches die Gleichung (13.) ist.

$\beta$ ) Auf ähnliche Art findet man, weil

$$q_{2,n} = c_2 \cos \gamma_1 - c_3 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \dots \pm c_n \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \dots \dots + \gamma_{n-1})$$

und

$$\begin{aligned} \cos(\gamma_1 + \gamma_2) &= \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \\ \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) &= \cos \gamma_1 \cos(\gamma_2 + \gamma_3) - \sin \gamma_1 \sin(\gamma_2 + \gamma_3) \\ \text{u. s. w. ist,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{2,n} &= [c_2 - c_3 \cos \gamma_2 + c_4 \cos(\gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \pm c_n \cos(\gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-1})] \cos \gamma_1 \\ &\quad \mp [c_3 \sin \gamma_2 - c_4 \sin(\gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \mp c_n \sin(\gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-1})] \sin \gamma_1 \end{aligned}$$

also

$$q_{2,n} = (c_2 - q_{3,n}) \cos \gamma_1 + p_{3,n} \sin \gamma_1;$$

welches die Gleichung (14.) ist.

$\gamma$ ) Ferner ist z. B. zu Folge (9 und 10.)

$$c_2 \sin \gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \dots \dots \mp c_{n-1} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-2}) = \mp c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-1})$$

$$c_2 \cos \gamma_1 - c_3 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \dots \dots \mp c_{n-1} \cos(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-2}) = c_1 \mp c_n \cos(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-1})$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn  $n$  grade und die unteren wenn  $n$  ungrade ist; denn z. B. die Glieder mit  $c_2, c_4, c_6$  etc. in (9. und 10.) sind positiv, die Glieder mit  $c_3, c_5$  aber negativ. Nun sind in diesen Gleichungen die Größen linkerhand nichts anders als  $p_{2,n-1}$  und  $q_{2,n-1}$ ; also ist

$$\begin{aligned} p_{2,n-1} &= \mp c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-1}) \text{ und} \\ q_{2,n-1} &= c_1 \mp c_n \cos(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-1}). \end{aligned}$$

Die Summe sämtlicher Winkel

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1} + \gamma_n$$

aber ist gleich  $2(n-2)\rho$ ; also ist

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1} = 2(n-2)\rho - \gamma_n;$$

folglich ist

$$\sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1}) = \sin(2n\rho - 4\rho - \gamma_n) = \sin(2n\rho - \gamma_n)$$

$$\cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1}) = \cos(2n\rho - 4\rho - \gamma_n) = \sin(2n\rho - \gamma_n)$$

und folglich

$$p_{2,n-1} = \mp c_n \sin(2n\rho - \gamma_n)$$

$$q_{2,n-1} = c_1 \mp c_n \cos(2n\rho - \gamma_n),$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn  $n$  grade und die unteren von  $n$  ungrade ist.

Es sey für ein grades  $n$ ,  $n = 2m$ , wo  $m$  eine beliebige ganze Zahl seyn kann, so ist

$$\sin(2n\rho - \gamma_n) = \sin(4m\rho - \gamma_n) = -\sin \gamma_n,$$

$$\cos(2n\rho - \gamma_n) = \cos(4m\rho - \gamma_n) = +\cos \gamma_n;$$

also ist für ein grades  $n$ , für welches die obern Zeichen gelten,

$$p_{2,n-1} = c_n \sin \gamma_n \text{ und}$$

$$q_{2,n-1} = c_1 - c_n \cos \gamma_n.$$

Es sey für ein ungrades  $n$ ,  $n = 2m + 1$ , wo  $m$  eine beliebige ganze Zahl seyn kann, so ist

$$\sin(2n\rho - \gamma_n) = \sin(4m\rho + 2\rho - \gamma_n) = +\sin \gamma_n,$$

$$\cos(2n\rho - \gamma_n) = \sin(4m\rho + 2\rho - \gamma_n) = -\cos \gamma_n;$$

also ist für ein ungrades  $n$ , für welches die unteren Zeichen gelten,

$$p_{2,n-1} = c_n \sin \gamma_n \text{ und}$$

$$q_{2,n-1} = c_1 - c_n \cos \gamma_n.$$

Es ist also immer, für jedes beliebige  $n$ ,

$$p_{2,n-1} = c_n \sin \gamma_n \text{ und}$$

$$q_{2,n-1} = c_1 - c_n \cos \gamma_n;$$

welches die Gleichungen (15 und 16.) sind.

δ. Man schreibe den Ausdruck (12.) wie folgt:

$$z_{2,n}^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + \dots + c_n^2$$

$$- 2c_4c_3\cos\gamma_3 + 2c_5c_3\cos(\gamma_3 + \gamma_4) + \dots + 2c_nc_4\cos(\gamma_3 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{n-1})$$

$$- 2c_6c_4\cos\gamma_4 + 2c_6c_4\cos(\gamma_4 + \gamma_5) + \dots + 2c_nc_6\cos(\gamma_4 + \gamma_5 + \dots + \gamma_{n-1})$$

$$\dots$$

$$- 2c_nc_{n-1}\cos c_n$$

$$+ c_2^2$$

$$- 2c_2(c_3\cos\gamma_1 - c_4\cos(\gamma_1 + \gamma_2) + \dots + c_n\cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1})),$$

so ist leicht zu sehen, daß vermöge (12. und 10.)

$$z_{2,n}^2 = z_{3,n}^2 + c_2^2 - 2c_2q_{3,n};$$

welches die Gleichung (17.) ist.

VI. Die erste Reihe rechterhand in dem Ausdruck (18.) ist so viel als

$$(c_1^2 + 2c_1 c_2 + c_2^2) \sin^2 \frac{1}{2}(c_1 c_2)^2 + (c_1^2 - 2c_1 c_2 + c_2^2) \cos^2 \frac{1}{2}(c_1 c_2)^2,$$

oder  $(c_1^2 + c_2^2) (\sin^2 \frac{1}{2}(c_1 c_2)^2 + \cos^2 \frac{1}{2}(c_1 c_2)^2) - 2c_1 c_2 (\cos^2 \frac{1}{2}(c_1 c_2)^2 - \sin^2 \frac{1}{2}(c_1 c_2)^2),$

oder weil

$$\cos^2 \frac{1}{2}(c_1 c_2)^2 + \sin^2 \frac{1}{2}(c_1 c_2)^2 = 1 \text{ und}$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}(c_1 c_2)^2 - \sin^2 \frac{1}{2}(c_1 c_2)^2 = \cos(c_1 c_2),$$

so viel als

$$c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 c_2 \cos(c_1 c_2);$$

die zweite Reihe ist ....  $c_4^2 + c_2^2 - 2c_4 c_2 \cos(c_4 c_2),$

die dritte Reihe ist ....  $c_5^2 + c_2^2 - 2c_5 c_2 \cos(c_5 c_2)$

u. s. w. Es sind, wenn man die letzte Reihe ausnimmt, so viel Reihen vorhanden als es Verbindungen der  $n-1$  Größen  $c_2, c_3, c_4, \dots, c_n$  zu zweien giebt, folglich  $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$  Reihen. Jede Reihe enthält die Quadrate

zweier Größen, also sind  $(n-1) \cdot (n-2)$  Quadrate der  $n-1$  Größen vorhanden und folglich, weil offenbar jede Grösse gleich oft vorkommt,  $n-2$  mal die Summe der Quadrate der Größen  $c_2, c_3, c_4, \dots, c_n$ . Zieht man also noch das letzte Glied, welches  $n-3$  mal die nemliche Summe ist, ab, so bleibt, ausser den Producten, blos die einfache Summe der Quadrate der Größen  $c_2, c_3, c_4, \dots, c_n$  übrig und es ist folglich in (18.)

$$z_{2,n} = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + \dots + c_n^2 - 2c_3 c_2 \cos(c_3 c_2) - 2c_4 c_2 \cos(c_4 c_2) - \dots - 2c_n c_2 \cos(c_n c_2) - 2c_4 c_3 \cos(c_4 c_3) - \dots - 2c_n c_3 \cos(c_n c_3);$$

welches mit (11.) übereinstimmt und folglich die Gleichung (18.) beweiset.

374.

**Lehrsatz.** Die drei auflösenden Gleichungen für eine beliebige nseitige Figur sind:

Erste auflösende Gleichung ohne zwei neben einander liegende Winkel, z. B. ohne  $\gamma_1$  und  $\gamma_n$ :

$$1. \quad c_1^2 = z_{2,n},$$

das heisst:

$$2. \quad c_1^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + \dots + c_n^2 - 2c_3 c_2 \cos(c_3 c_2) - 2c_4 c_2 \cos(c_4 c_2) - \dots - 2c_n c_2 \cos(c_n c_2) - 2c_4 c_3 \cos(c_4 c_3) - 2c_5 c_3 \cos(c_5 c_3) - \dots - 2c_n c_3 \cos(c_n c_3) - 2c_5 c_4 \cos(c_5 c_4) - \dots - 2c_n c_4 \cos(c_n c_4) - \dots - 2c_n c_{n-1} \cos(c_n c_{n-1}),$$

oder

**oder**

$$\begin{aligned}
 5. c_1^2 &= c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \dots + c_n^2 \\
 &- 2c_3c_2\cos\gamma_2 + 2c_4c_2\cos(\gamma_2+\gamma_3)\dots \pm 2c_nc_2\cos(\gamma_2+\gamma_3\dots+\gamma_{n-1}) \\
 &- 2c_4c_3\cos\gamma_3 + 2c_5c_3\cos(\gamma_3+\gamma_4)\dots \mp 2c_nc_3\cos(\gamma_3+\gamma_4\dots+\gamma_{n-1}) \\
 &- 2c_5c_4\cos\gamma_4 + 2c_6c_4\cos(\gamma_4+\gamma_5)\dots \pm 2c_nc_4\cos(\gamma_4+\gamma_5\dots+\gamma_{n-1}) \\
 &\vdots \\
 &- 2c_nc_{n-1}\cos\gamma_{n-1},
 \end{aligned}$$

welche Gleichung, wie man sieht, die beiden Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_n$  nicht enthält.

**Zweite auflösende Gleichung, ohne zwei  
getrennte Winkel, z. B. ohne  $\gamma_k$  und  $\gamma_m$ ,**

$$4. \quad \mathbb{Z}_{k+1, m}^2 = \mathbb{Z}_{m+1, k}^2,$$

**das heißt:**

$$\begin{aligned}
5. & c_{k+1}^2 + c_{k+2}^2 + c_{k+3}^2 \dots + c_m^2 \\
& - 2c_{k+2}c_{k+1}\cos(c_{k+2}c_{k+1}) - 2c_{k+3}c_{k+1}\cos(c_{k+3}c_{k+1}) \dots - 2c_m c_{k+1}\cos(c_m c_{k+1}) \\
& - 2c_{k+3}c_{k+2}\cos(c_{k+3}c_{k+2}) - 2c_{k+4}c_{k+2}\cos(c_{k+4}c_{k+2}) \dots - 2c_m c_{k+2}\cos(c_m c_{k+2}) \\
& - 2c_{k+4}c_{k+3}\cos(c_{k+4}c_{k+3}) \dots - 2c_m c_{k+3}\cos(c_m c_{k+3}) \\
& \dots \dots \dots \\
& - 2c_m c_{m-1}\cos(c_m c_{m-1}) \\
& = c_{m+1}^2 + c_{m+2}^2 + c_{m+3}^2 \dots + c_k^2 \\
& - 2c_{m+2}c_{m+1}\cos(c_{m+2}c_{m+1}) - 2c_{m+3}c_{m+1}\cos(c_{m+3}c_{m+1}) \dots \dots \dots \\
& \dots \dots \dots - 2c_k c_{m+1}\cos(c_k c_{m+1}) \\
& - 2c_{m+3}c_{m+2}\cos(c_{m+3}c_{m+2}) \dots - 2c_k c_{m+2}\cos(c_k c_{m+2}) \\
& - 2c_{m+4}c_{m+3}\cos(c_{m+4}c_{m+3}) \dots - 2c_k c_{m+3}\cos(c_k c_{m+3}) \\
& \dots \dots \dots \\
& - 2c_k c_{k-1}\cos c_{k-1}
\end{aligned}$$

**oder**

$$\begin{aligned}
6. \quad & c_{k+1}^2 + c_{k+2}^2 + c_{k+3}^2 \dots + c_m^2 \\
& - 2 c_{k+2} c_{k+1} \cos \gamma_{k+1} + 2 c_{k+3} c_{k+1} \cos (\gamma_{k+1} + \gamma_{k+2}) \dots \\
& \dots + 2 c_m c_{k+1} \cos (\gamma_{k+1} + \gamma_{k+2} \dots + \gamma_{m-1}) \\
& - 2 c_{k+3} c_{k+2} \cos \gamma_{k+2} + 2 c_{k+4} c_{k+2} \cos (\gamma_{k+2} + \gamma_{k+3}) \dots \\
& \dots + 2 c_m c_{k+2} \cos (\gamma_{k+2} + \gamma_{k+3} \dots + \gamma_{m-1}) \\
& \dots \\
& - 2 c_m c_{m-1} \cos \gamma_{m-1} \\
& = c_{m+1}^2 + c_{m+2}^2 + c_{m+3}^2 \dots + c_k^2 \\
& - 2 c_{m+2} c_{m+1} \cos \gamma_{m+1} + 2 c_{m+3} c_{m+1} \cos (\gamma_{m+1} + \gamma_{m+2}) \dots \\
& \dots + 2 c_k c_{m+1} \cos (\gamma_m + \gamma_{m+1} \dots + \gamma_{k-1}) \\
& - 2 c_{m+3} c_{m+2} \cos \gamma_{m+2} \dots + 2 c_k c_{m+2} \cos (\gamma_{m+2} + \gamma_{m+3} \dots \gamma_{k-1}) \\
& \dots \\
& - 2 c_k c_{k-1} \cos \gamma_{k-1},
\end{aligned}$$

welche Gleichung, wie man sieht, die beiden Winkel  $\gamma_k$  und  $\gamma_m$  nicht enthält.



Dritte auflösende Gleichung, ohne eine von den  $n$  Seiten, z. B. ohne die Seite  $c_x$ .

$$7. p_{2,n} = 0, \text{ oder}$$

$$8. (c_2 - q_{2,n}) \sin \gamma_1 = p_{2,n} \cos \gamma_1, \text{ oder}$$

$$9. c_2 \sin(c_2 c_1) + c_3 \sin(c_3 c_1) + c_4 \sin(c_4 c_1) \dots + c_n \sin(c_n c_1) = 0, \text{ oder}$$

$$10. c_2 \sin \gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \dots \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-1}) = 0;$$

welche Gleichung, wie man sieht, die Seite  $c_x$  und zugleich den Winkel  $\gamma_n$  nicht enthält.

Beweis. I. Es ist

$$p_{2,n} = 0 \text{ und } q_{2,n} = c_x \text{ (§. 373. 7.),}$$

also

$$p_{2,n}^2 + q_{2,n}^2 = 0 + c_x^2 = c_x^2. \text{ Aber } p_{2,n}^2 + q_{2,n}^2 = z_{2,n}^2 \text{ (§. 373. 8.),}$$

folglich

$$z_{2,n}^2 = c_x^2;$$

welches die Gleichung (1.) im Lehrsatz ist. Setzt man darin die Ausdrücke von  $z_{2,n}^2$  (§. 373. 11. u. 12.), so erhält man die Gleichungen (2. und 3.).

II. Es sey (Fig. 174. I.)  $\gamma$ , der Winkel  $\gamma_k$  und  $\gamma_6$  der Winkel  $\gamma_m$ , so ist der Ausdruck des Quadrats der Seite  $C_3 C_6$  in der Figur  $C_3 C_4 C_5 C_6$ , zu Folge der ersten auflösenden Gleichung,

$$(C_3 C_6)^2 = z_{4,6}^2 = z_{k+1,m}^2.$$

Der Ausdruck des Quadrats der nämlichen Seite  $C_1 C_6$  in der Figur  $C_6 C_7 C_4 C_1 C_2 C_3$ , ist zu Folge der ersten auflösenden Gleichung

$$(C_1 C_6)^2 = z_{7,n,2}^2 = z_{m+1,k}^2.$$

Also ist

$$z_{k+1,m}^2 = z_{m+1,k}^2,$$

welches die Gleichung (4.) im Lehrsatz ist. Setzt man darin die Ausdrücke von  $z_{k+1,m}^2$  und  $z_{m+1,k}^2$  (§. 373. 11. 12.), so erhält man die Gleichungen (5. und 6.).

III. Die dritte auflösende Gleichung (7. oder 9.) ist die erste Grundgleichung (§. 373. 1.), mit der Bezeichnung (4.), unverändert. Setzt man die Ausdrücke der Winkel  $(c_2 c_1)$ ,  $(c_3 c_1)$ ,  $(c_4 c_1)$  etc. aus (§. 373. 3.), so erhält man, weil

$$\sin(\gamma_1 + \gamma_2 - 2\varphi) = -\sin(2\varphi - (\gamma_1 + \gamma_2)) = -\sin(\gamma_1 + \gamma_2),$$

$$\sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 4\varphi) = -\sin(4\varphi - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)) = \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$$

u. s. w. ist, die Gleichung (10.) im Lehrsatz.

Die Gleichung (8.) folgt aus (§. 373. 13.).

375.

**Erläuterung.** Vermittelt der drei auflösenden Gleichungen lassen sich nun alle Aufgaben: aus gegebenen bestimmenden Seiten und Winkeln eines Vielecks die fehlenden Seiten und Winkel zu finden, auflösen. Diese Aufgaben sind folgende:

Gegeben.	Gesucht.	Das gesuchte Stück wird gefunden durch die auflösende Gleichung:
<i>Alle Seiten und Winkel bis auf</i>		
I. Drei an einander liegende Winkel,	1) ein fehlender äußerer Winkel . . . . .	1 (§.374.)
	2) der fehlende mittlere Winkel . . . . .	2 —
II. Zwei an einander liegende und ein getrennter Winkel,	3) der getrennte Winkel	1 —
	4) einer der aneinander liegenden Winkel . .	2 —
III. Drei getrennte Winkel,	5) einer dieser Winkel	2 —
IV. Zwei an einander liegende Winkel und eine Seite dazwischen,	6) die fehlende Seite .	1 —
	7) einer der beiden fehlenden Winkel . . . .	3 —
V. Zwei an einander liegende Winkel und eine Seite an dem einen Winkel,	8) die fehlende Seite .	1 —
	9) der fehlende Winkel an der fehlenden Seite.	3 —
	10) der andere fehlende Winkel . . . . .	3 —
VI. Zwei an einander liegende Winkel und eine davon getrennte Seite,	11) einer der fehlenden Winkel . . . . .	3 —
	12) die fehlende Seite.	1 —
VII. Zwei getrennte Winkel und eine Seite an dem einen fehlenden Winkel,	13) die fehlende Seite.	2 —
	14) der Winkel an der fehlenden Seite . . . .	3 —
	15) der getrennte fehlende Winkel . . . . .	3 —
VIII. Zwei getrennte Winkel und eine abge sonderte Seite,	16) der eine fehlende Winkel . . . . .	3 —
	17) die fehlende Seite.	2 —
IX. Zwei Seiten an einander,	18) die eine fehlende Seite . . . . .	3 —
X. Zwei getrennte Seiten,	19) die eine fehlende Seite . . . . .	3 —

Mehr Fälle giebt es nicht. Die Auflösung, und zwar in der Ordnung wie die Aufgaben auf einander sich beziehen, ist folgende.

376.

**Aufgabe 1.** (§. 375. 6.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und die Winkel bis auf die Seite  $c_1$  und bis auf die beiden daran liegenden Winkel  $\gamma_n$  und  $\gamma_1$  gegeben. Man sucht die fehlende Seite  $c_1$ .

**Auflösung.** Die erste auflösende Gleichung (§. 374.) giebt diese Seite  $c_1$  unmittelbar, nemlich

$$1. \quad c_1^2 = z_{2,n}^2, \text{ wo}$$

$$z_{2,n}^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + \dots + c_n^2$$

$$- c_2 c_3 \cos \gamma_2 + 2c_4 c_2 \cos(\gamma_2 + \gamma_3) \dots + 2c_n c_2 \cos(\gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1})$$

$$- 2c_4 c_3 \cos \gamma_3 + 2c_5 c_3 \cos(\gamma_3 + \gamma_4) \dots + 2c_n c_3 \cos(\gamma_3 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{n-1})$$

$$\dots \dots \dots$$

$$- 2c_n c_{n-1} \cos \gamma_{n-1}$$

ist; denn  $z_{2,n}^2$  enthält, wie man sieht, die unbekannten Winkel  $\gamma_n$  und  $\gamma_1$  nicht, sondern ist aus lauter gegebenen Größen zusammengesetzt.

Dieser Ausdruck einer Seite eines Vielecks durch die übrigen Seiten und die von denselben eingeschlossenen Winkel ist dem Ausdruck einer Seite eines Dreiecks durch die andern beiden Seiten und den Winkel den sie einschließen ähnlich. Gesetzt z. B. die Figur (174. I.) habe statt mehrerer nur die 3 Seiten  $c_1, c_2$  und  $C_2 C_n$ , so daß also  $C_2 C_n$  etwa gleich  $c_3$  und der Winkel  $C_1 C_2 C_n$  gleich  $\gamma_2$  wäre, so ist nach (§. 360. V.), in dem Dreieck  $C_1 C_2 C_n$ ,

$$c_1^2 = c_2^2 + c_3^2 - 2c_2 c_3 \cos \gamma_2;$$

das heist:  $c_1^2$  ist gleich der Summe der Quadrate der andern beiden Seiten  $c_2$  und  $c_3$ , weniger dem doppelten Producte derselben und in den Cosinus des Winkels den sie einschließen. Ganz so verhält es sich nach (Gl. 2.) beim Vieleck. Das Quadrat der Seite  $c_1$ , nemlich  $z_{2,n}^2$ , ist gleich der Summe der Quadrate der übrigen Seiten, weniger den doppelten Producten dieser Seiten zu zweien und in die Cosinus der Winkel die sie einschließen, wie insbesondere aus (§. 373. 11.) zu sehen. Diese Regel der Zusammensetzung des Ausdrucks ist leicht im Gedächtnis zu behalten.

**Aufgabe 2.** (§. 375. 7.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und die Winkel bis auf die Seite  $c_1$  und bis auf die beiden daran liegenden Winkel  $\gamma_n$  und  $\gamma_1$  gegeben. Man sucht einen der fehlenden Winkel, z. B.  $\gamma_1$ .

*Auflösung.* Die dritte auflösende Gleichung (§. 374. 8.) giebt diesen Winkel unmittelbar, nemlich:

$$3. \quad \tan \gamma_1 = \frac{P_{3,n}}{c_2 - q_{3,n}},$$

wo

$$4. \quad \begin{cases} P_{3,n} = c_1 \sin \gamma_1 - c_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) - \dots \\ \dots \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1}), \\ q_{3,n} = c_1 \cos \gamma_1 - c_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + c_3 \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) - \dots \\ \dots \pm c_n \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1}), \end{cases}$$

also ganz aus bekannten Größen zusammengesetzt sind.

Dieser Ausdruck ist wieder von eben der Gestalt wie im ähnlichen Falle beim Dreiecke: denn gesetzt die Figur habe wieder bloß die drei Seiten  $c_1, c_2$  und  $C_2 C_n$  und die Seite  $C_2 C_n$  sey  $c_3$ , der Winkel  $C_1 C_2 C_n$  gleich  $\gamma_1$ ; so ist nach (§. 360. IV.),

$$\tan \gamma_1 = \frac{c_2 \sin \gamma_1}{c_2 - c_3 \cos \gamma_1},$$

das heißt: man findet die Tangente eines beliebigen Winkels (z. B.  $\gamma_1$ ) eines Dreiecks, wenn man von einer der dem Winkel anliegenden beiden Seiten (z. B.  $c_2$ ) das Product der folgenden Seite ( $c_3$ ) in den Cosinus des Winkels ( $\gamma_1$ ) zwischen ihr und der vorigen abzieht und mit dem Rest in das Product der zweiten Seite ( $c_3$ ) und des Sinus des nemlichen Winkels dividirt. Ganz ähnlich verhält es sich nach (Gl. 3.) beim Vieleck. Man findet die Tangente eines seiner Winkel, wenn man von einer der Seiten, die an dem Winkel liegen, die Summe der Producte der folgenden Seiten in die Cosinus der Winkel zwischen ihnen und der ersten anliegenden Seite abzieht und mit dem Rest die Summe der Producte der nemlichen folgenden Seiten in die Sinus der nemlichen Winkel dividirt. So ist die Regel der Zusammensetzung des Ausdrucks ebenfalls leicht im Gedächtnisse zu behalten.

Den andern fehlenden Winkel  $\gamma_n$  findet man, wenn man die Summe von  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{n-1}$  von der Summe der sämtlichen Winkel der Figur, welche  $(n-2)2\rho$  ist, abzieht, also

$$5. \quad \gamma_n = 2(n-2)\rho = \gamma_2.$$

Wollte man  $\gamma_n$  unmittelbar berechnen, so müßte man in (3. und 4.)

$$6. \quad \begin{cases} c_n \text{ statt } c_2 \text{ und } \gamma_n \text{ statt } \gamma_1, \\ c_{n-1} \dots c_3 & \gamma_{n-1} \dots \gamma_2, \\ c_{n-2} \dots c_4 & \gamma_{n-2} \dots \gamma_1, \\ \dots & \dots \\ c_2 \dots c_n & \gamma_1 \dots \gamma_n \end{cases}$$

setzen. Man könnte sich auch für diesen Fall, um anzuzeigen, daß die Seiten und die Winkel zurückgerechnet werden sollen, folgender Bezeichnung bedienen:

$$7. \begin{cases} n-1,2p = c_{n-1} \sin \gamma_{n-1} - c_{n-2} \sin (\gamma_{n-1} + \gamma_{n-2}) \dots \\ \dots \pm c_2 \sin (\gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} \dots \gamma_1) \\ n-1,2q = c_{n-1} \cos \gamma_{n-1} - c_{n-2} \cos (\gamma_{n-1} + \gamma_{n-2}) \dots \\ \dots \pm c_2 \cos (\gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} \dots \gamma_1) \\ \text{tang } \gamma_n = \frac{n-1,2p}{c_n - n-1,2q} \end{cases}$$

**Aufgabe 5.** (§. 375. 1.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und die Winkel, bis auf die drei Winkel  $\gamma_n$ ,  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , gegeben. Man sucht einen der äußern fehlenden Winkel, z. B.  $\gamma_2$ .

**Auflösung.**  $\alpha$ ) Die erste auflösende Gleichung  $c_1^2 = z_{1,n}^2$  enthält, wie aus (§. 374. 3.) zu sehen, nicht die Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_n$ , wohl aber den Winkel  $\gamma_2$ . Man muß also aus derselben diesen Winkel  $\gamma_2$  vermittelt der übrigen Stücke, die sämtlich gegeben sind, finden können. Die Gleichung läßt sich, weil

$$z_{2,n}^2 = z_{3,n}^2 + c_2^2 - 2 c_2 q_{3,n}$$

ist (§. 373. 17.), wie folgt schreiben:

$$c_1^2 = z_{3,n}^2 + c_2^2 - 2 c_2 q_{3,n}$$

Nun ist zu Folge (§. 373. 14.)

$$q_{3,n} = (c_3 - q_{4,n}) \cos \gamma_2 + p_{4,n} \sin \gamma_2.$$

Also ist

$$c_1^2 = c_2^2 + z_{3,n}^2 - 2 c_2 (c_3 - q_{4,n}) \cos \gamma_2 - 2 c_2 p_{4,n} \sin \gamma_2 \text{ oder}$$

$$p_{4,n} \sin \gamma_2 = \frac{z_{3,n}^2 + c_2^2 - c_1^2}{2 c_2} - (c_3 - q_{4,n}) \cos \gamma_2.$$

Man setze der Kürze wegen

$$8. \quad p_{4,n} = x, \quad c_3 - q_{4,n} = \lambda \text{ und } \frac{z_{3,n}^2 + c_2^2 - c_1^2}{2 c_2} = \mu,$$

so daß

$$9. \quad x \sin \gamma_2 = \mu - \lambda \cos \gamma_2,$$

so erhält man, wenn man quadriert,

$$x^2 \sin^2 \gamma_2 = \mu^2 - 2 \mu \lambda \cos \gamma_2 + \lambda^2 \cos^2 \gamma_2 = x^2 (1 - \cos^2 \gamma_2), \text{ also}$$

$$(x^2 + \lambda^2) \cos^2 \gamma_2 - 2 \mu \lambda \cos \gamma_2 + \mu^2 - x^2 = 0,$$

$$\text{oder } \cos^2 \gamma_2 - \frac{2 \mu \lambda}{x^2 + \lambda^2} \cos \gamma_2 + \frac{\mu^2 - x^2}{x^2 + \lambda^2} = 0, \text{ woraus}$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{\mu \lambda}{x^2 + \lambda^2} \pm \sqrt{\left( \frac{\mu^2 \lambda^2}{(x^2 + \lambda^2)^2} - \frac{\mu^2 - x^2}{x^2 + \lambda^2} \right)}, \text{ oder}$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{\mu \lambda \pm \sqrt{(\mu^2 \lambda^2 - x^2 \mu^2 + x^4 - \mu^2 \lambda^2 + x^2 \lambda^2)}}{x^2 + \lambda^2}, \text{ oder}$$

$$10. \quad \cos \gamma_2 = \frac{\mu \lambda \pm x \sqrt{(x^2 + \lambda^2 - \mu^2)}}{x^2 + \lambda^2}$$

folgt.

Zu Folge (8.) ist  $x^2 + \lambda^2 = p_{4,n}^2 + c_3^2 - 2c_3 q_{4,n} + q_{4,n}^2$ ,  
 oder, weil  $p_{4,n}^2 + q_{4,n}^2 = z_{4,n}^2$  (§. 373. 8.),  
 $x^2 + \lambda^2 = z_{4,n}^2 + c_3^2 - 2c_3 q_{4,n}$ ,  
 oder, weil zu Folge (§. 373. 17.)  $z_{4,n}^2 + c_3^2 - 2c_3 q_{4,n} = z_{3,n}^2$  ist,

$$11. \quad x^2 + \lambda^2 = z_{3,n}^2$$

Ferner ist nach (8. und 11.)

$$x^2 + \lambda^2 - \mu^2 = z_{3,n}^2 - \left( \frac{z_{3,n}^2 + c_2^2 - c_1^2}{2c_2} \right)^2, \text{ oder}$$

$$4c_2^2(x^2 + \lambda^2 - \mu^2) = 4c_2^2 z_{3,n}^2 - (z_{3,n}^2 + c_2^2 - c_1^2)^2, \text{ oder}$$

$$4c_2^2(x^2 + \lambda^2 - \mu^2) = (2c_2 z_{3,n} + z_{3,n}^2 + c_2^2 - c_1^2)(2c_2 z_{3,n} - z_{3,n}^2 - c_2^2 + c_1^2),$$

$$4c_2^2(x^2 + \lambda^2 - \mu^2) = ((z_{3,n} + c_2)^2 - c_1^2)(c_1^2 - (z_{3,n} - c_2)^2), \text{ oder}$$

$$12. \quad x^2 + \lambda^2 - \mu^2$$

$$= \frac{(z_{3,n} + c_2 - c_1)(z_{3,n} + c_2 + c_1)(c_1 + z_{3,n} - c_2)(c_1 - z_{3,n} + c_2)}{4c_2^2}$$

Setzt man die Ausdrücke von  $x$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  aus (8.),  $x^2 + \lambda^2$  aus (11.) und von  $x^2 + \lambda^2 - \mu^2$  aus (12.) in (10.), so findet man

$$13. \quad \cos \gamma_2$$

$$= \frac{\left\{ \begin{aligned} &(z_{3,n}^2 + c_2^2 - c_1^2)(c_3 - q_{4,n}) \\ &\pm p_{4,n} \sqrt{[(z_{3,n} + c_2 + c_1)(z_{3,n} + c_2 - c_1)(z_{3,n} - c_2 + c_1)(c_2 + c_1 - z_{3,n})]} \end{aligned} \right\}}{2c_2 z_{3,n}^2}$$

wo

$$14. \quad p_{4,n} = c_4 \sin \gamma_3 - c_5 \sin(\gamma_3 + \gamma_4) + c_6 \sin(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5) \dots$$

$$\dots \pm c_n \sin(\gamma_3 + \gamma_4 \dots + \gamma_{n-1}).$$

$$15. \quad q_{4,n} = c_4 \cos \gamma_3 - c_5 \cos(\gamma_3 + \gamma_4) + c_6 \cos(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5) \dots$$

$$\dots \pm c_n \cos(\gamma_3 + \gamma_4 \dots + \gamma_{n-1}).$$

$$16. \quad z_{3,n}^2 = c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 \dots + c_n^2$$

$$- 2c_4 c_3 \cos \gamma_3 + 2c_5 c_3 \cos(\gamma_3 + \gamma_4) \dots$$

$$\dots \pm 2c_n c_3 \cos(\gamma_3 + \gamma_4 \dots + \gamma_{n-1})$$

$$- 2c_5 c_4 \cos \gamma_4 + 2c_6 c_4 \cos(\gamma_4 + \gamma_5) \dots$$

$$\dots + 2c_n c_4 \cos(\gamma_4 + \gamma_5 \dots + \gamma_{n-1})$$

$$\dots$$

$$- 2c_n c_{n-1} \cos \gamma_{n-1}.$$

Es ist also rechterhand Alles gegeben, und der Ausdruck (13.) giebt folglich den gesuchten Winkel  $\gamma_2$ .

$\beta$ ) Der Ausdruck (13.) läßt sich auch ohne Hülfe der auflösenden Gleichung, wie folgt, aus der Figur finden.

Es ist nemlich in der Figur  $C_2 C_3 C_4 \dots C_n$  die Seite  $C_2 C_n$ , vermöge der ersten auflösenden Gleichung, gleich  $z_{3,n}$ .

Bezeichnet man also in dem Dreieck  $C_2 C_3 C_n$  den Winkel  $C_2 C_3 C_n$  durch  $\varphi$ , so ist nach (§. 560. V.)

$$17. \cos \varphi = \frac{z_{3,n}^2 + c_2^2 - c_1^2}{2c_2 z_{3,n}} \text{ und}$$

$$18. \sin \varphi = \frac{\sqrt{[(z_3 + c_2 + c_1)(z_{3,n} + c_2 - c_1)(z_{3,n} - c_2 + c_1)(c_2 + c_1 - z_{3,n})]}}{2c_2 z_{3,n}}.$$

Nun sey  $C_n K$  auf  $C_2 C_3$  senkrecht und  $C_2 C_3$  werde zur Grundlinie der Figur  $C_2 C_3 C_4 \dots C_n$  angenommen, so ist

$$C_n K = p_{4,n} \text{ und } C_2 K = c_4 - p_{4,n},$$

also da

$$\frac{C_n K}{z_{3,n}} = \pm \sin(\gamma_2 - \varphi) \text{ und } \frac{C_2 K}{z_{3,n}} = \cos(\gamma_2 - \varphi),$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn  $\gamma_2 > \varphi$ , und das untere, wenn  $\gamma_2 < \varphi$  ist,

$$19. \begin{cases} \sin(\gamma_2 - \varphi) = \frac{p_{4,n}}{z_{3,n}} \text{ und } \cos(\gamma_2 - \varphi) = \frac{c_2 - q_{4,n}}{z_{3,n}}, & \text{wenn } \gamma_2 > \varphi \text{ und} \\ \sin(\varphi - \gamma_2) = \frac{p_{4,n}}{z_{3,n}} \text{ und } \cos(\varphi - \gamma_2) = \frac{c_2 - q_{4,n}}{z_{3,n}}, & \text{wenn } \gamma_2 < \varphi \text{ ist.} \end{cases}$$

Nun ist

$$\cos \gamma_2 = \cos \varphi \cos(\gamma_2 - \varphi) - \sin \varphi \sin(\gamma_2 - \varphi) \text{ und}$$

$$\cos \gamma_2 = \cos \varphi \cos(\varphi - \gamma_2) + \sin \varphi \sin(\varphi - \gamma_2).$$

Setzt man hierin die Werthe von  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  aus (17. und 18.) und von  $\pm \sin(\gamma_2 - \varphi)$  und  $\cos(\gamma_2 - \varphi)$  aus (19.), so findet man den Ausdruck (13.).

Es ist indessen besser, den Ausdruck wie oben aus der auflösenden Gleichung zu entwickeln, weil man, wenn man einmal allgemeine Gleichungen aus der Figur aufgestellt hat, darnach sicherer und leichter rechnet als aus der Figur selbst.

$\gamma$ ) Für die Rechnung mit Zahlen läßt sich die Aufgabe noch etwas bequemer, mit Hülfe der ersten und zweiten Aufgabe, wie folgt auflösen:

In der Figur  $C_2 C_3 C_4 \dots C_n$  ist zu Folge (Aufgabe I. Gleichung 1.) die Seite

$$21. C_2 C_n = z_{3,n},$$

und zu Folge (Aufgabe 2. Gleichung 3.) die Tangente des Winkels  $C_1 C_2 C_n$ ,

$$22. \tan C_1 C_2 C_n = \frac{p_{4,n}}{c_2 - q_{4,n}}.$$

Ferner findet man in dem Dreieck  $C_1 C_2 C_n$  aus den gegebenen drei Seiten  $c_1$ ,  $c_2$  und  $C_2 C_n = z_{3,n}$  (21.) zu Folge (§. 360. 83.) den Winkel  $C_1 C_2 C_n$  wie folgt:

$$23. \tan \frac{1}{2} C_1 C_2 C = \sqrt{\frac{(c_1 + z_{3,2} - c_2)(c_1 + c_2 - z_{3,n})}{(c_2 + z_{3,n} - c_1)(c_1 + c_2 + z_{3,n})}}.$$

Hat man nach (22. und 23.) die Winkel  $C_1, C_2, C_n$  und  $C_1, C_2, C_n$  berechnet, so giebt ihre Summe den verlangten Winkel  $\gamma_2$ .

*Aufgabe 4.* (§. 375. 2.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und Winkel bis auf die drei Winkel  $\gamma_n, \gamma_1$  und  $\gamma_2$  gegeben. Man sucht den mittlern Winkel  $\gamma_1$ .

*Auflösung.* Da die Gleichung, welche diesen Winkel  $\gamma_1$  geben soll, zwar ihn, aber nicht die beiden andern unbekannten Winkel  $\gamma_n$  und  $\gamma_2$  enthalten muß, so muß sie zwei getrennte Winkel nicht enthalten. Die auflösende Gleichung ist also die zweite (§. 374.), und zwar sind hier die dortigen  $k=2$  und  $m=n$ ; also ist die auflösende Gleichung (§. 373. 4.) hier

$$24. z_{3,4}^2 = z_{1,2}^2,$$

weil  $m+1=n+1$  der Zeiger des auf  $\gamma_n$  folgenden Winkels  $\gamma_1$  ist.

In  $z_{3,n}^2$  ist Alles bekannt, wie aus (16.) zu sehen, und  $z_{1,2}^2$  ist

$$25. z_{1,2}^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 c_2 \cos \gamma_1;$$

also ist

$$z_{3,n}^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 c_2 \cos \gamma_1,$$

woraus

$$26. \cos \gamma_1 = \frac{c_1^2 + c_2^2 - z_{3,n}^2}{2c_1 c_2}.$$

folgt. Aus diesem Ausdruck findet man den gesuchten Winkel  $\gamma_1$ . Der Ausdruck von  $z_{3,n}^2$  steht in (16.).

Es ist leicht zu sehen wie wiederum der Winkel  $\gamma_1$  auch unmittelbar aus der Figur, nämlich aus dem Dreiecke  $C_1 C_2 C_n$  gefunden werden kann.

*Aufgabe 5.* (§. 375. 3.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und Winkel bis auf die beiden an einander liegenden Winkel  $\gamma_n$  und  $\gamma_1$  und den getrennten Winkel  $\gamma_m$  gegeben. Man sucht den Winkel  $\gamma_m$ .

*Auflösung.*  $\alpha$ ) Die Gleichung, welche den Winkel  $\gamma_m$  geben soll, muß diesen Winkel, aber nicht die zusammenliegenden Winkel  $\gamma_n$  und  $\gamma_1$  enthalten. Sie ist also die erste auflösende Gleichung (§. 373. 3.). Da in derselben  $\gamma_m$  mit andern Winkeln summiert vorkommt, so muß man es aus allen Gliedern, wo es vorkommt, absondern. Dieses giebt, wie leicht zu sehen, eine Gleichung von der Form

$$27. x \sin \gamma_m + \lambda \cos \gamma_m = \mu,$$



wo  $\alpha$ ,  $\lambda$  und  $\mu$  gänzlich aus gegebenen Größen zusammengesetzt sind. Aus dieser Gleichung kann man  $\cos \gamma_m$ , wie z. B. oben in der dritten Aufgabe aus der Gleichung (9.) entwickeln.

$\beta$ ) Die Aufgabe läßt sich aber auch mit Hülfe der ersten und zweiten, wie folgt auflösen.

Es sey z. B.  $\gamma$ , der gesuchte Winkel  $\gamma_m$ , so ist in der Figur  $C_1 C_2 \dots C_m$ , zu Folge (Aufgabe 1. Gleichung 1.), die Seite

$$28. C_1 C_m = z_{1,m},$$

und in der Figur  $C_1 C_6 \dots C_n$ , nach eben der Gleichung, die Seite

$$29. C_1 C_n = z_{m+1,n},$$

wo  $z_{1,m}$  und  $z_{m+1,n}$  von lauter gegebenen Größen abhängen.

Ferner ist zu Folge (Aufgabe 2. Gleichung 3.), in der Figur  $C_1 C_6 \dots C_n$ , die Tangente des Winkels  $C_6 C_1 C_n$ ,

$$30. \tan C_6 C_1 C_n = \frac{P_{m+2,n}}{C_{m+1} - Q_{m+2,n}},$$

und nach derselben Aufgabe, in der Figur  $C_1 C_2 \dots C_m$ , entweder der Winkel

$$31. C_4 C_1 C_2 = 2(m-2)\rho - C_2 C_1 C_3 \quad (5.)$$

und darin

$$32. \tan C_2 C_1 C_3 = \frac{P_{3,m}}{C_2 - Q_{3,m}},$$

oder mit der Bezeichnung (Aufgabe 2. Gleichung 7.) unmittelbar:

$$33. \tan C_4 C_1 C_2 = \frac{m-1,2P}{C_m - m-1,2Q},$$

wo überall rechterhand Alles von gegebenen Größen abhängt.

Endlich ist in dem Dreieck  $C_1 C_m C_n$ , dessen Seiten  $c_1$ ,  $z_{1,m}$  und  $z_{m+1,n}$  sind, auf die Weise wie in der vorigen Aufgabe (Gleichung 23.)

$$34. \tan \frac{1}{2} C_1 C_m C_n = \sqrt{\frac{(c_1 + z_{1,m} - z_{m+1,n})(c_1 + z_{m+1,n} - z_{1,m})}{(z_{1,m} + z_{m+1,n} - c_1)(c_1 + z_{1,m} + z_{m+1,n})}}.$$

Hat man nach den Ausdrücken (30. 31. und 32.) oder (33. und 34.) die drei Winkel  $C_6 C_1 C_n$ ,  $C_4 C_1 C_2$  und  $C_1 C_2 C_4$  berechnet, so giebt ihre Summe den gesuchten Winkel  $C_4 C_1 C_6 = \gamma_m$ .

**Aufgabe 6.** (§. 375. 4.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und Winkel bis auf die beiden an einander liegenden Winkel  $\gamma_n$  und  $\gamma_1$  und den getrennten Winkel

$\gamma_m$  gegeben. Man sucht einen der beiden zusammenliegenden Winkel, z. B.  $\gamma_x$ .

**Auflösung.** Die Gleichung, welche den Winkel  $\gamma_x$  geben soll, muß diesen Winkel, nicht aber die getrennten Winkel  $\gamma_n$  und  $\gamma_m$ , enthalten. Sie ist also die zweite auflösende Gleichung (§. 373. 6.), und zwar ist das dortige  $k$  hier  $n$ . Auf der einen Seite der Gleichung ist, wie leicht zu sehen, Alles bekannt; auf der andern ist der unbekannte Winkel mit andern Winkeln summirt, und zwar der erste unter denselben. Also ist die Auflösung der dritten Aufgabe ähnlich.

Mit Hülfe der ersten und zweiten Aufgabe läßt sich die Aufgabe wie folgt auflösen.

Es sey, wie in der vorigen Aufgabe,  $\gamma$ , der Winkel  $\gamma_m$ , so ist, wie dort (Gleichung 28. und 29.),

35.  $C_1 C_2 = z_{2,m}$ ,  $C_2 C_n = z_{m+1,n}$ ,  
also in dem Dreieck  $C_1 C_2 C_n$ , auf die Weise wie (Gleichung 34.),

$$36. \tan \frac{1}{2} C_1 C_2 C_n = \sqrt{\left[ \frac{(c_1 + z_{m+1,n} - z_{2,m})(z_{2,m} + z_{m+1,n} - c_1)}{(c_1 + z_{2,m} - z_{m+1,n})(c_1 + z_{2,m} + z_{m+1,n})} \right]}.$$

Ferner ist, wie (Gleichung 32.),

$$37. \tan C_2 C_1 C_n = \frac{P_{2,m}}{c_2 - q_{2,m}}.$$

Die Summe der Winkel  $C_1 C_2 C_n$  und  $C_2 C_1 C_n$ , welche (36. und 37.) giebt, ist der gesuchte Winkel  $\gamma$ .

**Aufgabe 7.** (§. 375. 5.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. 1.) sind die Seiten und Winkel bis auf die drei getrennten Winkel  $\gamma_k$ ,  $\gamma_m$  und  $\gamma_n$  gegeben. Man sucht einen dieser Winkel, z. B.  $\gamma_n$ .

**Auflösung.** Die Gleichung, welche den Winkel  $\gamma_n$  geben soll, muß diesen Winkel, nicht aber die beiden andern fehlenden Winkel enthalten. Sie ist also die zweite auflösende Gleichung (§. 374. 6.). Diese Gleichung enthält den Winkel  $\gamma_n$ , nicht aber die Winkel  $\gamma_k$  und  $\gamma_m$ . Es kommt daher nur darauf an,  $\gamma_n$  daraus zu entwickeln, welches eine Auflösung wie in der dritten Aufgabe giebt.

Mit Hülfe der ersten und zweiten Aufgabe findet man den gesuchten Winkel wie folgt.

Der Winkel  $\gamma_k$  sey  $\gamma$ , und der Winkel  $\gamma_m$  der Winkel  $\gamma_6$ , so ist in der Figur  $C_2 C_4 C_5 C_6$ , nach der ersten Aufgabe, die Seite

$$38. C_2 C_6 = z_{k+1,m}.$$

In der Figur  $C_3 C_4 \dots C_n$  ist die Seite

$$39. \quad C_3 C_n = z_{k+1, n},$$

und in der Figur  $C_6 C_7 C_n$  die Seite

$$40. \quad C_6 C_n = z_{m+1, n};$$

also ist in dem Dreieck  $C_3 C_6 C_n$ ,

$$41. \quad \tan \frac{1}{2} C_6 C_n C_3$$

$$= \sqrt{\frac{(z_{k+1, m} + z_{k+1, n} - z_{m+1, n})(z_{k+1, m} + z_{m+1, n} - z_{k+1, n})}{(z_{k+1, n} + z_{m+1, n} - z_{k+1, m})(z_{k+1, m} + z_{k+1, n} + z_{m+1, n})}}.$$

Ferner ist nach der zweiten Aufgabe, in der Figur  $C_n C_1 C_2 C_3 C_4$ ,

$$42. \quad \tan C_3 C_4 C_1 = \frac{p_{2, k}}{c_1 - q_{2, k}},$$

und in der Figur  $C_6 C_3 C_n$ ,

$$43. \quad \tan C_6 C_2 C_7 = \frac{n-1, m+1 p}{C_n - n-1, m+1 q},$$

oder

$$44. \quad C_6 C_n C_7 = 2(n-m-2)\rho - C_n C_6 C_7 \text{ und}$$

$$45. \quad \tan C_n C_6 C_7 = \frac{p_{m+2, n}}{c_{m+1} - q_{m+2, n}}.$$

Die Summe der drei Winkel  $C_6 C_n C_3$ ,  $C_3 C_n C_1$ , und  $C_n C_6 C_7$  ist der gesuchte Winkel  $\gamma_n$ .

**Aufgabe 8.** (§. 375. 8.) In dem  $n$  Eok (Fig. 174. I.) sind die Seiten und Winkel bis auf die beiden an einander liegenden Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_n$  und bis auf die Seite  $c_2$  an einem dieser Winkel gegeben. Man sucht die fehlende Seite  $c_2$ .

**Auflösung.**  $\alpha$ ) Die Gleichung, welche die fehlende Seite geben soll, darf die beiden fehlenden Winkel nicht enthalten. Sie ist also die erste auflösende Gleichung (3. oder 2. §. 374.), welche die Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_n$  nicht enthält. In der Gestalt (§. 374. 1.) ist die auflösende Gleichung  $c_1^2 = z_{2, n}^2$ . Es ist aber

$$z_{2, n}^2 = z_{3, n}^2 + c_2^2 - 2c_2 q_{2, n} \quad (\S. 373. 17.).$$

Daher ist

$$46. \quad c_1^2 = z_{3, n}^2 + c_2^2 - 2c_2 q_{2, n}, \text{ oder} \\ c_2^2 - 2c_2 q_{2, n} + z_{3, n}^2 - c_1^2 = 0,$$

woraus folgt:

$$47. \quad c_2 = q_{2, n} \pm \sqrt{(q_{2, n}^2 - z_{3, n}^2 + c_1^2)}.$$

Es ist aber  $z_{3, n}^2 = p_{3, n}^2 + q_{3, n}^2$  (§. 373. 7.). Setzt man dieses in die Wurzelgrösse von  $c_2$  (47.), so erhält man

$$48. \quad c_2 = q_{2, n} \pm \sqrt{(c_1^2 - p_{3, n}^2)},$$

welches die gesuchte Seite  $c_2$  durch lauter bekannte Grössen giebt.

$\beta$ ) Dieser Ausdruck folgt auch unmittelbar aus der Figur; denn wenn  $C_n V$ , aus  $C_n$ , auf der Seite  $c_2$  senk-

recht steht, so ist, wie leicht zu sehen,  $p_{2,n} = C_n V$  und  $q_{3,n} = C_2 V$ , also

$$c_2 = C_2 V \pm \sqrt{(C_1 C_n^2 - C_n V^2)}, \text{ das heißt}$$

$$c_2 = q_{3,n} \pm \sqrt{(c_1^2 - p_{3,n}^2)},$$

je nachdem  $\gamma_2$  stumpf oder spitz ist; eben wie (48.).

**Aufgabe 9.** (§. 375. 9.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und Winkel bis auf die beiden an einander liegenden Winkel  $\gamma_{n-1}$  und  $\gamma_n$ , und bis auf die Seite  $c_x$ , an einem der beiden Winkel, gegeben. Man sucht den an der fehlenden Seite liegenden fehlenden Winkel  $\gamma_n$ .

**Auflösung.**  $\alpha$ ) Zu Folge der dritten auflösenden Gleichung (§. 374. 10.) ist

$$49. \quad c_2 \sin \gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \dots + c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-1}) = 0,$$

welche Gleichung die fehlende Seite  $c_x$  nicht enthält.

Die Gleichung ist so viel als

$$50. \quad p_{2,n-1} \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-1}) = 0,$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn  $n$  grade, und das untere, wenn  $n$  ungrade ist.

Sodann ist  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-1} = 2(n-2)\rho - \gamma_n$ ; also  $\sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-1}) = \sin(2n\rho - 4\rho - \gamma_n) = \sin(2n\rho - \gamma_n)$ , also

$$\sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-1}) \begin{cases} = -\sin \gamma_n, & \text{wenn } n \text{ grade und} \\ = +\sin \gamma_n, & \text{wenn } n \text{ ungrade ist.} \end{cases}$$

Also ist in (50.) in allen Fällen

$$p_{2,n-1} - c_n \sin \gamma_n = 0,$$

und daraus folgt

$$51. \quad \sin \gamma_n = \frac{p_{2,n-1}}{c_n};$$

welches den gesuchten Winkel durch bekannte Größen giebt.

$\beta$ ) Der Ausdruck (51.) folgt auch leicht unmittelbar aus der Figur; denn  $p_{2,n-1}$  ist nichts anders als das Perpendikel  $C_7 P_7$  aus  $C_7$  auf  $c$ , und es ist  $c_n \sin \gamma_n = C_7 P_7 = p_{2,n-1}$ ; welches den Ausdruck (51.) giebt.

**Aufgabe 10.** (§. 375. 10.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und Winkel bis auf die beiden an einander liegenden Winkel  $\gamma_{n-1}$  und  $\gamma_n$ , und bis auf die Seite  $c_1$ , an einem der beiden Winkel gegeben. Man sucht den nicht an der fehlenden Seite liegenden Winkel  $\gamma_{n-1}$ .

**Auflösung.** Der Winkel  $\gamma_{n-1}$  läßt sich vermittelst der dritten auflösenden Gleichung (§. 374. 10.), etwa in der Gestalt (50.), finden. Kürzer aber ist es, nach der Gleichung (51.) erst den andern unbekannten Winkel  $\gamma_n$  zu suchen. Alsdann ist

$$55. \quad \gamma_{n-1} = 2(n-2)\rho - (\gamma_n + \gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-2}).$$



und daraus folgt

$$56. \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{m-1} + \gamma_m) = \pm \frac{p_{2,m} - n_{2,m} + p}{c_{m+1}}.$$

Da die Größen  $p_{2,m}$  und  $n_{2,m}$ , wie aus (53. und 54.) zu sehen, die unbekannten Stücke  $\gamma_m$ ,  $\gamma_{m+1}$  und  $c_2$  nicht enthalten, sondern ganz aus gegebenen Stücken zusammengesetzt sind, so giebt die Gleichung (56.), in welcher das obere Zeichen gilt, wenn  $m$  grade, und das untere, wenn  $m$  ungrade ist, den Winkel

$$57. \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{m+1} + \gamma_m.$$

Zieht man davon die gegebenen Winkel  $\gamma_1 + \gamma_2 \dots \dots + \gamma_{m-1}$  ab, so findet man den gesuchten Winkel  $\gamma_m$ .

$\beta$ ) Die Gleichung (56.) lässt sich auch leicht unmittelbar aus der Figur finden. Es sey z. B.  $\gamma_4$  der gesuchte Winkel  $\gamma_m$ , so sind die Größen  $p_{2,m}$  und  $n_{2,m}$  nichts anders als die Perpendikel  $C_4 P_4$  und  $C_1 P_1$ , aus  $C_4$  und  $C_1$  auf  $c_2$ , und  $\pm \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_n)$  ist der Sinus des Winkels, welchen die Seite  $C_4 C_1 = c_{m+1}$  mit der Seite  $c_2$  macht, also wenn  $C_1 T$  mit  $c_2$  parallel ist,  $\pm \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_m) = \frac{C_4 T}{c_{m+1}}$ . Nun ist  $C_4 T = p_{2,m}$

$-n_{2,m}$ . Also ist  $\pm \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_m) = \frac{p_{2,m} - n_{2,m}}{c_{m+1}}$ ; wie (56.).

**Aufgabe 12.** (§. 375. 12.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. 1.) sind die Seiten und die Winkel, bis auf die beiden an einander liegenden Winkel  $\gamma_m$  und  $\gamma_{m+1}$  und bis auf eine davon getrennte Seite  $c_2$ , gegeben. Man sucht die fehlende Seite  $c_2$ .

**Auflösung.**  $\alpha$ ) Wenn man die zwischen den beiden fehlenden Winkeln  $\gamma_m$  und  $\gamma_{m+1}$  liegende Seite  $c_{m+1}$  zur Grundlinie nimmt, so ist die erste auflösende Gleichung, für diese Grundlinie,

$$58. z_{m+1,2,n,m}^2 = c_{m+1}^2;$$

wo  $c_{m+1}$  bekannt ist.

Diese Gleichung enthält zwar die fehlende Seite  $c_2$ , nicht aber die beiden fehlenden Winkel  $\gamma_m$  und  $\gamma_{m+1}$ . Man kann also daraus  $c_2$  finden. Die Gleichung ist nach  $c_2$  vom zweiten Grade.

$\beta$ ) Oder man sucht erst nach der vorigen Aufgabe, und zwar nach (56. und 57.), einen der fehlenden Winkel  $\gamma_m$  und hierauf aus

$$59. \gamma_{m+1} = 2(n-2)\rho - (\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_m) - (\gamma_{m+2} + \gamma_{m+3} \dots + \gamma_n).$$

auch den andern  $\gamma_{m+1}$ . Alsdann giebt die erste auflösende Gleichung, für die Grundlinie  $c_1$ , nemlich

$$60. \quad z_{2,n}^2 = o_1^2,$$

weil jetzt auch alle Winkel in  $z_{2,n}$  bekannt sind, die fehlende Seite  $c_1$  unmittelbar.

**Aufgabe 13.** (§. 375. 1.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. 1.) sind die Seiten und die Winkel bis auf die zwei getrennten Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_m$  und bis auf die an dem einen fehlenden Winkel liegende Seite  $c_2$  gegeben. Man sucht die fehlende Seite  $c_2$ .

**Auflösung.**  $\alpha$ ) Wenn man in die zweite auflösende Gleichung  $n=1$  setzt, so enthält die Gleichung die beiden fehlenden Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_m$  nicht, wohl aber die fehlende Seite  $c_2$ , welche also daraus gefunden werden kann.

Es ist nemlich

$$61. \quad \gamma_{2,m}^2 = z_{m+1,n,1}^2,$$

wo  $z_{2,m}$  die fehlende Seite  $c_2$  enthält,  $z_{m+1,n,1}$  aber aus lauter bekannten Grössen zusammengesetzt ist.

Nun ist zu Folge (§. 373. Gleichung 17.)  $z_{2,n}^2 = z_{2,n}^2 + c_2^2 - 2c_2 q_{3,n}$ , wo  $z_{3,n}$  und  $q_{3,n}$  nur noch lauter bekannte Grössen enthalten.

Es ist also

$$c_2^2 - 2c_2 q_{3,n} + z_{3,n}^2 - z_{m+1,n,1}^2 = 0, \text{ woraus}$$

$$c_2 = q_{3,n} \pm \sqrt{(q_{3,n}^2 - z_{3,n}^2 + z_{m+1,n,1}^2)}, \text{ oder weil}$$

$$z_{3,n}^2 = p_{3,n}^2 + q_{3,n}^2 \text{ ist (§. 375. 7.)},$$

$$62. \quad c_2 = q_{3,n} \pm \sqrt{(z_{m+1,n,1}^2 - p_{3,n}^2)}$$

folgt; wodurch man die fehlende Seite  $c_2$  aus den gegebenen Stücken findet.

**Aufgabe 14.** (§. 375. 14.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und die Winkel, bis auf die zwei getrennten Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_m$  und bis auf die an dem einen fehlenden Winkel liegende Seite  $c_1$  gegeben. Man sucht den an der fehlenden Seite liegenden Winkel  $\gamma_1$ .

**Auflösung.**  $\alpha$ ) Die dritte auflösende Gleichung (§. 374. 10.), nemlich

$$63. \quad c_2 \sin \gamma_2 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \dots$$

$$\dots \pm c_m \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{m+1})$$

$$\mp c_{m+1} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_m) \pm c_{m+2} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{m+1}) \dots$$

$$\dots \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}) = 0$$

enthält die fehlende Seite  $c_1$  und den gegebenen Winkel  $\gamma_n$  nicht, dagegen aber die fehlenden Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_m$ . Nun sind in dieser Gleichung linkerhand die Glieder der ersten Reihe zusammen so viel als  $p_{1,m}$  und die übrigen Glieder, ganz auf die Weise wie in der Auflösung der elften Aufgabe, so viel als  $-n_{m+1,p}$ . Also ist

64.  $p_{2,m} - n_{m+1}p = 0$ , oder  $p_{2,m} = n_{m+1}p$ , welches sich auch leicht unmittelbar aus der Figur sehen läßt; denn, wenn z. B.  $\gamma$ , der Winkel  $\gamma_m$  ist, so bedeuten  $p_{2,m}$  und  $n_{m+1}p$ , beide das Perpendikel  $C, P$ .

Nun ist zu Folge (§. 373. Gleichung 13.)

65.  $p_{2,m} = (c_2 - q_{3,m}) \sin \gamma_1 - p_{3,m} \cos \gamma_1$ .  
Also ist in (64.)

66.  $(c_2 - q_{3,m}) \sin \gamma_1 - p_{3,m} \cos \gamma_1 = n_{m+1}p$ .  
Man setze, der Kürze wegen,

67.  $c_2 - q_{3,m} = x$ ,  $p_{3,m} = \lambda$  und  $n_{m+1}p = \mu$ ,  
so ist

$$68. \quad x \sin \gamma_1 - \lambda \cos \gamma_1 = \mu.$$

Dieses giebt

$$\lambda \cos \gamma_1 = x \sin \gamma_1 - \mu \quad \text{und}$$

$$\lambda^2 (1 - \sin^2 \gamma_1) = x^2 \sin^2 \gamma_1 - 2x\mu \sin \gamma_1 + \mu^2, \quad \text{oder}$$

$$(x^2 + \lambda^2) \sin^2 \gamma_1 - 2x\mu \sin \gamma_1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0, \quad \text{oder}$$

$$\sin^2 \gamma_1 - \frac{2x\mu}{x^2 + \lambda^2} \sin \gamma_1 + \frac{\mu^2 - \lambda^2}{x^2 + \lambda^2} = 0; \quad \text{also}$$

$$\sin \gamma_1 = \frac{x\mu}{x^2 + \lambda^2} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2 \mu^2}{(x^2 + \lambda^2)^2} - \frac{\mu^2 - \lambda^2}{x^2 + \lambda^2}\right)}, \quad \text{oder}$$

$$\sin \gamma_1 = \frac{x\mu}{x^2 + \lambda^2} \pm \frac{\sqrt{(x^2 \mu^2 - x^2 \mu^2 + x^2 \lambda^2 - \lambda^2 \mu^2 + \lambda^4)}}{x^2 + \lambda^2}, \quad \text{oder}$$

$$69. \quad \sin \gamma_1 = \frac{x\mu \pm \lambda \sqrt{(x^2 + \lambda^2 - \mu^2)}}{x^2 + \lambda^2}.$$

Nun ist

$$x^2 + \lambda^2 = (c_2 - q_{3,m})^2 + p_{3,m}^2 = c_2^2 - 2c_2 q_{3,m} + q_{3,m}^2 + p_{3,m}^2,$$

und weil  $q_{3,m}^2 + p_{3,m}^2 = z_{3,m}^2$  (§. 373. 8.),

$$70. \quad x^2 + \lambda^2 = c_2^2 - 2c_2 q_{3,m} + z_{3,m}^2.$$

Setzt man dieses, so wie die Ausdrücke von  $x$ ,  $\lambda$  und  $\mu$ , (67.) in (69.), so findet man

$$71. \quad \sin \gamma_1 = \frac{(c_2 - q_{3,m}) n_{m+1}p \pm p_{3,m} \sqrt{(c_2^2 - 2c_2 q_{3,m} + z_{3,m}^2 - n_{m+1}p^2)}}{c_2^2 - 2c_2 q_{3,m} + z_{3,m}^2},$$

welches den gesuchten Winkel  $\gamma_1$  durch die gegebenen Stücke ausdrückt.

$\beta$ ) Unmittelbar aus der Figur kann man den Ausdruck (71.) wie folgt finden.

Der fehlende Winkel  $\gamma_m$  sey  $\gamma$ , (Fig. 174. I.) und  $C, U$  auf  $C_1 C_2$ ,  $C, P$  auf  $C_1 C_n$  senkrecht, so ist

$$72. \quad \begin{cases} C_1 U = c_2 - q_{3,m} = x & (67.), \\ C_1 U = p_{3,m} = \lambda & (67.), \\ C_1 P = n_{m+1}p = \mu & (67.), \end{cases}$$

$$(C_1 C_2)^2 = C_1 U^2 + C_2 U^2 = x^2 + \lambda^2,$$

$$(C_1 P)^2 = C_1 C_2^2 - C_2 P^2 = x^2 + \lambda^2 - \mu^2.$$



Nun ist  $C_1 U = C_1 C_2 \sin \varphi$ ,  $C_1 U = C_1 C_2 \cos \varphi$ ,  
 $C_1 P_2 = C_2 C_1 \sin \psi$ ,  $C_1 P_2 = C_2 C_1 \cos \psi$ , oder  
 $\lambda = \sin \varphi \sqrt{(x^2 + \lambda^2)}$ ,  $x = \cos \varphi \sqrt{(x^2 + \lambda^2)}$ ,  
 $\mu = \sin \psi \sqrt{(x^2 + \lambda^2)}$ ,  $\sqrt{(x^2 + \lambda^2 - \mu^2)} = \cos \psi \sqrt{(x^2 + \lambda^2)}$ ; also

$$73. \begin{cases} \sin \varphi = \frac{\lambda}{\sqrt{(x^2 + \lambda^2)}}, & \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + \lambda^2)}}, \\ \sin \psi = \frac{\mu}{\sqrt{(x^2 + \lambda^2)}}, & \cos \psi = \frac{\sqrt{(x^2 + \lambda^2 - \mu^2)}}{\sqrt{(x^2 + \lambda^2)}}. \end{cases}$$

Nun ist  $\gamma_1 = \psi + \varphi$ , wenn die Linie  $C_1 C_2$  zwischen  $C_1 C_2$  u.  $C_1 C_2$  fällt, und  $\gamma_1 = \psi - \varphi$ , wenn die Linie  $C_1 C_2$  außerhalb  $C_2 C_1 C_n$  fällt, also ist für die verschiedenen Fälle:  $\sin \gamma_1 = \sin \psi \cos \varphi \pm \cos \psi \sin \varphi$ . Setzt man hierin die Ausdrücke von  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\sin \psi$ ,  $\cos \psi$  aus (73.), so findet man

$$74. \sin \gamma_1 = \frac{x\mu \pm \lambda \sqrt{(x^2 + \lambda^2 - \mu^2)}}{x^2 + \lambda^2};$$

welches der Ausdruck (69.) ist.

**Aufgabe 15.** (§. 375. 15.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und die Winkel bis auf die zwei getrennten Winkel  $\gamma$ , und  $\gamma_m$  und bis auf die an dem einen fehlenden Winkel liegende Seite  $c_1$  gegeben. Man sucht den getrennten Winkel  $\gamma_m$ .

**Auflösung.** Man suche den andern fehlenden Winkel  $\gamma_1$  nach der 14ten Aufgabe, so findet man

$$75. \gamma_m = 2(n-2)\rho - (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{m-1}) - (\gamma_{m+1} + \gamma_{m+2} + \dots + \gamma_n).$$

**Aufgabe 16.** (§. 375. 16.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und die Winkel bis auf zwei getrennte Winkel, z. B.  $\gamma_k$  und  $\gamma_m$ , und bis auf eine an beide Winkel nicht anliegende Seite, z. B.  $c_1$ , gegeben. Man sucht den einen fehlenden Winkel, z. B.  $\gamma_k$ .

**Auflösung.** Die dritte auflösende Gleichung für die Grundlinie  $c_1$  ist

$$76. c_2 \sin \gamma_1 - c_3 \sin (\gamma_1 + \gamma_2) \pm c_4 \sin (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \dots \pm c_k \sin (\gamma_1 + \gamma_2 \dots \gamma_{k-1}) \pm c_{k+1} \sin (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_k) \pm c_{k+2} \sin (\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{k+1}) \dots \dots \pm c_m \sin (\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{m-1}) \pm c_{m+1} \sin (\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_m) \pm c_{m+2} \sin (\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{m+1}) \dots \dots \pm \sin c_n (\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-1}) = 0.$$

Nun ist

$$77. \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1} = 2(n-2)\rho - \gamma_n \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-2} = 2(n-2)\rho - (\gamma_n + \gamma_{n-1}) \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_m = 2(n-2)\rho - (\gamma_n + \gamma_{n-1} + \dots + \gamma_{m+1}). \end{cases}$$

Also ist

$$78. \begin{cases} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-1}) = \pm \sin \gamma_n \\ \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-2}) = \pm \sin(\gamma_n + \gamma_{n-1}) \\ \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_m) = \pm \sin(\gamma_n + \gamma_{n-1} \dots + \gamma_{m+1}). \end{cases}$$

Die obern Zeichen gelten für ein ungrades, die untern für ein grades  $n$ . Nun ist das letzte Glied  $c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{n-1})$  negativ, wenn  $n$  ungrade, und positiv, wenn  $n$  grade ist. Also ist das letzte Glied immer negativ und die Zeichen der vorhergehenden Glieder wechseln ab. Daher ist die dritte Zeile linkerhand in (76.) so viel als

$$79. -(c_n \sin \gamma_n - c_{n-1} \sin(\gamma_n + \gamma_{n-1}) + c_{n-2} \sin(\gamma_n + \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2}) \dots \dots \pm \sin(\gamma_n + \gamma_{n-1} \dots + \gamma_{m+1}),$$

das heisst, so viel als  $-n, m+1 p$ .

Die erste Zeile ist so viel als  $p_{2,k}$ . Also ist zusammen, in (76.)

$$80. p_{2,k} - p_{n,m+1} + [(c_{k+1} (\sin \gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_k) - c_{k+2} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{k+1}) \dots \dots \pm c_m (\gamma_1 + \gamma_2 \dots + \gamma_{m-1}))] = 0.$$

Die Gröfsen  $p_{2,k}$  und  $-n, m+1 p$  sind ganz aus gegebenen Stücken zusammengesetzt, und nur die zweite Zeile links in (80.) enthält ein unbekanntes Stück, nemlich den Winkel  $\gamma_k$ .

Man setze

$$81. \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_k = \varphi,$$

so ist die zweite Zeile in (80.) links so viel als

$$82. + [c_{k+1} \sin \varphi - c_{k+2} \sin \varphi \cos \gamma_{k+1} + c_{k+3} \sin \varphi \cos(\gamma_{k+1} + \gamma_{k+2}) \dots \dots \pm c_m \sin \varphi \cos(\gamma_{k+1} \dots \gamma_{m-1}) - c_{k+2} \cos \varphi \sin \gamma_{k+1} + c_{k+3} \cos \varphi \sin(\gamma_{k+1} + \gamma_{k+2}) \dots \dots \pm c_m \cos \varphi \sin(\gamma_{k+1} \dots \gamma_{m-1})],$$

oder weil

$$\begin{aligned} c_{k+2} \cos \gamma_{k+1} - c_{k+3} \cos(\gamma_{k+1} + \gamma_{k+2}) \dots \dots \pm c_m \cos(\gamma_{k+1} \dots + \gamma_{m-1}) &= q_{k+2,m} \\ c_{k+2} \sin \gamma_{k+1} - c_{k+3} \sin(\gamma_{k+1} + \gamma_{k+2}) \dots \dots \pm c_m \sin(\gamma_{k+1} \dots + \gamma_{m-1}) &= p_{k+2,m}, \end{aligned}$$

so viel als

$$83. + [(c_{k+1} - q_{k+2,m}) \sin \varphi - p_{k+2,m} \cos \varphi],$$

wo  $p_{k+2,m}$  und  $q_{k+1,m}$  lauter bekannte Gröfsen enthalten. Also ist die Gleichung (80.) nunmehr

84.  $p_{2,k} - n, m+1, p \pm [(c_{k+1} - q_{k+2,m}) \sin \varphi - p_{k+2,m} \cos \varphi] = 0$ , wo, wie aus (76.) zu sehen, das obere Zeichen gilt, wenn  $k$  grade ist, und das untere, wenn  $k$  ungrade ist.

Setzt man der Kürze wegen

85.  $c_{k+1} - q_{k+2,m} = x$ ,  $p_{k+2,m} = \lambda$  und  $p_{2,k} - n, m+1, p = \mu$ , so ist in (84.)

$$86. \mu \mp (x \sin \varphi - \lambda \cos \varphi) = 0.$$

Daraus folgt  $\pm \lambda \cos \varphi = \pm x \sin \varphi - \mu$  und  $\lambda^2 (1 - \sin^2 \varphi) = x^2 \sin^2 \varphi \mp 2x\mu \sin \varphi + \mu^2$ , oder  $(x^2 + \lambda^2) \sin^2 \varphi \mp 2x\mu \sin \varphi + \mu^2 - \lambda^2 = 0$ , also

$$\sin \varphi = \pm \frac{x\mu}{x^2 + \lambda^2} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2 \mu^2}{(x^2 + \lambda^2)^2} + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{x^2 + \lambda^2}\right)},$$

oder, wie in (69.),

$$87. \sin \varphi = \frac{\pm x\mu \pm \lambda \sqrt{(x^2 + \lambda^2 - \mu^2)}}{x^2 + \lambda^2}.$$

Es ist

$$x^2 + \lambda^2 = c_{k+1}^2 - 2c_{k+1}q_{k+2,m} + q_{k+2,m}^2 + p_{k+2,m}^2,$$

und da  $q_{k+2,m}^2 + p_{k+2,m}^2 = z_{k+2,m}^2$ ,

$$88. x^2 + \lambda^2 = c_{k+1}^2 - 2c_{k+1}q_{k+2,m} + z_{k+2,m}^2.$$

Setzt man diese Ausdrücke von  $x^2 + \lambda^2$  und  $\mu$  in (81.), so findet man

$$89. \sin \varphi = \frac{\left\{ \pm (c_{k+1} - q_{k+2,m}) (p_{2,k} - n, m+1, p) \right.}{c_{k+1}^2 - 2c_{k+1}q_{k+2,m} + z_{k+2,m}^2} \left. \pm p_{k+2,m} \sqrt{(c_{k+1}^2 - 2c_{k+1}q_{k+2,m} + z_{k+2,m}^2 - (p_{2,k} - n, m+1, p)^2)} \right\}}{c_{k+1}^2 - 2c_{k+1}q_{k+2,m} + z_{k+2,m}^2}.$$

Hieraus findet man den gesuchten Winkel  $\gamma_k$  in lauter bekannten Größen, weil  $\varphi = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_k$  (81.), und folglich

$$90. \gamma_k = \varphi - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{k-1})$$

ist.

Auch kann man das Resultat, wenn man will, auf eine ähnliche Art wie in der vorigen Aufgabe, unmittelbar aus der Figur ableiten.

**Aufgabe 17.** (§. 376. 17.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und Winkel bis auf zwei getrennte Winkel, z. B.  $\gamma_k$  und  $\gamma_m$  und bis auf eine an beide Winkel nicht anliegende Seite  $c_1$  gegeben. Man sucht die fehlende Seite  $c_1$ .

**Auflösung.** Die zweite auflösende Gleichung (§. 374. 6.) enthält die beiden fehlenden Winkel  $\gamma_k$  und

$\gamma_m$  nicht, wohl aber die fehlende Seite  $c_1$ . Also kann man diese Seite daraus finden.

Die Gleichung welche sie giebt ist vom zweiten Grade.

Man kann aber auch nach der 16ten Aufgabe den einen fehlenden Winkel  $\gamma_k$ , und aus  $\gamma_m = 2(n-2)\rho - (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{m-1}) - (\gamma_{m+1} + \gamma_{m+2} + \dots + \gamma_n)$  den andern fehlenden Winkel suchen. Alsdann giebt die erste auflösende Gleichung (§. 374.) die fehlende Seite  $c_1$  unmittelbar.

**Aufgabe 18.** (§. 375. 18.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und die Winkel bis auf zwei an einander liegende Seiten, z. B.  $c_1$  und  $c_2$ , gegeben. Man sucht eine dieser beiden Seiten, z. B.  $c_2$ .

**Auflösung.** Die dritte auflösende Gleichung für die Grundlinie  $c_1$  ist

$$p_{2,n} = c_2 \sin \gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \dots \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1}) = 0,$$

oder weil zu Folge (§. 373. 13.)

$$p_{2,n} = (c_2 - q_{3,n}) \sin \gamma_1 - p_{3,n} \cos \gamma_1 \text{ ist, } (c_2 - q_{3,n}) \sin \gamma_1 = p_{3,n} \cos \gamma_1. \text{ Daraus folgt:}$$

$$91. \quad c_2 = p_{3,n} \cot \gamma_1 + q_{3,n};$$

welches die gesuchte Seite durch die gegebenen Größen giebt.

**Aufgabe 19.** (§. 375. 19.) In dem  $n$  Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und die Winkel bis auf zwei getrennte Seiten, z. B.  $c_1$  und  $c_m$ , gegeben. Man sucht eine dieser beiden Seiten, z. B.  $c_m$ .

**Auflösung.** Die dritte auflösende Gleichung für die Grundlinie  $c_1$  ist

$$92. \quad c_2 \sin \gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \dots \dots \dots \pm c_{m-1} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{m-1}) + c_m \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{m-1}) \pm c_{m+1} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m) + c_{m+2} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{m+1}) \dots \dots \dots \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1}) = 0.$$

Die erste Zeile ist so viel als  $p_{2,m-1}$ . Setzt man

$$93. \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{m-1} = \alpha,$$

so ist die zweite Zeile  $\pm c_m \sin \alpha$  und die dritte Zeile so viel als

$$\pm [(c_{m+1} \sin \alpha \cos \gamma_m + c_{m+2} \sin \alpha \cos(\gamma_m + \gamma_{m+1}) \dots \dots \dots \pm c_n \sin \alpha \cos(\gamma_m + \gamma_{m+1} + \dots + \gamma_{n-1}) + c_{m+1} \cos \alpha \sin \gamma_m + c_{m+2} \cos \alpha \sin(\gamma_m + \gamma_{m+1}) \dots \dots \dots \pm c_n \cos \alpha \sin(\gamma_m + \gamma_{m+1} + \dots + \gamma_{n-1})],$$

oder so viel als

$$\pm [q_{m+1,n} \sin \alpha + p_{m+1,n} \cos \alpha]. \text{ Zusammengenommen also ist die Gleichung (92.),}$$

$$94. \quad p_{2,m-1} \pm c_m \sin \alpha \pm (q_{m+1,n} \sin \alpha + p_{m+1,n} \cos \alpha) = 0.$$

Daraus folgt

$$95. \quad c_m = q_{m+1,n} \pm p_{m+1,n} \cot \alpha \pm p_{2,m-1} \operatorname{cosec} \alpha.$$

Das obere Zeichen gilt, wie aus (92.) zu sehen, wenn  $m$  ungrade, das untere wenn  $m$  grade ist. Auch ist unmittelbar aus (92.)

$$96. \quad c_m = \frac{\{c_{m+1} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m) - c_{m+2} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{m+1}) - \dots\}}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{m-1})} \\ = \frac{\{ \dots \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_{n-1}) \pm p_{2,m-1} \}}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{m-1})},$$

welches die gesuchte Seite  $c_m$  durch die gegebenen Stücke giebt.

377.

*Anmerkung.* Im Viereck, der einfachsten Figur nächst dem Dreieck; finden von den 19 Aufgaben für ein beliebiges Vieleck (§. 375. und 376.) die 3te, 4te, 5te, 16te und 17te nicht Statt, weil im Viereck drei fehlende Winkel nicht getrennt seyn können, und von zwei getrennten Winkeln keine Seite abgesondert seyn kann.

Die möglichen Aufgaben beim Viereck sind also folgende, und zwar so numerirt, wie sie auf einander folgen:

Gegeben.	Gesucht.	Die Aufgabe correspondirt mit folgender Aufgabe beim Viereck (§. 576):
Alle Seiten und Winkel bis auf:		
I. Drei Winkel,	3) ein fehlender äußerer Winkel . . . . .	6
	4) der fehlende mittlere Winkel . . . . .	7
II. Zwei Winkel und eine Seite dazwischen,	1) die fehlende Seite . . . . .	1
	2) einer der fehlenden Winkel . . . . .	2
III. Zwei Winkel und eine Seite an dem einen Winkel,	5) die fehlende Seite . . . . .	8
	6) der fehlende Winkel an der fehlenden Seite . . . . .	9
	7) der andere fehlende Winkel . . . . .	10
IV. Zwei Winkel und eine davon getrennte Seite,	8) einer der fehlenden Winkel . . . . .	11
	9) die fehlende Seite . . . . .	12
V. Zwei getrennte Winkel und eine Seite an dem einen Winkel,	10) die fehlende Seite . . . . .	13
	11) der Winkel an der fehlenden Seite . . . . .	14
	12) der getrennte fehlende Winkel . . . . .	15

## 378. 379. Aufgaben von Seiten und Winkeln. 471

V. Zwei Seiten an einander, 13) eine fehlende Seite 18

V. Zwei getrennte Seiten, 14) eine fehlende Seite 19

Man kann diese Aufgaben unmittelbar durch die allgemeine Ausdrücke (§. 376.) auflösen.

Der Raum gestattet nicht die Auflösungen durchzugehen. Sie haben aber keine Schwierigkeit. Man darf nur jedesmal die Seiten  $c_5, c_6 \dots c_n$  gleich Null setzen, weil im gegenwärtigen Falle nur die vier Seiten  $c_1, c_2, c_3, c_4$  existiren.

### 378.

**Erläuterung.** Da nicht allein die Seiten und die Winkel einer Figur zwischen den Seiten, sondern auch die Diagonalen und selbst andere, nach bestimmten Regeln liegende gerade Linien, nebst den Winkeln, die sie mit einander und mit den Seiten einschließen, bestimmende Stücke einer Figur seyn können, so giebt es noch weit mehr Aufgaben: aus den bestimmenden Stücken einer Figur die fehlenden zu finden. Die Zahl solcher Aufgaben, deren Auflösung übrigens nirgend Schwierigkeit hat, ist sehr groß. Man kann dieses an: *Biörnsen introductio in tetragonometriam* sehen. Obgleich dieses Buch blos vom Viereck handelt, so füllen doch die Aufgaben über diese Figur schon einen Band. Es läßt sich also hier auf dem beschränkten Raume nichts Umfassenderes von diesem Gegenstande sagen. Wir müssen uns begnügen einige besondere, am häufigsten vorkommende Sätze zu berühren.

### 379.

**Lehrsatz.** Das Product der Sinus der Winkel zwischen den Diagonalen einer Figur, die je zwei auf einander folgende Seiten verbinden, und je einer dieser Seiten, abwechselnd genommen, ist dem Product der Sinus der Winkel zwischen den nemlichen Diagonalen und den anderen Seiten gleich.

Z. B. Wenn man in (Fig. 175.)  
die Diagonal, welche die Seiten  $c_1$  und  $c_2$  verbindet,  
durch  $z_1$ ,  
die Diagonal, welche die Seiten  $c_2$  und  $c_3$  verbindet,  
durch  $z_2$ ,  
u. s. w. bezeichnet, so ist

$$\sin(z_1 c_1) \cdot \sin(z_2 c_2) \cdot \sin(z_3 c_3) \cdot \dots \cdot \sin(z_n c_n) \\ = \sin(z_1 c_2) \cdot \sin(z_2 c_3) \cdot \sin(z_3 c_4) \cdot \dots \cdot \sin(z_n c_1).$$

*Beweis.* Es ist

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sin(z_1 c_1)}{\sin(z_1 c_2)}, \quad \frac{c_3}{c_2} = \frac{\sin(z_2 c_2)}{\sin(z_2 c_3)} \cdot \dots \cdot \frac{c_1}{c_n} = \frac{\sin(z_n c_n)}{\sin(z_n c_1)}.$$

Multipliziert man alle diese Gleichungen in einander, so heben sich linkerhand alle Factoren auf, und man findet

$$1 = \frac{\sin(z_1 c_1) \sin(z_2 c_2) \cdot \dots \cdot \sin(z_n c_n)}{\sin(z_1 c_2) \sin(z_2 c_3) \cdot \dots \cdot \sin(z_n c_1)},$$

woraus die Gleichung des Lehrsatzes folgt.

380.

*Aufgabe.* In einem Viereck sind zwei Seiten nebst dem Winkel, welchen sie einschließen, und den Winkeln zwischen der Diagonal, die durch den gegebenen Winkel geht, und den andern beiden Seiten gegeben. Man sucht die übrigen Stücke.

Z. B. in (Fig. 176.) sind  $a, b, \alpha, \beta$  und  $\gamma$  gegeben. Man sucht z. B.  $\varphi$ .

*Erste Auflösung.* Es ist

$$\text{im Dreieck } ACD, \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{z}{\sin \psi}, \text{ und}$$

$$\text{im Dreieck } BCD, \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{z}{\sin \varphi};$$

also wenn man das zweite mit dem ersten dividirt:

$$2. \quad \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}.$$

Nun ist

$$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 4\varrho \text{ also } \varphi = 4\varrho - (\alpha + \beta + \gamma + \psi) \\ \text{und } \sin \psi = -\sin(\alpha + \beta + \gamma + \varphi) = -\sin(\alpha + \beta + \gamma) \cos \varphi \\ - \cos(\alpha + \beta + \gamma) \sin \varphi, \text{ folglich in (2.)}$$

$$\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = -\sin(\alpha + \beta + \gamma) \cot \varphi - \cos(\alpha + \beta + \gamma) \text{ und}$$

$$3. \quad \cot \varphi = -\left( \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta \sin(\alpha + \beta + \gamma)} + \cot(\alpha + \beta + \gamma) \right),$$

wodurch man den gesuchten Winkel  $\varphi$  aus den gegebenen Stücken  $a, b, \alpha, \beta$  und  $\gamma$  findet. Hat man  $\varphi$  gefunden, so ist  $\psi = 4\varrho - (\alpha + \beta + \gamma + \varphi)$ , und weil

$$\text{in dem Dreieck } ACD, \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin(\alpha + \psi)}, \text{ und}$$

$$\text{in dem Dreieck } BCD, \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{BD}{\sin(\beta + \varphi)} \text{ ist,}$$

$$\begin{cases} AD = \frac{a \sin(\alpha + \psi)}{\sin \alpha}, \\ BD = \frac{b \sin(\beta + \varphi)}{\sin \beta}. \end{cases}$$

Zweite Auflösung. Wie in der ersten Auflösung

(2.) ist  $\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}$ .

Man setze

5.  $\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \tan \lambda = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta},$

welches immer angeht, weil die Tangente eines Winkels jede Gröfse von 0 bis  $\infty$  haben kann, so ist

6.  $\frac{1 + \tan \lambda}{1 - \tan \lambda} = \frac{1 + \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}}{1 - \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}} = \frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi}.$

Aber  $\frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi)}$  (§. 345. 86.) und

$\frac{1 + \tan \lambda}{1 - \tan \lambda} = \tan(\frac{1}{4}\pi + \lambda)$  (§. 345. 103.); also

7.  $\tan(\pi - \lambda) = \frac{\tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi)}$  und folglich.

8.  $\tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{\tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\tan(\frac{1}{4}\pi + \lambda)}.$

Nun ist aus  $(\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi)$ ,  $\varphi + \psi = 4\varrho - (\alpha + \beta + \gamma)$ , also

$\tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \tan(2\varrho - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)) = -\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$

und folglich in (8.)  $\tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = -\frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)}{\tan(\frac{1}{4}\pi + \lambda)},$

oder

9.  $\tan \frac{1}{2}(\psi - \varphi) = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)}{\tan(\frac{1}{4}\pi + \lambda)}.$

Aus (5.) findet man  $\lambda$ , also da  $\alpha, \beta, \gamma$  gegeben sind, aus (9.)  $\frac{1}{2}(\psi - \varphi)$ . Ferner ist  $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 2\varrho - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ . Addirt und subtrahirt man  $\frac{1}{2}(\psi - \varphi)$  und  $\frac{1}{2}(\psi + \varphi)$ , so findet man  $\psi$  und  $\varphi$  und wie oben (4.)  $AD$  und  $BD$ .

Anmerkung 1. Wenn  $\alpha + \beta + \gamma = 2\varrho$ , also das Viereck  $ACBD$  centrisch nach den Ecken ist, so ist  $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0$  und  $\cot(\alpha + \beta + \gamma)$  unendlich groß, also in (3.)  $\cot \varphi$  unbestimmt; desgleichen sind die Winkel am Mittelpunkte des Vierecks  $2\alpha$  und  $2\beta$ : also ist nun für den Halbmesser  $r$ ,  $\frac{1}{2}a = r \sin \alpha$  und

$\frac{1}{2}b = r \sin \beta$ , folglich  $\frac{a}{\sin \alpha} = 2r = \frac{b}{\sin \beta}$ , also  $\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = 1,$





Multipliziert man diese Gleichungen mit einander, so findet man

$$\frac{a z_1 z_2 z_3 \dots z_n}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \dots \sin \varphi} = \frac{z_1 z_2 z_3 \dots z_n b}{\sin \psi \sin \beta_1 \sin \beta_2 \dots \sin \beta_n},$$

oder

$$2. \quad \frac{b \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \dots \sin \alpha_n}{a \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \dots \sin \beta_n} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}.$$

Nun ist

$$\psi + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \dots + \alpha_n + \beta_n + \varphi = 2(n-2)\rho,$$

also

$$3. \quad \psi = 2(n-2)\rho - (\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \dots + \alpha_n + \beta_n) - \gamma - \varphi \text{ und}$$

$$4. \quad \sin \psi = \pm \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \dots + \alpha_n + \beta_n + \gamma + \varphi),$$

je nachdem  $n$  grade oder ungrade ist.

Bezeichnet man

$$5. \quad \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \dots + \alpha_n + \beta_n + \gamma \text{ durch } x,$$

so ist

$$\sin \psi = \mp \sin(x + \varphi) = \mp (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi),$$

also in (2.)

$$\frac{b \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \dots \sin \alpha_n}{a \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \dots \sin \beta_n} = \mp (\sin x \cot \varphi + \cos x) \text{ und}$$

$$6. \quad \cot \varphi = \mp \frac{b \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \dots \sin \alpha_n}{a \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \dots \sin \beta_n \sin x} - \cot x;$$

wodurch man den Winkel  $\varphi$  aus den gegebenen Stücken  $a, b, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n$  findet. Hat man  $\varphi$  gefunden, so erhält man aus (3.)  $\psi$ . Ferner ist alsdann in dem Dreieck  $ACD_1$

$$\frac{a}{\sin \alpha_1} = \frac{AD_1}{\sin(\alpha_1 + \psi)} = \frac{z_1}{\sin \psi}, \text{ also}$$

$$7. \quad AD_1 = \frac{a \sin(\alpha_1 + \psi)}{\sin \alpha_1} \text{ und } z_1 = \frac{a \sin \psi}{\sin \alpha_1};$$

in dem Dreieck  $D_1CD_2$

$$\frac{z_1}{\sin \alpha_2} = \frac{D_1D_2}{\sin(\beta_1 + \alpha_2)} = \frac{z_2}{\sin \beta_1}, \text{ also}$$

$$8. \quad D_1D_2 = \frac{z_1 \sin(\beta_1 + \alpha_2)}{\sin \alpha_2} = \frac{a \sin \psi \sin(\beta_1 + \alpha_2)}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} \text{ und}$$

$$z_2 = \frac{z_1 \sin \beta_1}{\sin \alpha_2} = \frac{a \sin \psi \sin \beta_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2};$$

in dem Dreieck  $D_2CD_3$

$$\frac{z_2}{\sin \alpha_3} = \frac{D_2D_3}{\sin(\beta_2 + \alpha_3)} = \frac{z_3}{\sin \beta_2}, \text{ also}$$

$$9. \quad D_2D_3 = \frac{z_2 \sin(\beta_2 + \alpha_3)}{\sin \alpha_3} = \frac{a \sin \psi \sin \beta_1 \sin(\beta_2 + \alpha_3)}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3} \text{ und}$$

$$z_3 = \frac{z_2 \sin \beta_2}{\sin \alpha_3} = \frac{a \sin \psi \sin \beta_1 \sin \beta_2}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3}$$

u. s. w., welches die übrigen Seiten des Vielecks  $AD_1, D_1D_2, D_2D_3$  etc. giebt.

*Zweite Auflösung.* Wie in der ersten Auflösung findet man die Gleichung (2.). Man setze

$$10. \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \tan \lambda = \frac{b \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \dots \sin \alpha_n}{a \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \dots \sin \beta_n},$$

so ist, wie im vorigen Paragraph (2te Auflösung),

$$11. \tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{\tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\tan \left(\frac{1}{4}\pi + \lambda\right)}.$$

Nun ist nach (3. und 6.)

$$\varphi + \psi = 2(n-2)\rho - \kappa; \text{ also}$$

$$12. \begin{cases} \tan \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = + \cot \frac{1}{2}\kappa, & \text{wenn } n \text{ ungrade, und} \\ \tan \frac{1}{2}(\psi + \varphi) = - \tan \frac{1}{2}\kappa, & \text{wenn } n \text{ grade ist;} \end{cases}$$

und folglich in (11.)

$$13. \tan \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{\cot \frac{1}{2}\kappa}{\tan \left(\frac{1}{4}\pi + \lambda\right)}, \text{ wenn } n \text{ ungrade, und}$$

$$14. \tan \frac{1}{2}(\psi - \varphi) = \frac{\tan \frac{1}{2}\kappa}{\tan \left(\frac{1}{4}\pi + \lambda\right)}, \text{ wenn } n \text{ grade ist.}$$

Aus (5.) findet man  $\kappa$  und aus (10.)  $\lambda$ , also aus (13. u. 14.)  $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$  oder  $\frac{1}{2}(\psi - \varphi)$ . Addirt und subtrahirt man  $\frac{1}{2}(\psi - \varphi)$  und  $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 2(n-2)\rho - \kappa$ , so findet man die gesuchten Winkel  $\varphi$  und  $\psi$  und hierauf die übrigen Seiten der Figur, wie in der ersten Auflösung.

*Anmerkung 1.* Die Aufgabe ist wieder unbestimmt, wenn

15.  $\kappa$  oder  $\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \dots + \alpha_n + \beta_n + \gamma = 2m\rho$  ist, wo  $m$  eine beliebige ganze Zahl seyn kann, die kleiner ist als  $n-2$ . Denn wenn  $\kappa = 2m\rho$ , so ist  $\sin \kappa = 0$ , und folglich in (6.)  $\cot \varphi = \infty - \infty$ , welches für  $\cot \varphi$  keinen bestimmten Werth giebt. In diesem Fall also sind mit den nemlichen gegebenen Stücken unzählige verschiedene Vielecke möglich.

*Anmerkung 2.* Wenn man Tafeln hat, welche nur die Logarithmen goniometrischer Linien, nicht die Linien selbst enthalten, so ist die zweite Auflösung etwas vortheilhafter; sonst ist die erste besser.

*Zusatz.* Wenn in (15.)  $\kappa = 2m\rho$ , so ist  $\frac{1}{2}\kappa = m\rho$ , also

$$16. \begin{cases} \tan \frac{1}{2}\kappa = 0, & \text{wenn } m \text{ grade und} \\ \tan \frac{1}{2}\kappa = \infty, & \text{wenn } m \text{ ungrade;} \\ \cot \frac{1}{2}\kappa = 0, & \text{wenn } m \text{ ungrade und} \\ \cot \frac{1}{2}\kappa = \infty, & \text{wenn } m \text{ grade ist.} \end{cases}$$

In keinen dieser Fälle aber darf  $\tan \frac{\pi}{2}(\varphi - \psi)$  oder  $\tan \frac{\pi}{2}(\psi - \varphi)$  (13. und 14.) einen bestimmten Werth haben, weil unzählige verschiedene Vielecke mit den nemlichen gegebenen Stücken möglich sind. Also muß der Divisor

$$\begin{aligned} \tan \left( \frac{\pi}{4} \pi + \lambda \right) &= 0 \text{ seyn, wenn } m \text{ ungrade und } n \text{ un-} \\ \tan \left( \frac{\pi}{4} \pi + \lambda \right) &= \infty, \text{ wenn } m \text{ grade. } \quad \left. \vphantom{\tan \left( \frac{\pi}{4} \pi + \lambda \right)} \right\} \text{ grade ist;} \\ \tan \left( \frac{\pi}{4} \pi + \lambda \right) &= 0, \text{ wenn } m \text{ grade und } n \text{ grade} \\ \tan \left( \frac{\pi}{4} \pi + \lambda \right) &= \infty, \text{ wenn } m \text{ ungrade } \quad \left. \vphantom{\tan \left( \frac{\pi}{4} \pi + \lambda \right)} \right\} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Es muß also

$$\lambda = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \text{ und folglich } \tan \lambda = \pm 1, \text{ also zu Folge (10.)}$$

$$\frac{b \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_n}{a \sin \beta_1 \sin \beta_2 \dots \sin \beta_n} = \pm 1, \text{ oder}$$

$$17. \quad b \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_n = \pm a \sin \beta_1 \sin \beta_2 \dots \sin \beta_n$$

seyn, sobald

$$18. \quad \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \dots + \alpha_n + \beta_n + \gamma = 2m\pi$$

ist. Dieser Satz gilt für jedes beliebige Vieleck.

## 382.

*Anmerkung.* Es giebt eine große Menge polygonometrischer Aufgaben, von der Art wie in den beiden vorigen Paragraphen. Der Raum gestattet aber nicht dabei länger zu verweilen. Man findet darüber mehreres Interessante in Lamberts Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik, Berlin, 1792; in: Lexell, de resol. polyg. rect.; in den Petersburger Commentarien; in: Mascheroni, problèmes pour les arpenteurs, Paris 1803; in: Carnot, géométrie de position; in: Meyer Hirsch, geometrische Aufgaben, Berlin 1806; in den Annales des mathem. von Gergonne; in den Abhandlungen von Däsel, Puissant, Brianchon und Andern.

## 383.

*Erläuterung.* Nächst der Aufgabe, aus gegebenen bestimmenden Stücken einer Figur die fehlenden Stücke zu finden, kommt besonders diejenige häufig vor: aus den gegebenen bestimmenden Stücken den Inhalt der Figur zu finden.

Nimmt man blos Seiten und Winkel der Figur zu bestimmenden Stücken, so sind die in (§. 371.) aufgezählten zehn Fälle bestimmender Stücke möglich. der Inhalt der Figur muß also gefunden werden können:

aus den Seiten und Winkeln der Figur

I. weniger drei Winkel, welche

- 1) entweder an einander liegen, oder
- 2) zwei an einander, einer abgesondert, oder
- 3) alle drei getrennt;

II. weniger zwei Winkel und einer Seite, und zwar

- 4) die Winkel an einander, die Seite dazwischen;
- 5) die Winkel an einander, die Seite an dem einen Winkel;
- 6) die Winkel an einander, die Seite abgesondert;
- 7) die Winkel getrennt, die Seite an dem einen Winkel;
- 8) die Winkel getrennt, die Seite abgesondert;

III. weniger zwei Seiten, welche

- 9) an einander liegen, oder
- 10) von einander abgesondert sind.

Man findet den Inhalt in diesen zehn Fällen, und zwar in der Ordnung, wie sie sich einer auf den andern beziehen, wie folgt.

384.

**Aufgabe 1.** (§. 383. 4ter Fall) In dem  $n$  Eck  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  (Fig. 178.) sind die Winkel und Seiten bis auf die beiden an einander liegenden Winkel  $\gamma_n$  und  $\gamma_1$ , und die dazwischen liegende Seite  $c_1$  gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.

**Auflösung.**  $\alpha$ ) In dem Viereck  $C_2 C_3 C_n C_1$  ist, wenn man die Seite  $C_2 C_3$  zur Grundlinie nimmt, nach (§. 373. 1.)

$$1. \quad c_3 \sin(c_3 c_2) + v_4 \sin(v_4 c_2) + c_1 \sin(c_1 c_2) = 0$$

und nach (§. 373. 3.) ist der Winkel

$$2. \quad (c_1 c_2) = (c_3 c_2) + (v_4 c_3) + (c_1 v_4) - 4\varrho.$$

Multipliziert man die Gleichung (1.) mit  $c_2$ , so findet man

$$3. \quad c_2 c_3 \sin(c_3 c_2) + c_2 v_4 \sin(v_4 c_2) + c_2 c_1 \sin(c_1 c_2) = 0.$$

Nun ist der Inhalt des Vierecks  $C_2 C_3 C_n C_1$ , welcher mit  $F_{2,4}$  bezeichnet werden mag, gleich der Summe des Inhalts der Dreiecke  $C_2 C_3 C_n$  und  $C_n C_1 C_2$ . Also ist zu Folge (§. 364. I.)

$$4. \quad 2F_{2,4} = c_3 v_4 \sin(v_4 c_3) + c_2 c_1 \sin(c_2 c_1),$$

wo der Winkel

$$5. \quad (c_2 c_1) = 4\varrho - ((c_3 c_2) + (v_4 c_3) + (c_1 v_4))$$

ist.

Aus (2. und 5.) folgt  $(c_1 c_2) = -(c_2 c_1)$  und also  $\sin(c_1 c_2) = -\sin(c_2 c_1)$ .

Die Gleichungen (3. und 4.) sind daher

$$6. \quad c_2 c_3 \sin(c_3 c_2) + c_3 v_4 \sin(v_4 c_2) - c_2 c_1 \sin(c_2 c_1) = 0.$$

$$7. \quad 2F_{2,4} = c_3 v_4 \sin(v_4 c_3) + c_2 c_1 \sin(c_2 c_1).$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so findet man

$$8. \quad 2F_{2,4} = c_3 c_2 \sin(c_3 c_2) + v_4 c_2 \sin(v_4 c_2) + v_4 c_3 \sin(v_4 c_3),$$

das heißt: der zwiefache Inhalt des Vierecks  $C_2 C_3 C_n C_1$  ist gleich der Summe der Producte zu zweien, von drei Seiten in die Sinus der Winkel, welche sie einschließen.

$\beta$ ) In dem Fünfeck  $C_2 C_3 C_4 C_n C_1$  ist nach (§. 373. 1.), wenn man wieder die Seite  $c_2$  zur Grundlinie nimmt,

$$9. \quad c_3 \sin(c_3 c_2) + c_4 \sin(c_4 c_2) + v_5 \sin(v_5 c_2) + c_1 \sin(c_1 c_2) = 0$$

und nach (§. 373. 5.) ist der Winkel

$$10. \quad (c_1 c_2) = (c_3 c_2) + (c_4 c_3) + (v_5 c_4) + (c_1 v_5) - 6\rho.$$

Multiplicirt man die Gleichung (9.) mit  $c_2$ , so erhält man

$$11. \quad c_2 c_3 \sin(c_3 c_2) + c_2 c_4 \sin(c_4 c_2) + c_2 v_5 \sin(v_5 c_2) + c_2 c_1 \sin(c_1 c_2) = 0.$$

Nun ist der Inhalt des Fünfecks  $C_2 C_3 C_4 C_n C_1$ , welcher durch  $F_{2,5}$  bezeichnet werden mag, gleich der Summe des Inhalts des Vierecks  $C_2 C_3 C_4 C_n$  und des Dreiecks  $C_2 C_3 C_1$ . Der Inhalt des Vierecks ist nach der Regel ( $\beta$ .) gleich.

$$c_4 c_3 \sin(c_4 c_3) + v_5 c_3 \sin(v_5 c_3) + v_5 c_4 \sin(v_5 c_4),$$

der Inhalt des Dreiecks ist  $c_2 c_1 \sin(c_2 c_1)$ . Also ist

$$12. \quad 2F_{2,5} = c_4 c_3 \sin(c_4 c_3) + v_5 c_3 \sin(v_5 c_3) + v_5 c_4 \sin(v_5 c_4) + c_2 c_1 \sin(c_2 c_1),$$

wo der Winkel

$$13. \quad (c_2 c_1) = 6\rho - ((c_3 c_2) + (c_4 c_3) + (v_5 c_4) + (c_1 v_5))$$

ist. Aus (10. und 13.) folgt  $(c_1 c_2) = -(c_2 c_1)$  und also  $\sin(c_1 c_2) = -\sin(c_2 c_1)$ . Die Gleichungen (11. und 12.) sind daher

$$14. \quad c_2 c_3 \sin(c_3 c_2) + c_2 c_4 \sin(c_4 c_2) + c_2 v_5 \sin(v_5 c_2) - c_2 c_1 \sin(c_2 c_1) = 0 \text{ und}$$

$$15. \quad 2F_{2,5} = c_4 c_3 \sin(c_4 c_3) + v_5 c_3 \sin(v_5 c_3) + v_5 c_4 \sin(v_5 c_4) + c_2 c_1 \sin(c_2 c_1).$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so findet man

$$16. \quad 2F_{2,5} = c_3 c_2 \sin(c_3 c_2) + c_4 c_2 \sin(c_4 c_2) + v_5 c_2 \sin(v_5 c_2) + c_4 c_3 \sin(c_4 c_3) + v_5 c_3 \sin(v_5 c_3) + v_5 c_4 \sin(v_5 c_4)$$

das heißt: der zwiefache Inhalt des Fünfecks  $C_1 C_2 C_3 C_{n-1} C_n$  ist gleich der Summe der Producte je zweier von vier Seiten in die Sinus der Winkel, die sie einschließen.

γ) Es ist leicht zu sehen, daß man, wenn man so fortfährt, nemlich allemal den Inhalt des Dreiecks  $C_2 C_n C_1$  zu dem Reste der Figur addirt, eine ähnliche Regel für das Sechseck, Siebeneck u. s. w. findet.

Es ist also allgemein für das  $n$  Eck  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$

$$17. \quad 2F_{2,n} = c_1 c_2 \sin(c_3 c_2) + c_2 c_3 \sin(c_4 c_3) \dots + c_n c_2 \sin(c_1 c_n) \\ + c_4 c_3 \sin(c_4 c_3) + c_5 c_3 \sin(c_5 c_3) \dots + c_n c_3 \sin(c_n c_3) \\ + c_5 c_4 \sin(c_5 c_4) + c_6 c_4 \sin(c_6 c_4) \dots + c_n c_4 \sin(c_n c_4) \\ \dots \dots \dots \\ + c_n c_{n-1} \sin(c_n c_{n-1}),$$

das heißt: der zwiefache Inhalt einer beliebigen Figur von  $n$  Seiten, durch  $n-1$  Seiten und die von denselben eingeschlossenen Winkel ausgedrückt, ist gleich der Summe der Producte der  $n-1$  Seiten zu zweien, in die Sinus der Winkel, welche je zwei Seiten einschließen.

δ) Da

$$18. \quad \begin{cases} c_3 \sin(c_3 c_2) + c_4 \sin(c_4 c_2) \dots + c_n \sin(c_n c_2) = p_{3,2} \\ c_4 \sin(c_4 c_3) + c_5 \sin(c_5 c_3) \dots + c_n \sin(c_n c_3) = p_{4,3} \\ c_5 \sin(c_5 c_4) + c_6 \sin(c_6 c_4) \dots + c_n \sin(c_n c_4) = p_{5,4} \\ \text{etc. (§. 373. III. 4.),} \end{cases}$$

so kann man auch den Inhalt  $F_{2,n}$  des Vielecks wie folgt ausdrücken:

$$19. \quad 2F_{2,n} = c_2 p_{3,2} + c_3 p_{4,3} + c_4 p_{5,4} \dots + c_{n-1} p_{n,n-1}$$

ε) Drückt man nach (§. 373. 3.) die Winkel  $(c_3 c_2)$ ,  $(c_4 c_3) \dots (c_n c_{n-1})$  etc. durch die Winkel  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$  zwischen je zwei auf einander folgenden Seiten aus, so findet man

$$20. \quad 2F_{2,n} = c_3 c_2 \sin \gamma_2 - c_4 c_2 \sin(\gamma_2 + \gamma_3) + c_5 c_2 \sin(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \dots \\ \dots + c_n c_2 \sin(\gamma_2 + \gamma_3 \dots + \gamma_{n-1}) \\ + c_4 c_3 \sin \gamma_3 - c_5 c_3 \sin(\gamma_3 + \gamma_4) + c_6 c_3 \sin(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5) \dots \\ \dots + c_n c_3 \sin(\gamma_3 + \gamma_4 \dots + \gamma_{n-1}) \\ + c_5 c_4 \sin \gamma_4 - c_6 c_4 \sin(\gamma_4 + \gamma_5) \dots \\ \dots + c_n c_4 \sin(\gamma_4 + \gamma_5 \dots + \gamma_{n-1}) \\ \dots \dots \dots \\ + c_n c_{n-1} \sin \gamma_{n-1}.$$

**Aufgabe 2.** (§. 383. 1ster Fall.) In dem  $n$  Eck  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  (Fig. 178.) sind die Winkel und Seiten bis auf drei an einander liegende Winkel  $\gamma_n, \gamma_1$  und  $\gamma_2$  gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.

**Auflösung.** α) Man findet aus den gegebenen Seiten  $c_3, c_4, c_5 \dots c_2$  und den Winkeln  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

$\gamma, \dots, \gamma_{n-1}$ , die sie einschließen, den Inhalt der Figur  $C_2 C_3 C_4 \dots C_n$  nach der ersten Aufgabe, nemlich:

$$\begin{aligned} 21. \quad 2F_{3,n} = & c_4 c_3 \sin(c_4 c_3) + c_5 c_3 \sin(c_5 c_3) \dots + c_n c_3 \sin(c_n c_3) \\ & + c_5 c_4 \sin(c_5 c_4) + c_6 c_4 \sin(c_6 c_4) \dots + c_n c_4 \sin(c_n c_4) \\ & + c_6 c_5 \sin(c_6 c_5) + c_7 c_5 \sin(c_7 c_5) \dots + c_n c_5 \sin(c_n c_5) \\ & \dots \\ & + c_n c_{n-1} \sin(c_n c_{n-1}). \end{aligned}$$

Es fehlt an dem Inhalt der ganzen Figur  $F_{2,n}$  nur noch der Inhalt des Dreiecks  $C_1 C_2 C_n$ . Für dieses Dreieck findet man die Seite  $C_2 C_n = z_{3,n}$ , nach (§. 376. 1.), aus den gegebenen Seiten und Winkeln des Vielecks, nemlich:

$$\begin{aligned} 22. \quad z_{3,n}^2 = & c_2^2 + c_n^2 + c_3^2 \dots + c_{n-1}^2 \\ & - 2c_4 c_3 \cos(c_4 c_3) - 2c_5 c_3 \cos(c_5 c_3) \dots - 2c_n c_3 \cos(c_n c_3) \\ & - 2c_5 c_4 \cos(c_5 c_4) - 2c_6 c_4 \cos(c_6 c_4) \dots - 2c_n c_4 \cos(c_n c_4) \\ & - 2c_6 c_5 \cos(c_6 c_5) - 2c_7 c_5 \cos(c_7 c_5) \dots - 2c_n c_5 \cos(c_n c_5) \\ & \dots \\ & - 2c_n c_{n-1} \cos(c_n c_{n-1}). \end{aligned}$$

Da nun die andern beiden Seiten  $c_1$  und  $c_2$  des Dreiecks gegeben sind, so kennt man alle drei Seiten desselben und kann folglich seinen Inhalt nach (§. 174.) berechnen. Addirt man den Inhalt dieses Dreiecks  $C_1 C_2 C_n$  zu  $F_{3,n}$  (19.), so erhält man den Inhalt der ganzen Figur aus den Seiten und Winkeln, weniger den drei an einander liegenden Winkeln  $\gamma_n, \gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

$\beta$ ) Man kann auch erst nach (§. 376. 3.) einen der äußern Winkel von den fehlenden dreien, z. B. den Winkel  $\gamma_2$  suchen. Alsdann sind alle Winkel, bis auf die an einander liegenden beiden,  $\gamma_1$  und  $\gamma_n$  bekannt: man findet folglich den Inhalt der ganzen Figur  $F_{2,n}$  auf einmal; nach der ersten Aufgabe.

**Aufgabe 3.** (§. 383. 2ter Fall.) In dem  $n$  Eck  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  (Fig. 178.) sind die Winkel und Seiten, bis auf die beiden an einander liegenden Winkel  $\gamma_n$  und  $\gamma_1$  und einen dritten, davon abgesonderten Winkel  $\gamma_m$ , gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.

**Auflösung.**  $\alpha$ ) Gesetzt der dritte fehlende Winkel  $\gamma_m$  sey der Winkel  $\gamma_3$ , so sind in der Figur  $C_1 C_2 C_3 C_4 C_5$  die Seiten  $c_2, c_3, c_4, c_5$ , nebst den Winkeln  $\gamma_2, \gamma_1$  und  $\gamma_4$ , die sie einschließen, und in der Figur  $C_5 C_6 C_7 C_n$  die Seiten  $c_6, c_7$  und  $c_n$ , nebst den Winkeln  $\gamma_6$  und  $\gamma_7$ , die sie einschließen, gegeben. Also



läßt sich der Inhalt dieser beiden Figuren nach der ersten Aufgabe finden. Er ist

$$23. F_{2,m} + F_{m,n}.$$

An der ganzen Figur fehlt nur noch das Dreieck  $C_1 C_m C_n$ . Für dieses findet man aus (§. 380. 1.) die beiden Seiten

$$24. C_1 C_m = z_{2,m} \text{ und } C_m C_n = z_{m,n}.$$

Die dritte Seite  $c_1$  ist gegeben; also läßt sich der Inhalt des Dreiecks nach (§. 174.) finden. Addirt man denselben zu  $F_{2,m} + F_{m,n}$ , so erhält man den verlangten Inhalt der ganzen Figur, aus den gegebenen Stücken.

β) Man kann auch erst nach (§. 376. 5.) den getrennten Winkel  $\gamma_m$  suchen. Alsdann sind alle Winkel, bis auf die an einander liegenden beiden  $\gamma_1$  und  $\gamma_n$ , bekannt, und man findet folglich den Inhalt der ganzen Figur  $F_{2,n}$  auf einmal; nach der ersten Aufgabe.

**Aufgabe 4.** (§. 383. 3ter Fall.) In dem  $n$  Eck  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  (Fig. 178.) sind die Winkel und Seiten bis auf die drei von einander getrennten Winkel  $\gamma_p$ ,  $\gamma_m$  und  $\gamma_n$  gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.

**Auflösung.** α) Gesetzt der fehlende Winkel  $\gamma_p$  sey der Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_m$  der Winkel  $\gamma_5$ , so sind in der Figur  $C_n C_1 C_2 C_3$  die Seiten  $c_1, c_2, c_3$ , nebst den Winkeln  $\gamma_1, \gamma_2$ , welche sie einschließen, in der Figur  $C_1 C_6 C_7 C_n$  die Seiten  $c_6, c_7, c_n$ , nebst den Winkeln  $\gamma_6$  und  $\gamma_7$ , welche sie einschließen, und in der Figur  $C_3 C_4 C_5$  die Seiten  $c_4, c_5$ , nebst dem Winkel  $\gamma_4$ , welchen sie einschließen, gegeben. Also läßt sich der Inhalt dieser drei Figuren nach der ersten Aufgabe finden. Er ist

$$25. F_{1,p} + F_{p+1,m} + F_{m+1,n}.$$

Nun fehlt an dem Inhalt der ganzen Figur noch der Inhalt des Dreiecks  $C_3 C_5 C_n$  oder  $C_p C_m C_n$ . Die drei Seiten dieses Dreiecks findet man nach (§. 376. I.) aus den gegebenen Stücken der Figur, nämlich

$$26. c_n c_p = z_{1,p}, C_p C_m = z_{p+1,m} \text{ und } C_m c_n = z_{m+1,n}.$$

Man kann also den Inhalt des fehlenden Dreiecks nach (§. 174.) aus seinen drei Seiten berechnen. Addirt man denselben zu (25.), so erhält man den Inhalt der ganzen Figur aus den gegebenen Stücken.

Man kann auch erst nach (§. 376. 7.) einen der drei fehlenden Winkel suchen, z. B. den Winkel  $\gamma_p$ . Alsdann fehlen nur noch die beiden Winkel  $\gamma_m$  und  $\gamma_n$ , und der Inhalt ist nach der ersten Aufgabe:

$$27. F_{1,p} + F_{p+1,n}.$$

γ) Oder man kann nach (§. 376. 7.) erst zwei der fehlenden Winkel, z. B. die Winkel  $\gamma_p$  und  $\gamma_m$ , suchen.

Alsdann findet man den Inhalt der ganzen Figur  $F_{2,n}$  nach der ersten Aufgabe, auf einmal.

**Aufgabe 5.** (§. 383. 5ter Fall.) In dem  $n$  Eck  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  (Fig. 172.) sind die Winkel und die Seiten bis auf die beiden an einander liegenden Winkel  $\gamma_n$  und  $\gamma_1$ , und bis auf die an dem einen dieser Winkel liegende Seite  $c_2$  gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.

**Auflösung.**  $\alpha$ ) Man suche nach (§. 376. 8.) die fehlende Seite  $c_2$ , so sind alle Seiten, welche die gegebenen Winkel einschließen, bekannt, und man findet also den Inhalt der Figur  $F_{2,n}$  nach der ersten Aufgabe.

$\beta$ ) Oder man suche nach (§. 376. 10.) den fehlenden Winkel  $\gamma_n$ . Alsdann fehlt nur noch die Seite  $c_2$  und der Winkel  $\gamma_1$  an derselben. Also findet man den Inhalt der Figur  $F_{2,n}$  nunmehr nach der ersten Aufgabe.

**Aufgabe 6.** (§. 383. 6ter Fall.) In dem  $n$  Eck  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  (Fig. 178.) sind die Winkel und die Seiten bis auf die beiden an einander liegenden Winkel  $\gamma_n$  und  $\gamma_1$  und eine davon getrennte Seite  $c_m$  gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.

**Auflösung.** Man suche nach (§. 376. 12.) die fehlende getrennte Seite, so sind alsdann alle Seiten, welche die gegebenen Winkel einschließen, bekannt. Also findet man nunmehr den Inhalt der Figur  $F_{2,n}$  nach der ersten Aufgabe.

**Aufgabe 7.** (§. 383. 7ter Fall.) In dem  $n$  Eck  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  (Fig. 178.) sind die Winkel und die Seiten bis auf die beiden von einander getrennten Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_m$  und die eine Seite  $c_1$  an dem einen Winkel gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.

**Auflösung.**  $\alpha$ ) Der fehlende Winkel  $\gamma_m$  sey z. B. der Winkel  $\gamma_5$ , so ist der Inhalt der Figur  $C_1 C_2 C_3 \dots C_5$  nach der ersten Aufgabe gleich  $F_{2,5}$  und der Inhalt der Figur  $C_5 C_6 \dots C_n$  gleich  $F_{m+1,n}$ , ihre Summe also

$$28. \quad F_{2,5} + F_{m+1,n}.$$

An der ganzen Figur fehlt nur noch das Dreieck  $C_1 C_m C_n$ . Man suche in der Figur  $C_5 C_6 \dots C_n$ , deren Seiten und Winkel bis auf die Seite  $C_5 C_n$  und die beiden an derselben liegenden Winkel bekannt sind, nach (§. 376. 2.), den Winkel  $C_5 C_n C_1$ , so findet man, wenn man diesen Winkel von  $\gamma_n$  abzieht, den Dreiecks-Winkel  $C_5 C_n C_1$ .

Ferner ist in dem Dreieck  $C_1 C_m C_n$  die Seite  $C_m C_1 = z_{2,5}$  und die Seite  $C_m C_n = z_{m+1,n}$ . Also kennt man die

beiden Seiten  $C_m C_r$  und  $C_m C_n$  und den Winkel  $C_m C_n C_r$  dieses Dreiecks, und kann also nach (§. 364. II.) seinen Inhalt finden. Denselben zu (28.) gethan, giebt den Inhalt der ganzen Figur.

β) Oder man sucht nach (§. 376. 13.) erst die fehlende Seite  $c_r$  aus den gegebenen Stücken. Alsdann sind alle Seiten, welche gegebene Winkel einschließen, bekannt; folglich ist alsdann der Inhalt, nach der ersten Aufgabe,

$$29. F_{2,n} + F_{m+1,n,1}.$$

γ) Oder man sucht nach (§. 376. 15.) erst den getrennten Winkel  $\gamma_m$  aus den gegebenen Stücken. Alsdann sind alle Winkel, welche von den gegebenen Seiten eingeschlossen werden, bekannt. Also findet man alsdann den Inhalt der ganzen Figur  $F_{2,n}$  nach der ersten Aufgabe auf einmal.

*Aufgabe 8.* (§. 383. 8ter Fall.) In dem  $n$  Eck  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  (Fig. 178.) sind die Winkel und Seiten bis auf die beiden von einander getrennten Winkel  $\gamma_r$  und  $\gamma_m$  und eine abgesonderte Seite  $c_p$  gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.

*Auflösung.* Man suche erst nach (§. 376. 16.) den einen fehlenden Winkel. Zieht man ihn und sämtliche gegebene Winkel von  $(n-2)2\rho$  ab, so findet man auch den andern fehlenden Winkel; also sind alsdann alle Winkel, welche von den gegebenen Seiten eingeschlossen werden, bekannt. Folglich findet man alsdann den Inhalt der Figur nach der ersten Aufgabe.

*Aufgabe 9.* (§. 383. 9ter Fall.) In dem  $n$  Eck  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  (Fig. 178.) sind die Winkel und Seiten bis auf die beiden an einander liegenden Seiten  $c_1$  und  $c_2$  gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.

*Auflösung.* Man suche die eine fehlende Seite, z. B.  $c_2$  nach (§. 376. 18.), so fehlt nur noch die eine Seite  $c_1$ . Man findet also den Inhalt  $F_{2,n}$  nach der ersten Aufgabe.

Da nach (§. 376. 18. Gleichung 91.)

$$30. c_2 = p_{3,n} \cot \gamma_1 + q_{3,n},$$

und nach der ersten Aufgabe (Gleichung 19.)

31.  $F_{2,n} = c_2 p_{3,n} + c_3 p_{4,n} + c_4 p_{5,n} \dots + c_{n-1} p_{n,n}$ ,  
so erhält man, wenn man den Werth von  $c_2$  aus (30.) in (31.) setzt,

32.  $F_{2,n} = p_{3,n}^2 \cot \gamma_1 + p_{3,n} q_{3,n} + c_3 p_{4,n} + c_4 p_{5,n} \dots + c_{n-1} p_{n,n}$ ,  
welches den Inhalt des Vielecks ohne Hilfe der beiden Seiten  $c_1$  und  $c_2$  giebt.

*Aufgabe 10.* (§. 383. 10ter Fall.) In dem  $n$  Eck (Fig. 178.) sind die Winkel und die Seiten bis auf die beiden von einander getrennten Seiten  $c_n$  und  $c_m$  gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.

*Auflösung.* Man suche die eine fehlende Seite  $c_m$  nach (§. 376. 19.), so fehlt nur noch die eine Seite  $c_n$ . Man findet also den Inhalt der Figur  $F_{n,n}$  nach der ersten Aufgabe.

## 385.

*Anmerkung.* Im Viereck, der einfachsten Figur nächst dem Dreiecke, finden von den 10 Aufgaben für das beliebige Vieleck (§. 383. 384.) die 2te, 3te und 8te nicht Statt, weil drei Winkel im Viereck nicht von einander und eine Seite von zwei abgesonderten Winkeln nicht getrennt seyn können. Es bleiben also für das Viereck nur folgende Aufgaben.

Den Inhalt eines Vierecks zu finden:

aus den Seiten und Winkeln

I. 1) weniger drei Winkel;  
II. weniger zwei Winkel und eine Seite, und zwar

- 2) die Winkel an einander, die Seite dazwischen;
- 3) die Winkel an einander, die Seite an dem einen Winkel;
- 4) die Winkel an einander, die Seite abgesondert;
- 5) die Winkel getrennt, die Seite an dem einen Winkel;

III. weniger zwei Seiten

- 6) an einander, oder
- 7) von einander getrennt.

Die gegebenen Stücke sind die bestimmenden in (§. 76. und 77.)

Wir überlassen dem Leser, wie in (§. 377.), die allgemeinen Ausdrücke auf das Viereck anzuwenden, welches keine Schwierigkeit hat.

## 386.

*Anmerkung.* Die verschiedenen Ausdrücke des Inhalts eines beliebigen Vielecks durch die bestimmenden Stücke enthalten zugleich die Auflösung der verschiedenen Aufgaben: eines der bestimmenden Stücke zu finden, wenn der Inhalt und die übrigen bestimmenden Stücke gegeben sind, deren es, wie leicht zu sehen, eine Menge giebt. Man darf nur jedesmal aus demjenigen Ausdruck des Inhalts durch die

gegebenen und das eine fehlende bestimmende Stück, dieses letztere entwickeln.

Diese Aufgaben sind diejenigen von der sogenannten *Theilung der Figuren*, das heißt die Aufgaben: ein Stück von gegebenem Inhalt, von einer gegebenen Figur, unter diesen oder jeden Bedingungen abzuschneiden, oder auch: eine Figur von gegebenem Inhalt zu finden, wenn ihre bestimmenden Stücke, bis auf eines, gegeben sind.

Der Raum gestattet nicht, alle diese Aufgaben der Reihe nach durchzugehen. Es mögen hier nur folgende zwei stehen, welche am häufigsten vorkommen.

## 387.

*Aufgabe 1.* Von einem gegebenen Vielecke, vermittelst einer graden Linie, deren Lage gegen die Seiten des Vielecks gegeben ist, ein Stück von gegebenem Inhalte abzuschneiden.

*Auflösung.* Das gegebene Vieleck sey  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n$  (Fig. 179.). Der gegebene Inhalt des abzuschneidenden Stücks sey  $F$ . Die gesuchte Schnittlinie sey  $C_1 C_2$ , so daß der Inhalt des Vielecks  $C_2 C_3 C_4 \dots C_n C_1 = F$  ist. Auch der Winkel  $C_1 C_2 C_3$  oder  $C_2 C_1 C_3$  ist alsdann gegeben, weil nach der Voraussetzung die Lage der Schnittlinie gegen die Seiten des Vielecks bekannt ist.

In so fern man nun etwa noch nicht weiß, durch welche Seiten des ganzen Vielecks die Schnittlinie gehen wird, berechne man zuvor die Inhalte der verschiedenen Vielecke  $C_1 C_2 D_1$ ,  $C_2 C_3 C_4 D_2$ ,  $C_3 C_4 C_5 C_6 D_3$ , etc., welche die, mit der gesuchten Schnittlinie parallel, durch die verschiedenen Ecken der gegebenen Figur gehenden graden Linien  $C_1 D_1$ ,  $C_2 D_2$ ,  $C_3 D_3$ , etc. von der ganzen Figur abschneiden, welches nach der 9ten Aufgabe in (§. 384.) geschehen kann, weil in allen den abgeschnittenen Vielecken die sämtlichen Winkel und die Seiten, bis auf die beiden zusammenstoßenden Seiten  $C_1 D_1$  und  $D_1 C_2$ ,  $C_2 D_2$  und  $D_2 C_3$ ,  $C_3 D_3$  und  $D_3 C_4$  bekannt sind. Ist nicht etwa eines dieser abgeschnittenen Vielecke grade selbst so groß als das Stück, welches von der Figur abgeschnitten werden soll, so liegt nothwendig die gesuchte Schnittlinie  $C_1 C_2$  zwischen denjenigen auf einander folgenden zwei Parallelen, z. B.  $C_1 D_1$  und  $C_2 D_2$ , welche eine kleinere und eine größere Fläche, als abgeschnitten werden soll, von der gegebenen Figur abtheilen. Man erfährt also nunmehr, durch

welche Seiten der gegebenen Figur die gesuchte Schnittlinie geht. Es kommt nur noch darauf an, eines der fehlenden bestimmenden Stücke des abgeschnittenen Vielecks, von der gegebenen Grösse,  $C_2 C_3, C_4 \dots C_7 C_1$ , zu finden. In diesem Vieleck sind die Seiten und Winkel bis auf die drei Seiten  $C_2 C_3, C_3 C_4$  und  $C_7 C_1$  bekannt, und ausserdem der Inhalt. Drückt man also diesen Inhalt durch die bestimmenden Stücke, und etwa ohne Hülfe der beiden zusammenstossenden Seiten  $C_2 C_3$  und  $C_7 C_1$ , aber mit Hülfe der dritten fehlenden Seite  $C_4 C_5$  aus, welches nach der 9ten Aufgabe (§. 384.), und zwar durch die dortige Gleichung (32.), geschehen kann, so erhält man, weil der Inhalt gegeben ist, eine Gleichung, in welcher Alles gegeben ist, bis auf die eine Seite  $C_2 C_3$ . Diese Seite  $C_2 C_3$  darf man also dann nur aus dieser Gleichung entwickeln. Ist sie gefunden, so ist es die gesuchte Schnittlinie  $C_2 C_3$  selbst, und die Aufgabe ist gelöst; denn alsdann kennt man in dem abgeschnittenen Vieleck  $C_2 C_3, C_4 \dots C_7 C_1$  alle Seiten und Winkel, bis auf die zwei zusammenstossenden Seiten  $C_2 C_3$  und  $C_7 C_1$ , wodurch das Vieleck vollkommen bestimmt wird (§. 95. IX.).

*Aufgabe 2. Von einem gegebenen Vieleck, vermittelst zweier, in einem gegebenen Punct, unter einem gegebenen Winkel zusammenstossender grader Linien eine Fläche von gegebenem Inhalt abzuschneiden.*

*Auflösung.*  $\alpha$ ) Der Punct, in welchen die gesuchten Schnittlinien  $PC_1$  und  $PC_2$  (Fig. 179.), unter einem gegebenen Winkel  $C_1 P C_2 = \lambda$  zusammenstossen, sey  $P$ . Sind nun z. B.  $C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 PC_1$  und  $C_{12} C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8 PC_{12}$  zwei Vielecke, deren erstes kleiner, das zweite grösser ist als die abzuschneidende Fläche  $C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 PC_1$ , während zugleich der Winkel  $C_1 P C_7$  im ersten Vieleck kleiner und der Winkel  $C_{12} P C_8$  im zweiten grösser ist, als der gegebene Winkel  $\lambda$ , so werden die Schnittlinien  $PC_1$  und  $PC_2$  nothwendig zwischen  $PC_1, PC_{12}$  und  $PC_7, PC_8$  liegen, und folglich durch die Seiten  $C_{12} C_3$  und  $C_7 C_8$  gehen.

$\beta$ ) Der Punct  $P$  kann auf verschiedene Weise gegeben seyn. Er sey durch die beiden graden Linien

$$1, PC_1 = a \text{ und } PC_7 = b$$

gegeben, welche ihn, weil die Lage der Eckpunkte  $C_1$  und  $C_7$  des Vielecks gegeben ist, bestimmen. Alsdann sind auch die Winkel

2.  $PC_1C_2 = \alpha$  und  $PC_1C_1 = \beta$  und  $C_2PC_1 = \delta$  bekannt. Nun sey ferner der unbekannte Winkel

3.  $C_1PC_1 = \varphi$ ,  
so ist der Winkel  $C_2PC_2 = \lambda - \delta - \varphi$ , und in dem Dreieck  $C_1PC_2$ ,

$$\frac{b}{\sin(\beta + \varphi)} = \frac{c}{\sin \varphi}$$

in dem Dreieck  $C_1PC_2$

$$\frac{a}{\sin(\alpha + \lambda - \delta - \varphi)} = \frac{c_2}{\sin(\lambda - \delta - \varphi)}$$

Daraus folgt

$$3. \quad b = c_1 \frac{\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi}{\sin \varphi} = c_1 (\sin \beta \cot \varphi + \cos \beta)$$

und

$$a = c_2 \frac{\sin(\alpha + \lambda - \delta) \cos \varphi - \cos(\alpha + \lambda - \delta) \sin \varphi}{\sin(\lambda - \delta) \cos \varphi - \cos(\lambda - \delta) \sin \varphi}, \text{ oder}$$

$$4. \quad a = c_2 \frac{\sin(\alpha + \lambda - \delta) \cot \varphi - \cos(\alpha + \lambda - \delta)}{\sin(\lambda - \delta) \cot \varphi - \cos(\lambda - \delta)}$$

Aus (3.) folgt

$$5. \quad \cot \varphi = \frac{b - c_1 \cos \beta}{c_1 \sin \beta};$$

aus (4.) folgt

$$(a \sin(\lambda - \delta) - c_2 \sin(\alpha + \lambda - \delta)) \cot \varphi = a \cos(\lambda - \delta) - c_2 \cos(\alpha + \lambda - \delta); \text{ also}$$

$$6. \quad \cot \varphi = \frac{a \cos(\lambda - \delta) - c_2 \cos(\alpha + \lambda - \delta)}{a \sin(\lambda - \delta) - c_2 \sin(\alpha + \lambda - \delta)}$$

Setzt man  $\cot \varphi$  in (5. und 6.) gleich, so erhält man

$$\begin{aligned} & (b - c_1 \cos \beta) (a \sin(\lambda - \delta) - c_2 \sin(\alpha + \lambda - \delta)) \\ & = c_1 \sin \beta (a \cos(\lambda - \delta) - c_2 \cos(\alpha + \lambda - \delta)), \text{ oder} \\ & ab \sin(\lambda - \delta) - b c_2 \sin(\alpha + \lambda - \delta) - a c_1 \cos \beta \sin(\lambda - \delta) \\ & \quad + c_1 c_2 \cos \beta \sin(\alpha + \lambda - \delta) \\ & = a c_1 \sin \beta \cos(\lambda - \delta) - c_1 c_2 \sin \beta \cos(\alpha + \lambda - \delta), \text{ oder} \\ & a [b \sin(\lambda - \delta) - c_1 \sin(\beta + \lambda - \delta)] \\ & = c_2 [b \sin(\alpha + \lambda - \delta) - c_1 \sin(\alpha + \beta + \lambda - \delta)]; \text{ also} \end{aligned}$$

$$7. \quad c_2 = a \frac{b \sin(\lambda - \delta) - c_1 \sin(\beta + \lambda - \delta)}{b \sin(\alpha + \lambda - \delta) - c_1 \sin(\alpha + \beta + \lambda - \delta)}$$

Dieses drückt die unbekannte Seite  $c_2$  durch die unbekannte Seite  $c_1$ , übrigens aber durch lauter gegebene Größen aus.

γ) Ferner ist in dem Dreieck  $C_1PC_1$ ,

$$\frac{p}{\sin \beta} = \frac{c_1}{\sin \varphi}$$



und in dem Dreiecke  $C_1 P C_2$  ...

$$\frac{q}{\sin \alpha} = \frac{c_1}{\sin(\lambda - \delta - \varphi)} \quad \text{woraus}$$

$$8. \quad p = c_1 \frac{\sin \beta}{\sin \varphi} \quad \text{und} \quad q = c_1 \frac{\sin \alpha}{\sin(\lambda - \delta - \varphi)}$$

folgt. Da man zu Folge (5. u. 7.)  $\varphi$  und  $c_1$  durch  $a$  und bekannte Gröſſen ausdrücken kann, so kann man auch  $p$  und  $q$  dadurch ausdrücken. Folglich können alle vier fehlenden Seiten  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $p$  und  $q$  durch die eine fehlende Seite  $c_1$  allein, und durch bekannte Gröſſen ausgedrückt werden.

8) Sucht man nun nach der zweiten Aufgabe in (§. 384.) den Inhalt der abzuschneidenden Figur  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n P$  aus den Seiten und Winkeln, mit Ausnahme der drei Winkel  $C_1 C_2 P$ ,  $C_2 P C_3$  und  $P C_3 C_4$ , so findet man, weil der Inhalt gegeben ist, eine Gleichung, in welcher alles bekannt ist, bis auf die Seite  $c_1$ , die man also daraus finden kann und dann weiter aus (5. und 7.) auch den Winkel  $\varphi$  und die Seite  $c_2$ , so daß dadurch die Aufgabe gelöst ist.

9) Kürzer noch ist es, wenn man erst den Inhalt der Figur  $C_1 C_2 C_3 \dots C_n P$  berechnet und denselben von der abzuschneidenden Fläche  $F$  abzieht. Der Rest, welcher durch  $G$  bezeichnet werden mag, ist alsdann die Fläche der beiden Dreiecke  $C_1 P C_2$  und  $C_2 P C_3$ . Diese Fläche ist

$$9. \quad G = a c_1 \sin \alpha + b c_1 \sin \beta.$$

Setzt man hierin den Ausdruck von  $c_1$  durch  $b$  (7.), so findet man

$$10. \quad G = a^2 \sin \alpha \frac{b \sin(\lambda - \delta) - c_1 \sin(\beta + \lambda - \delta)}{b \sin(\alpha + \lambda - \delta) - c_1 \sin(\alpha + \beta + \lambda - \delta)} + b c_1 \sin \beta.$$

Entwickelt man aus dieser Gleichung die Seite  $c_1$ , so ist die Aufgabe ebenfalls gelöst.

*Anm. 1.* Die Aufgabe: von einem gegebenen Vieleck, mittelst einer graden Linie, die durch einen gegebenen Punkt geht, einen bestimmten Theil abzuschneiden, ist nur ein einzelner Fall der zweiten Aufgabe des gegenwärtigen Paragraphs, nemlich der Fall, wenn die beiden Schnittlinien,  $C_1 P$  und  $C_2 P$  in einer und derselben graden Linie liegen und also der Winkel  $\lambda$  gleich  $2\varphi$  ist. Es ist für diesen Fall in (10.)

$$11. \quad G = a^2 \sin \alpha \frac{c_1 \sin(\lambda - \delta) + b \sin \delta}{c_1 \sin(\alpha + \beta - \delta) - b \sin(\alpha - \delta)} + b c_1 \sin \beta.$$



*Anm. 2.* Die Aufgabe: von einem gegebenen Viereck, vermittelt einer graden Linie durch einen gegebenen Punkt, z. B.  $C_1$ , der in einer Seite des Vierecks liegt, einen bestimmten Theil abzuschneiden, ist ferner nur ein einzelner Fall von dem vorigen, nemlich der Fall, wenn  $\alpha = c$ , und  $\alpha = 0$ , oder auch das Dreieck  $C_1PC_2$  gleich Null ist. Es ist also für diesen Fall bloß

$$12. G = bc_1 \sin \beta \text{ und folglich } c_1 = \frac{G}{b \sin \beta}.$$

388.

*Anmerkung.* Nimmt man nicht bloß die Seiten und die Winkel zwischen den Seiten, sondern auch vielleicht die Diagonalen und andere Linien von gegebener Lage zu bestimmenden Stücken eines Vielecks an, so entstehen noch eine Menge von Aufgaben über den Inhalt. Wir wollen von denselben folgender einen erwähnen.

389.

*Aufgabe.* Aus der Länge einer beliebigen graden Linie und den Winkeln zwischen ihr und den graden Linien aus den Endpunkten der gegebenen Linie nach den Ecken eines Vielecks den Inhalt des Vielecks zu finden.

Z. B. aus der Linie  $AB = a$  (Fig. 180.) und den Winkeln  $C_1AB = \alpha_1$ ,  $C_1BA = \beta_1$ ,  $C_2AB = \alpha_2$ ,  $C_2BA = \beta_2$  etc. den Inhalt des Vielecks  $C_1C_2C_3 \dots$  zu finden.

*Auflösung.* Es sey  $C_1D_1$ ,  $C_2D_2$ ,  $C_3D_3$  etc. auf  $AB$  senkrecht und

$$1. \begin{cases} AD_1 = p_1, & AD_2 = p_2, & AD_3 = p_3, & \dots \\ C_1D_1 = q_1, & C_2D_2 = q_2, & C_3D_3 = q_3, & \dots \end{cases}$$

so ist

$$p_1 \tan \alpha_1 = (a - p_1) \tan \beta_1, \text{ also}$$

$$p_1 (\tan \alpha_1 + \tan \beta_1) = a \tan \beta_1, \text{ und folglich}$$

$$\begin{cases} p_1 = a \frac{\tan \beta_1}{\tan \alpha_1 + \tan \beta_1}; \text{ und eben so} \\ p_2 = a \frac{\tan \beta_2}{\tan \alpha_2 + \tan \beta_2}, \\ p_3 = a \frac{\tan \beta_3}{\tan \alpha_3 + \tan \beta_3}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Berner ist  $q_1 = p_1 \tan \alpha_1$ ; also

$$5. \begin{cases} q_1 = a \frac{\tan \alpha_1 \tan \beta_1}{\tan \alpha_1 + \tan \beta_1}, \\ q_2 = a \frac{\tan \alpha_2 \tan \beta_2}{\tan \alpha_2 + \tan \beta_2}, \\ q_3 = a \frac{\tan \alpha_3 \tan \beta_3}{\tan \alpha_3 + \tan \beta_3}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Nun ist nach (§. 189.) der Inhalt des Vielecks, in  $p_1, p_2, p_3, \dots$  und  $q_1, q_2, q_3, \dots$  ausgedrückt,

4.  $\frac{1}{2} [(p_1 - p_2)q_2 + (p_2 - p_3)q_3 + (p_3 - p_4)q_4 \dots]$ , oder

5.  $\frac{1}{2} [(q_1 - q_2)p_2 + (q_2 - q_3)p_3 + (q_3 - q_4)p_4 \dots]$ .

Setzt man hierin die obigen Ausdrücke von  $p_1, p_2, p_3, \dots, q_1, q_2, q_3, \dots$ , so findet man den Inhalt des Vielecks durch die gegebenen Größen  $a; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ .

---

## A n h a n g.

### Auflösung einiger Aufgaben von Figuren in der Ebene, durch die grade Linie und den Kreis.

390.

**Erläuterung.** I. Die Figuren wurden hier oben überall als vorhanden, oder gegeben betrachtet. Dieselben lassen sich auch wirklich keinesweges sinnlich darstellen. Denn die Zeichnungen, welche man auf dem Papiere erblickt, sind nicht die Figuren selbst, von welchen die Sätze handeln, sondern nur Bilder, die in der Einbildungskraft die Vorstellung der wirklichen Figuren erregen. Was auf dem Papiere Punct und Linie genannt wird, sind nicht Punct und Linie, sondern körperliche Räume. Der Punct und der Strich auf dem Papiere, oder auf sonst einer Tafel, sind entweder kleine Vertiefungen, oder es sind Körperchen, welche von dem zeichnenden Stifte oder Griffel auf dem Papiere zurück bleiben; auch ist die Oberfläche des Papiers oder der Tafel, worauf sich die Puncte und Striche befinden, keinesweges eben, sondern mehr oder weniger gekrümmt und uneben. Man kann also die wirklichen geometrischen Figuren, welche man untersuchen will, immer nur bloß voraussetzen. Die Sätze, welche von denselben bewiesen werden sollen, hängen aber auch von der sinnlichen Darstellung der Figuren, nicht etwa ab, weil sie sonst, da sich die Figuren nicht sinnlich darstellen lassen, gar nicht existiren würden. Kommt es auf die Darstellung der Bilder der Figuren an, so müssen vielmehr umgekehrt die Sätze von den wirklichen Figuren erst die Regeln dazu liefern, und nur was nach diesen Regeln zusammengesetzt ist, kann für Bilder der wirklichen Figuren gelten. Auch die Möglichkeit der vorausgesetzten Figuren hängt nicht von der Möglichkeit der Darstellung ihrer Bilder ab, sondern davon, daß die Sätze, welche man von den vorausgesetzten Figuren findet, auf keine Widersprüche führen.

Deshalb sind absichtlich alle Aufgaben von Darstellung der Bilder der Figuren vermieden worden. Was bei dieser Darstellung Theil an den Gesetzen der Figuren hat, ist in die Sätze selbst, zu welchen es gehört, übertragen und die Figuren sind dagegen vorausgesetzt worden. Man gewinnt, wie es scheint, durch dieses Verfahren an Einheit der Methode und vermeidet die Verwechselung der wirklichen Figuren mit ihren Bildern,

in welche die Lernenden leicht verfallen und welche sie verleitet, die bloß näherungsweise Darstellung dessen, was nur in der Einbildungskraft existirt, für dieses selbst zu nehmen.

II. Sobald indeß die Geometrie, so wie sie sich in der Einbildungskraft, als Wissenschaft reiner, auf Gegenstände innerer Anschauung sich beziehender Vernunftschlüsse, aus sich selbst entwickelt hat, mit ihren Resultaten auf äussere Dinge angewendet werden soll, kommt es auf die Darstellung der Bilder ihrer Figuren an, für welche man auch wohl noch andere äussere sinnliche Gegenstände nimmt, die vielleicht noch weiter von den idealen Figuren abweichen.

Diese Darstellung der Figuren ist, wenn man die Zahl zu Hülfe nimmt, das heisst, die Vielfachheit gleichartiger Raumgrößen durch die Zahl ausdrückt, ohne Einschränkung, wenigstens näherungsweise möglich, und die Schwierigkeit, diejenigen Maaße, welche zur Darstellung der Figuren nöthig sind, durch die Zahl auszudrücken, nimmt sogar verhältnißmässig ab, je mehr die Verwicklung der Gesetze des Gegenstandes zunimmt. Werden aber die Abmessungen einer Figur, nemlich die Längen der Linien und die Größen der Winkel, von welchen die Ausdehnung der Figuren abhängt, durch Zahlen bestimmter Einheiten, und auf diese Weise die Verhältnisse der Theile der Figuren gegen einander ausgedrückt, so ist es nothwendig, daß man die Zahlen oder Mengen der Einheiten, die allerdings durch Rechnung, ohne Grenze genau gefunden werden können, auch mit der verlangten Genauigkeit in die Bilder der Figur übertragen könne, und daß man also eingetheilte Maaßstäbe der Linien und Winkel verfertige, von welchen sich auch der kleinste, durch die Zahl ausgedrückte Bruchtheil der Einheit mit der verlangten Genauigkeit abnehmen läßt. Dieses hat aber öfters große Schwierigkeiten, und es giebt Fälle, wo sich die Bilder geometrischer Figuren, nach ihren Eigenschaften, viel genauer ohne Hülfe der Zahl als mit Hülfe derselben darstellen lassen. In andern Fällen, wo die Genauigkeit vielleicht grade nicht das Haupt-Erforderniß ist, lassen sich die Bilder der Figuren zuweilen wenigstens schneller darstellen, als wenn man die Rechnung zu Hülfe nimmt.

Wo es z. B. auf eine sehr große Genauigkeit ankommt, z. B. bei der Verfertigung physicalischer, geodätischer und astronomischer Instrumente, ist es in der Ausführung schon ungemein schwierig, bloß das Bild einer graden Linie zu zeichnen; noch schwieriger ist es, wegen der ab- und zunehmenden Ausdehnung der Körper in verschiedenen Temperaturen, einen gradlinigen oder krummlinigen Maaßstab in gleiche Theile zu theilen, von welchem man die berechneten, und durch die Zahl ausgedrückten Linien und Winkel des Bildes einer Figur abnehmen könnte. In andern Fällen, wo weniger Genauigkeit und nur eine verhältnißmässige Annäherung, dagegen aber eine schnelle Ausführung verlangt wird, z. B. in der Perspective und den zeichnenden und bildenden Künsten, oder bei dem Formen der Stoffe zu diesem oder jenem Zweck, z. B. der Steine, des Holzes etc., etwa in der Baukunst, würde die Hülfe der Rechnung in vielen Fällen langwierig und um so unnützer seyn, da es doch vielleicht an Maaßstäben fehlt, die genau berechneten Abmessungen der Figur mit eben der Genauigkeit zu übertragen.

In allen solchen Fällen also ist es von großem Nutzen, und da wo selbst die Genauigkeit ohne Hülfe der Zahl größer ist,

als mit ihrer Hülfe, z. B. bei der Verfertigung genauer Instrumente, sogar von der grössten Wichtigkeit, Mittel zu haben, die Bilder geometrischer Figuren ohne Hülfe der Zahl darzustellen.

Man muss indessen, wie überall, auch hier in der Wahl der Mittel zum Zweck vorsichtig seyn, und nicht die Hülfe der Zahl etwa da verwerfen, wo die rechnende Methode wirklich nicht der Construction der Figuren-Bilder durch Zeichnung, welche man die graphische Methode nennen kann, eigenthümlicher Umstände wegen, nachsteht. Zieht man die graphische Methode der rechnenden etwa bloß deshalb vor, weil es dem Ausführenden an Fertigkeit in der Rechnung fehlt, so geschieht solches leicht auf Kosten der Genauigkeit, und diese Wahl ist nicht gerechtfertigt. Es mag zwar allerdings leichter seyn, die Regeln der Zusammensetzung eines Figuren-Bildes ohne Rechnung, in das Gedächtniß zu fassen, als die nöthige Fertigkeit in der zur genauen Construction der Figur dienenden Rechnung zu erwerben. Nimmt man aber bloß auf eine solche Art von Erleichterung Rücksicht, so entgilt es der Zweck und man benutzt nicht die Hülfe der Mathematik, sondern man verschmäh't oder vernachlässigt sie. Es kommt auf die Mittel der Ausführung an. Hat man Maassstäbe, die genauer sind als man die einzelnen Linien und Winkel construiren kann, und man soll genau verfahren, so ist es besser, zu rechnen, und zwar um so mehr, weil die Fehler, welche man beim Zeichnen in den einzelnen Theilen macht, sich fortpflanzen und vervielfältigen, was beim Rechnen nicht der Fall ist. Dagegen da, wo entweder eine grössere Genauigkeit verlangt wird, als die Maassstäbe gewähren, oder wo es auf Genauigkeit nicht ankömmt, ist es besser die Figuren, wo es angeht, ohne Hülfe der Rechnung zu construiren oder zu zeichnen. Man kann z. B. eine beliebige, von graden Linien umschlossene Figur in der Ebene in ein Rechteck oder in ein Quadrat von gleicher Grösse verwandeln, oder die Figur in beliebige Theile theilen, ohne Rechnung. Kommt es aber, wie z. B. in der Feldmesskunst, auf Genauigkeit an, so verliert man daran, wenn man sich statt der Rechnung der zeichnenden Methode bedient. Ueberall, wo man auf dem Papiere mit Genauigkeit zeichnen soll, hat die rechnende Methode vor der graphischen, wegen der grössern Genauigkeit Vorrüge.

III. Die graphische Methode, Figuren-Bilder darzustellen, ist besonders von den Alten, denen die Rechenkunst in ihrer jetzigen Ausdehnung und Geschmeidigkeit fehlte, cultivirt worden, und theils solcher classischen Vorbilder wegen, theils weil die Aufgabe in der That ein trefflicher Gegenstand für den geometrischen Scharfsinn ist, theils auch wegen ihres wirklichen grossen unmittelbaren Nutzens in den oben erwähnten Fällen hat man den Gegenstand auch in neuer Zeit angelegentlich verfolgt. Eine Sammlung der Resultate dahin gehöriger Untersuchungen würde aber allein ein grosses Werk füllen. Die sogenannte beschreibende Geometrie (*géométrie descriptive*) würde sich unmittelbar daran anschliessen. In keinem Fall, scheint es, gehören diese Untersuchungen in einen Lehrbegriff der Geometrie, oder, wenn man will, in eine Theorie der Geometrie, wie die gegenwärtige, die sich bloß mit den idealen Vorstellungen der Figuren beschäftigt, sondern vielmehr zu den mannigfaltigen Anwendungen dieser Theorie auf sinnliche Gegenstände. Da indessen fast in allen Lehrbüchern mehr oder weniger Regeln der Figuren-Zeichnung angetroffen werden, so dürfen diesel-

ben auch hier nicht ganz fehlen, sondern er müssen wenigstens die nothwendigsten ihren Platz finden.

IV. Euclid verlangt in den Forderungen (postulatis), daß man eine grade Linie ziehen und beliebig verlängern, und das man aus einem gegebenen Puncte, mit beliebigem Halbmesser, eine Kreislinie beschreiben könne. Diese beiden Dinge sind die Elemente der beschreibenden Geometrie. Man kann mit Hülfe der graden Linie und des Kreises, zeichnend alle Aufgaben auflösen, welche rechnend die Auflösung von Gleichungen des ersten und zweiten Grades erfordern. Wegen der Schwierigkeit, das Bild einer graden Linie darzustellen, kann man auch bloß die einzige Forderung machen: eine Kreislinie zu ziehen, was in der Ausführung wirklich am genauesten möglich ist, und es giebt sehr sinnreiche Auflösungen, einer Menge geometrischer Aufgaben, bloß durch den Kreis. Wir wollen einige Aufgaben, sowohl durch die grade Linie und den Kreis, als durch den Kreis allein auflösen, zusammenstellen, müssen aber wegen der weitem Ausführung dieses Gegenstandes auf Werke verweisen, die sich damit insbesondere beschäftigen.

## 391.

a) Eine grade Linie DE (Fig. 181.) zu finden, die auf einer andern BC, durch einen gegebenen Punct A in derselben, senkrecht steht, mache man eine willkürliche Länge derselben AB, gleich AC und beschreibe aus B und C, mit einem willkürlichen Halbmesser  $BD = DC$ , der aber größer ist als AB, zwei Kreisbogen, die sich, z. B. in D, schneiden, so ist DA, durch A, auf BAC senkrecht. Denn weil  $AB = AC$ ,  $BD = DC$  und  $DA = DA$  ist, so ist  $\triangle BAD = \triangle CAD$  und folglich  $\angle BAD = \angle CAD = 90^\circ$ .

Die Aufgabe wird durch den Kreis allein gelöst; denn man findet durch den Kreis allein einen zweiten Punct D des Perpendikels DAE.

β) Eine grade Linie DE (Fig. 181.) zu finden, die auf einer andern, durch die beiden Puncte B und C gegebenen, BC senkrecht ist und sie halbt, beschreibe man mit willkürlichen Halbmessern  $BD = CD$  und  $BE = CE$  Kreisbogen, die sich z. B. in D und E schneiden, so ist DE auf BC senkrecht und halbt BC. Denn wegen  $BD = CD$ ,  $BE = CE$  und  $DE = DE$  ist,  $\triangle DBE = \triangle DCE$ , also  $\angle BDE = \angle CDE$  und  $\angle BED = \angle CED$ , folglich, weil  $BD = CD$ ,  $DA = DA$  und  $BE = EC$ ,  $EA = EA$ ,  $\triangle BDA = \triangle CDA$  und  $\triangle BEA = \triangle CEA$  und mithin  $\angle BAD = \angle CAD = 90^\circ$  und  $BA = CA$ . Die Auflösung geschieht ebenfalls durch den Kreis allein.

γ) Auf eine gegebene grade Linie AB (Fig. 182.) aus einem gegebenen Puncte C, außerhalb derselben, CD auf AB senkrecht zu ziehen, nehme man, wenn die Linie AB nicht etwa durch zwei Puncte A und B gegeben ist, zwei solche Puncte willkürlich an und beschreibe mit  $BD = BC$  und  $AD = AC$ , aus B und A Kreisbogen, die sich z. B. in C und D schneiden, so ist CD auf AB senkrecht; denn da  $AC = AD$ ,  $BC = BD$  und  $AB = AB$ , so ist  $\triangle ACB = \triangle ADB$ ; folglich  $\angle CAE = \angle DAE$  und  $\angle CBE = \angle DBE$ , also, weil  $AC = AD$ ,  $AE = AE$  und  $BC = BD$ ,  $BE = BE$  ist,  $\triangle AEC = \triangle AED$  und  $\triangle BEC = \triangle BED$ , mithin  $\angle AEC = \angle AED = 90^\circ$  und  $\angle BEC = \angle BED = 90^\circ$ . Die Auflösung geschieht wieder durch den Kreis allein.

d) Ein Perpendikel  $AD$  (Fig. 183.) auf eine gegebene grade Linie  $AB$  durch ihren Endpunct  $A$  zu ziehen.

Ist bloß die grade Linie  $AB$  und der Punct  $A$  gegeben, so nehme man willkürlich  $AE = EB$ , ziehe mit beliebigem Halbmesser  $AF = BF$ , aus  $A$  und  $B$  Kreisbogen und durch ihren Durchschnitt  $F$  und den Punct  $E$  die grade  $FE$ , welche auf  $AB$  senkrecht steht, weil  $AF = BF$ ,  $AE = BE$  und  $EF = EF$ , also  $\triangle AEF = \triangle BEF$ , und folglich  $\angle AEF = \angle BEF = \rho$  ist. Ist dagegen auch der Punct  $B$  gegeben, so errichte man auf  $AB$ , nach (2.), ein Perpendikel  $FE$ , welches  $AB$  in  $E$  halbt. Ferner ziehe man aus  $E$  den Halbkreis  $ACB$ . Durch den Punct  $C$ , wo derselbe das Perpendikel  $FE$  schneidet, und durch  $B$  ziehe man  $BCD$  grade, und mache  $CD = CB$ , so ist  $DA$  auf  $AB$  durch ihren Endpunct  $A$  senkrecht. Denn wegen  $EA = EC = EB$  und  $\angle AEC = \angle BEC = \rho$ , ist  $\triangle AEC = \triangle BEC$  und  $\alpha = \gamma$ ,  $\beta = \delta$ ; also  $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \tau$ , folglich auch  $\angle ACD = \rho$ , und weil  $CD = CA = CB$ ,  $\triangle DCA = \triangle ACB$ , mithin  $\gamma = \beta$ , folglich  $\alpha + \gamma$ , oder  $\angle DAB = \rho$ .

Diese Auflösung geschieht durch die grade Linie und den Kreis zugleich. Will man sich des Kreises allein bedienen, so ziehe man aus  $A$  und  $B$ , mit einem beliebigen Halbmesser  $AF = BF$ , der nicht kleiner als  $\frac{1}{2}AB$ , also etwa gleich  $AB$ , oder größer als  $AB$  ist, oder  $AB$  nahe kommt, zwei Kreisbogen, die sich in  $F$  schneiden und aus  $F$  mit dem nemlichen Halbmesser der Kreis  $BAHG$  und mache in demselben die Sehnen  $BI = HI = HG$ , so ist  $GA$  auf  $AB$  senkrecht. Denn wegen  $FB = FI = FH = FG = BI = IH = HG$  sind die Dreiecke  $BFI$ ,  $IFH$  und  $HFG$  gleichseitig und folglich ihre Winkel gleich  $\frac{1}{3}\rho$ ; also  $\angle BFI + \angle IFH + \angle HFG = 2\rho$ ; folglich ist  $BFG$  eine grade Linie und mithin  $BIHG$  ein Halbkreis; also der Winkel  $BAG$ , oder  $BAD$ , da er im Umfange eines Halbkreises liegt, ein rechter. Nimmt man  $AF$  oder  $BF$  gleich  $AB$ , so fällt  $I$  in  $A$ .

## 392.

Eine Parallele mit einer gegebenen graden Linie  $AB$  (Fig. 184.) durch einen gegebenen Punct  $C$  zu ziehen, beschreibe man,

$\alpha$ ) im Fall die Linie  $AB$  durch zwei Puncte  $A$  und  $B$  gegeben ist, aus  $C$ , mit dem Halbmesser  $CD = AB$ , und aus  $B$ , mit dem Halbmesser  $BD = CA$ , Kreisbogen, die sich z. B. in  $D$  schneiden; so ist  $CD$  mit  $AB$  parallel; denn wegen  $CD = AB$ ,  $BD = AC$  und  $CB = CB$  ist  $\triangle ACB = \triangle DBC$ , also  $\angle ABC = \angle DCB$  und folglich  $CD$  mit  $AB$  parallel.

$\beta$ ) Ist die grade Linie  $AB$  selbst gegeben, so nehme man in derselben irgend einen Punct  $B$  an, beschreibe mit dem Halbmesser  $CB$ , aus  $C$  und  $B$  Kreisbogen  $BF$  und  $CE$  und mache die Sehne  $BF$  gleich der Sehne  $CE$ , so ist  $CF$  mit  $AB$  parallel; denn wegen  $CB = FC = AB$  und  $CE = BF$ , ist  $\triangle CBF = \triangle CBE$ , also  $\angle FCB = \angle ECB$ , folglich  $CF$  mit  $EB$  parallel.

Beide Auflösungen bedürfen bloß des Kreises.

## 393.

$\alpha$ ) Eine grade Linie von gegebener Länge  $BC$  (Fig. 185.) zu halbiren errichte man, wenn man sich des Kreises und der graden Linie zugleich bedienen will, auf dieselbe ein Perpendikel  $DE$  nach (2.). Dasselbe halbt  $BC$  in  $A$ .

Will



Will man bloß den Kreis gebrauchen, oder es sind bloß die beiden Punkte B und C gegeben, und man soll einen Punkt A finden, der mit ihnen in grader Linie liegt und von B und C gleich entfernt ist, so beschreibe man mit dem Halbmesser BC aus C den Kreis BFGH, mache die Sehnen BF, FG, GH gleich BC, beschreibe aus B mit dem Halbmesser BH den Kreis IHK, mache die Sehnen HI und HK gleich FH und beschreibe mit dem Halbmesser FH aus I und K zwei Kreisbögen. Ihr Durchschnitt A liegt mit den gegebenen Punkten B und C in grader Linie, und ist von B und C gleich weit entfernt. Denn wegen  $BC = FC = GC = HC = BF = FG = GH$  ist  $BCF = FCG = GCH = \frac{2}{3}\varphi$ , also  $BCF + FCG + GCH = 2\varphi$ , folglich BCH eine grade Linie und BFGH ein Halbkreis. Da ferner  $IH = KH$  und  $AI = BK$  ist, so ist BH auf IK senkrecht, (2) und da  $AI = AK$  ist, so ist auch AH auf IK senkrecht; folglich liegt A in der graden Linie BCH. Nun ist, wegen  $BI = BH$ ,  $BIH = BHI$ , und wegen  $AI = HI$ ,  $IAH = AHI = BHI$ , also  $IAH = BHI$ ; folglich sind die Dreiecke IBH und AIH, weil sie außerdem den Winkel BHI gemein haben, ähnlich. Mithin ist  $\frac{AH}{IH} = \frac{IH}{BH}$  oder  $AH \cdot BH = IH^2$ , oder weil  $IH = FH$  ist,  $AH \cdot BH = FH^2$ . Aber  $BFH = \varphi$ , weil BFGH ein Halbkreis ist. Also, nach dem Pythagorischen Lehrsatz,  $FH^2 = BH^2 - BF^2$ , oder weil  $BH = 2BC$  und  $BF = BC$ ,  $FH^2 = 4BC^2 - BC^2 = 3BC^2$ , also vorhin  $AH \cdot BH = 3BC^2$ , oder weil  $BH = 2BC$ ,  $2BC \cdot AH = 3BC^2$ , oder wenn man mit BC dividirt,  $2AH = 3BC$ , oder weil  $AH = AC + CH = AC + BC$ ,  $2AC + 2BC = 3BC$ , also  $2AC = BC$ , oder  $AC = \frac{1}{2}BC$ . Folglich liegt der Punkt A mit B und C in grader Linie und ist von B und C gleich weit entfernt.

Es giebt auch noch andere Verfahren, die Länge einer graden Linie bloß mit Hülfe des Kreises zu halbiren.

β) Eine grade Linie  $AB_n$  (Fig. 186.) von gegebener Länge in eine beliebige Zahl n gleicher Theile zu theilen, ziehe man unter einem beliebigen Winkel  $C_nAB_n$  die grade Linie  $AC_n$  durch A und nehme eine beliebige Länge  $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4$  etc., doch so, daß  $AC_n$  nicht viel größer ist als  $AB_n$ . Zieht man alsdann, mit  $C_nB_n$  parallel, die graden Linien  $C_1B_1, C_2B_2, C_3B_3$  etc., so ist  $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 \dots = \frac{1}{n}AB_n$ . Denn wegen der Parallelen sind die Dreiecke  $AC_1B_1, AC_2B_2, AC_3B_3 \dots$  ähnlich. Da nun  $AC_2 = 2AC_1, AC_3 = 3AC_1 \dots, AC_n = n \cdot AC_1$  ist, so ist  $AB_2 = 2AB_1, AB_3 = 3AB_1 \dots AB_n = nAB_1$ .

Will man sich bloß des Kreises bedienen und AB (Fig. 187.) ist die in n gleiche Theile zu theilende Entfernung, so beschreibe man aus B mit dem Halbmesser AB die Kreislinie AHIC und mache  $AH = HI = IC = AB$ . Das Nemliche thue man aus C, aus dem daraus entstehenden Punkt D, aus E u. s. w. n - 1 mal wiederholt, bis man, z. B. nach G gelangt. Hierauf beschreibe man aus A und G mit dem nemlichen Halbmesser AB die Kreislinien BK und FL, und aus A und G, mit dem Halbmesser AG, die Kreislinien GL und AK. Ferner aus dem Durchschnittspunkte K der Kreislinien BHK und AK, mit dem Halbmesser AK, den Bogen AM, und endlich aus G, mit dem Halbmesser KL, den Bogen PMN, welcher den vorigen AM in M schneidet; so ist AM der nte Theil der gege-



nen Linie AB. Diesen nten. Theil kann man, wie vorhin die Linie AB, vervielfältigen, so findet man auch die übrigen Theilungspunkte der gegebenen Entfernung AB. Da nemlich  $KL = GM$ ,  $KM = AK = GL$  und  $ML = ML$ , so ist  $\triangle LMG = \triangle KLM$ , also  $KLM = LMG$  und  $MG$  mit  $KL$  parallel. Da ferner  $AK = LG$ ,  $AL = KG$ ,  $KL = KL$  und  $AG = AG$ , so ist  $\triangle ALK = \triangle GKL$  und  $\triangle AGK = \triangle GAL$ , also  $LKA = KLG$ ,  $KAG = LGA$ , und folglich  $LKA + KAG = KLG + LGA = 2q$ ; folglich auch  $AG$  mit  $KL$  parallel; mithin liegt  $M$  in der graden Linie  $AG$ . Nun sind die Dreiecke  $AKM$  und  $KGA$  gleichschenkelig, über  $AM$  und  $AK$ , und haben den Winkel  $A$  gemein; also sind die beiden gleichen Winkel in dem einen so groß als in dem andern; folglich sind die Dreiecke ähnlich und es sind  $\frac{AK}{AM} = \frac{AG}{AK}$ , oder weil  $AK = AB$ ,  $\frac{AB}{AM} = \frac{AG}{AB}$ , folglich, weil  $AG = n \cdot AB$ , auch  $AB = n \cdot AM$ .

Die Verfahren passen natürlich auch für die Halbierung der gegebenen Entfernung ( $\alpha$ ).

## 394.

$\alpha$ ) Einen Winkel DEF (Fig. 188.) zu beschreiben, der einem gegebenen Winkel ACB gleich ist, nehme man auf den Schenkeln des gegebenen Winkels beliebige Längen vom Scheitel ab, z. B.  $CA = CB$ , mache auf der Linie EF, an welche der Winkel  $DEF = ACB$  gelegt werden soll,  $EF = CB$ , ziehe mit DE  $= AC$  aus E, und mit DF  $= AB$  aus F Kreisbogen, so geht der andere Schenkel DE eines dem Winkel ACB gleichen Winkels DEF durch den Durchschnittspunkt D der beiden Kreisbogen. Denn die drei Seiten der Dreiecke DEF und ACB sind alsdann gleich, folglich sind die Dreiecke, mithin die Winkel DEF und ACB gleich.

$\beta$ ) Winkel zu zeichnen, die zwei-, drei-, viermal so groß als ein gegebener Winkel  $BAC = \alpha$  (Fig. 189.) ziehe man aus dem Scheitel des Winkels A, mit einem beliebigen Halbmesser AB, einen Bogen, der den einen Schenkel des Winkels in B schneidet, aus B mit dem nämlichen Halbmesser einen Bogen, der den andern Schenkel in C schneidet, aus C mit dem nämlichen Halbmesser einen Bogen, der den vorigen Schenkel in D schneidet und so abwechselnd weiter; so ist  $CBD = 2\alpha$ ,  $DCE = 3\alpha$ ,  $EDF = 4\alpha$ ,  $FEG = 5\alpha$ ,  $GFC = 6\alpha$ ,  $FGQ = 7\alpha$ ,  $GHC = 8\alpha$ ,  $KIQ = 9\alpha$ ,  $LKC = 10\alpha$ , u. s. w., wo die zunehmenden Winkel auch in die Verlängerungen der Schenkel übergehen. Wegen  $BC = AB$  ist nemlich  $BCA = BAC$ , also der äußere Winkel  $CBD = 2BAC = 2\alpha$ ; wegen  $DC = BC$  ist  $CDB = CBD = 2\alpha$ , also im Dreieck DCA der äußere Winkel DCE  $= CDA + DAC = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$ ; eben so  $EDF = 4\alpha$ ,  $FEG = 5\alpha$ ,  $GFP = 6\alpha$ ; ferner wegen  $HG = FG$ ,  $GHF = GFH = 2q - 6\alpha$ , also  $AHG = 2q - (2q - 6\alpha) = 6\alpha$ , und mithin im Dreieck AHG der äußere Winkel HGQ  $= 7\alpha$  u. s. w.

Man kann auch bloß aus dem Scheitel A (Fig. 190.) des gegebenen Winkels BAC, mit einem beliebigen Halbmesser AB, einen Kreis ziehen und die Sehnen, CD, DE, EF etc. gleich BC machen, so sind die Winkel CAD, DAE, EAF etc. alle einander und dem gegebenen Winkel BAC gleich, und folglich ist  $BAD = 2BAC$ ,  $BAE = 3BAC$  u. s. w.

$\gamma$ ) Einen beliebigen Kreisbogen AB (Fig. 191.) zu halbieren, errichte man auf seine Sehne AB nach (§. 391.  $\beta$ ) ein Perpendi-

kel DE, welches sie halbt. Dasselbe halbt auch den Bogen AB; zufolge (§. 253. 1.).

Ist der Mittelpunkt M des Kreisbogens gegeben, so kann man den Bogen AB auch ohne Hülfe der graden Linie halbiren. Man beschreibe nemlich mit dem Halbmesser  $AM = BM$  des gegebenen Bogens AB, aus seinen Endpunkten A und B, die Bogen GM und HM und mache  $MG = MH = AB$ , ferner mit dem Halbmesser  $HA = GB$  aus H und G Bogen, die sich in K schneiden, endlich mit dem Halbmesser MK aus G und H Bogen, die sich in F schneiden, so liegt der Punct F in dem gegebenen Bogen AB und halbt ihn; denn die Dreiecke GAM, AMB und MBH sind gleich und gleichschenkelig über GM, AB und MH; also ist  $AGM = AMG = MAB = ABM = BMH = BHM$ , folglich AB mit GM und HM parallel, also GMH eine grade Linie; desgleichen sind ABMG und ABHM gleiche Parallelogramme. In diesen Parallelogrammen ist zufolge (§. 129.)  $AB^2 + BM^2 + MG^2 + GA^2 = AM^2 + GB^2$ , oder weil  $BM = GA = AM$  und  $AB = MG$ ,  $2MG^2 + AM^2 = GB^2$ . Nun soll  $GK = HK = GB$  seyn, also ist  $GK^2 = HK^2 = 2MG^2 + MA^2$ . Die Dreiecke KMG, KMH sind gleich, denn es ist  $GK = HK$ ,  $GM = HM$  und  $KM = KM$ . Also sind bei M rechte Winkel und es ist  $MK^2 = GK^2 - GM^2$ , also weil vorhin  $GK^2 = 2MG^2 + AM^2$  war,  $MK^2 = MG^2 + AM^2$ . Ferner sind FG und FH beide gleich MK und also einander gleich, folglich ist auch  $\triangle FMG = \triangle FMH$ ; denn es ist auch  $GM = HM$  und  $FM = FM$ ; mithin ist  $FMG = FMH = \varphi$ , also  $FM^2 = FG^2 - GM^2$ , folglich, weil vorhin  $FG^2 = MK^2 = MG^2 + AM^2$  war,  $FM^2 = AM^2$ , oder  $FM = AM$ . Mithin liegt der Punct F in dem gegebenen Bogen AB, und da  $FMG = FMH = \varphi$  und  $AMG = BMH$  ist, so ist auch  $FMA = FMB$  und folglich Bogen AF = Bogen BF; mithin halbt der Punct F den Bogen AB.

d) Einen gegebenen Winkel ACB (Fig. 192.) zu halbiren und die Hälfte abermals zu halbiren u. s. w. ziehe man durch den einen Schenkel AC des Winkels, in beliebiger Entfernung von dem andern BC, mit diesem parallel, eine grade Linie DF und mache  $DE = DG$ , so ist  $ECB = \frac{1}{2}ACB$ . Ferner mache man  $EF = EC$ , so ist  $FCB = \frac{1}{2}ECB$  u. s. w. Denn in dem gleichschenkeligen Dreieck DCE ist  $DCE = DEC$ , also weil der äußere Winkel  $PDC = DCE + DEC$ ,  $DCE = \frac{1}{2}PDC$ , und weil die Wechselwinkel PDC und DCB gleich sind,  $DCE = \frac{1}{2}DCB$ , also auch  $ECB = \frac{1}{2}ACB$ . Eben so ist in dem Winkel ECB, wenn  $EF = EC$ ,  $FCB = \frac{1}{2}ECB$  u. s. w.

e) Anmerkung. In mehr als zwei gleiche Theile auf einmal läßt sich ein gegebener beliebiger Winkel bloß durch die grade Linie und den Kreis, zeichnend nicht theilen; schon in drei Theile nicht.

Diese Aufgabe ist, wie z. B. die von der Quadratur des Kreises, eine von denen, deren Auflösung nicht auf die Weise möglich ist, wie man es verlangt. Man kann die Theilung eines Winkels in drei gleiche Theile auf die Aufgabe bringen: an den zu theilen gegebenen Winkel ACE (Fig. 193.) ein Dreieck ABC mit willkürlichem Schenkel AC zu zeichnen, in welchem  $BD = DC$  ist, wenn man  $DC = AC$  macht; denn wenn  $BD = DC$ , so ist  $DBC = DCB$ , also der äußere Winkel  $ADC = 2B$  und weil  $DC = AC$ , auch  $DAC = 2B$ , folglich in dem Dreieck ABC der äußere Winkel  $ACE = BAC + ABC = 3B$ , so daß also der Winkel  $ABC = \frac{1}{3}ACE$

ist, wenn  $BD=DC=AC$ . Allein das Dreieck  $AOB$  läßt sich durch die grade Linie und den Kreis allein nicht finden. Um so weniger läßt sich ein beliebiger Winkel, durch die grade Linie und den Kreis allein, in gleiche Theile theilen, deren Zahl eine grössere Primzahl als 3, oder eine Zahl ist, welche grössere Primzahlen als 2 zu Factoren hat. Dergleichen Auflösungen beruhen nicht mehr auf Gleichungen des zweiten, sondern auf Gleichungen des 3ten, 5ten, 7ten, 11ten Grades u. s. w. und erfordern, wenn sie durch Zeichnung geschehen sollen, nicht mehr blos den Kreis, sondern andere krumme Linien.

## 395.

Der rechte Winkel dagegen, oder zwei oder vier rechte Winkel, also der Kreis-Umfang selbst, lassen sich, blos durch die grade Linie und den Kreis, nicht allein in zwei, sondern auch in mehrere gleiche Theile theilen, welches zugleich die Aufgabe ist: regelmässige Vielecke in und um einen Kreis zu beschreiben; denn die Seiten regelmässiger Vielecke im Kreise sind gleiche Theile des Umfanges, die Seiten regelmässiger Vielecke um den Kreis sind mit jenen parallel, und liegen gleichen Winkeln am Mittelpunkt gegenüber. Diese Theilung des Kreis-Umfanges steht mit der Auflösung von Gleichungen mit zwei Gliedern in Verbindung, welche von jedem Grade möglich ist (Rechenkunst. §. 284.). Die Theilung des halben Umfanges in zwei, drei und fünf Theile, welche Zahlen die kleinsten Primzahlen sind, oder des ganzen Umfanges in vier sechs und zehn Theile, ist folgende.

α) Den halben Kreis-Umfang  $AIB$  (Fig. 194.) in zwei gleiche Theile zu theilen errichte man, nach (2.), auf die Mitte des Durchmessers  $AB$  ein Perpendikel  $IK$ , so wird durch dasselbe der halbe Umfang in zwei, oder der ganze Umfang in vier gleiche Theile getheilt.

Ohne Hülfe der graden Linie mache man  $AD=DE=EB=$  dem Halbmesser  $AC$ ; so daß  $ADEB$  ein Halbkreis ist; ferner  $AH=BH=AE=BD$  und  $AI=IB=HC$ , so halbt der Punkt  $I$  den Halbkreis  $AIB$ . Denn die Umfangs-Winkel im Halbkreise  $AEB$  und  $ADB$  sind rechte, und also ist z. B.  $AE^2=AB^2=EB^2$ , und weil  $AB=2AC$ ,  $EB=AC$ ,  $AE^2=4AC^2-AC^2=3AC^2$ . Also ist  $AH^2=BH^2=AE^2=3AC^2$ . Nun ist wegen  $AH=BH$ ,  $AC=BC$  und  $HC=HC$ ,  $\triangle ACH=\triangle BCH$ , folglich  $ACH=BCH=\varphi$ , folglich  $HC^2=AH^2-AC^2=3AC^2-AC^2=2AC^2$ ; mithin ist  $AI^2=BI^2=HC^2=2AC^2$ . Wegen  $AI=BI$ ,  $AC=BC$  und  $IC=IC$  ist  $\triangle ACI=\triangle BCI$  und folglich  $ACI=BCI=\varphi$ , also  $IC^2=AI^2-AC^2=2AC^2-AC^2=AC^2$  und folglich  $IC=AC$ . Mithin liegt  $I$  in dem Kreisumfange durch  $A$  und  $B$ , und da  $AI=BI$  ist, so halbt  $I$  den Halbkreis  $AIB$ .

Vier rechte Winkel werden durch den Durchmesser selbst halbt und einen rechten Winkel halbt man weiter, wenn man den Winkel  $ACI$ , nach (§. 394. d.), in zwei gleiche Theile theilt.

β) Den halben Kreisumfang  $AIB$  (Fig. 194.) in drei gleiche Theile zu theilen mache man  $AD=DE=EB=$  dem Halbmesser  $AC$ , so sind die Bogen  $AD$ ,  $DE$ ,  $EB$  Drittheile des halben Umfanges  $ADEB$  und also die Winkel  $ACD$ ,  $DCE$  und  $ECB$  die dritten Theile von zwei rechten. Denn die Dreiecke  $ACD$ ,  $DCE$  und  $ECB$  sind gleichseitig und folglich ihre Winkel gleich  $\frac{2}{3}\varphi$ . Der dritte Theil von vier rechten Winkeln, oder vom

ganzen Umfange ist der zweifache Winkel  $ACE$ , und den dritten Theil vom rechten Winkel findet man, wenn man die Winkel  $ACD$ ,  $DCE$  etc. nach (§. 394.  $\delta$ .) halbt.

7) Den halben Kreisumfang in fünf gleiche Theile zu theilen suche man nach ( $\alpha$ .) die Hälfte des halben Umfanges, ziehe  $DC$  (Fig. 195.), halbiere diese Linie nach (§. 393.  $\alpha$ .) in  $G$ , ziehe  $AG$  und mache  $FG = GC$ , so ist  $AF$  die Sehne des fünften Theils des halben Umfanges, nemlich  $AF = AI = IK = KL = LM = MB$ . Denn weil  $ACG = \rho$ , so ist  $AC$  eine Tangente des mit dem Halbmesser  $GC$  aus  $G$  gezogenen Kreises  $FCH$  in  $C$ , also nach (§. 277.)  $AC^2 = AF \cdot AH$ , oder weil  $FH = 2FG = 2GC = AC$ , also  $AH = AF + AC$ ,  $AC^2 = AF(AF + AC) = AF^2 + AC \cdot AF$ . Nun sey  $MCB = \frac{2}{3}\rho$ , so ist  $CMB + CBM = 2\rho - \frac{2}{3}\rho = \frac{4}{3}\rho$ , und weil das Dreieck  $MCB$  gleichschenkelig ist,  $CMB = CBM = \frac{2}{3}\rho = 2MCB$ . Es halbiere  $PB$  den Winkel  $CBM$ , so ist  $CBP = \frac{1}{3}\rho$ , also  $CBP = PCB$ , und folglich  $PC = PB$ , und da auch  $PBM = \frac{2}{3}\rho = MCB$  ist, so sind die Dreiecke  $PBM$  und  $MCB$  ähnlich, und folglich ist auch  $PBM$  gleichschenkelig, mithin  $PB = MB = PC$  und  $\frac{MB}{PM} = \frac{MC}{MB}$ , oder  $MB^2 = MC \cdot PM$ , oder weil  $MP = MC - PC = MC - MB$  ist,  $MB^2 = MC(MC - MB)$ , oder auch weil  $MC = AC$  ist,  $MB^2 = AC(AC - MB)$ , oder  $AC^2 = MB^2 + AC \cdot MB$ . Oben war  $AC^2 = AF^2 + AC \cdot AF$ . Zieht man eines vom andern ab, so erhält man  $0 = MB^2 - AF^2 + AC(MB - AF)$ , oder  $0 = (MB - AF)(MB + AF + AC)$ , woraus  $MB - AF = 0$ , also  $MB = AF$  folgt, so daß also  $MCB = \frac{2}{3}\rho$  ist, wenn man  $MB = AF$  macht.

Will man sich blos des Kreises bedienen, so halbiere man nach ( $\alpha$ .) den halben Umfang  $ATB$  (Fig. 195.) in  $T$  und mache  $TN = TQ =$  dem Halbmesser  $AC$ , ferner  $AR = BR = DN = DQ$  und  $QS = NS = CR$ , so ist  $CS$  gleich der Sehne  $AI$  von  $\frac{1}{5}$  des halben und  $AS = BS$  gleich der Sehne  $AK$  von  $\frac{1}{5}$  des ganzen Umfanges; denn die Umfangswinkel  $DNT = DQT$  sind rechte, also ist  $DN^2 = DT^2 - NT^2 = 4AC^2 - AC^2 = 3AC^2$ , folglich  $AR^2 = BR^2 = 3AC^2$ . Da nun  $AC = CB$ ,  $AR = BR$  und  $CR = CR$ , so ist  $\triangle ACR = \triangle BCR$  und  $ACR = BCR = \rho$ , also  $CR^2 = AR^2 - AC^2 = 3AC^2 - AC^2 = 2AC^2$ , folglich auch  $NS^2 = QS^2 = 2AC^2$ . Nun ist  $NC = NT$ ,  $QC = QT$  und  $NQ = NQ$ , also  $\triangle NCQ = \triangle NTQ$  und  $CNZ = TNZ$ . Aber  $NC = NT$ ,  $NZ = NZ$ , also  $\triangle CNZ = \triangle TNZ$ , folglich  $CZN = TZN = \rho$  und  $CZ = TZ = \frac{1}{2}CT = \frac{1}{2}AC$ ; folglich  $NZ^2 = NC^2 - CZ^2 = AC^2 - \frac{1}{4}AC^2 = \frac{3}{4}AC^2$ . Da  $NS = QS$  war, so liegt  $S$  in dem Perpendikel auf die Mitte von  $NQ$ , und folglich mit  $CZ$  in grader Linie. Nun war  $NS^2 = 2AC^2$ , folglich ist, weil bei  $Z$  rechte Winkel sind,  $SZ^2 = NS^2 - NZ^2 = 2AC^2 - \frac{3}{4}AC^2 = \frac{5}{4}AC^2$ , oder  $SZ = \frac{1}{2}AC\sqrt{5}$ . Daraus folgt, weil  $CZ = TZ = \frac{1}{2}AC$ ,  $SC = \frac{1}{2}AC\sqrt{5} - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AC(\sqrt{5} - 1)$  und  $ST$ , oder  $SC + AC = \frac{1}{2}AC\sqrt{5} + \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AC(\sqrt{5} + 1)$ . Also  $SC(SC + AC) = \frac{1}{4}AC^2(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = \frac{1}{4}AC^2(5 - 1) = AC^2$ . Hieraus folgt, daß  $SC$  die Sehne vom fünften Theile des halben Umfanges ist. Denn weiter oben war dieselbe gleich  $AF = MB$ , und es war  $AC^2 = AF^2 + AC \cdot AF$ . Zieht man davon das vorige  $AC^2 = SC^2 + AC \cdot SC$  ab, so findet man  $0 = AF^2 - SC^2 + AC(AF - SC) = (AF - SC)(AF + SC + AC)$ , woraus  $AF - SC = 0$ , also  $SC = AF = MB$  folgt; so daß also, wie behauptet,  $CS$  die Sehne von  $\frac{1}{5}$  des halben Umfanges ist.

Nach (§. 137.) ist das Quadrat der Seite des regelmäßigen 5 Ecks gleich der Summe der Quadrate der Seiten des regelmäßigen 6 Ecks und des regelmäßigen 10 Ecks. Nun ist die Seite des regelmäßigen 6 Ecks der Halbmesser  $AC$ , und, wie vorhin gefunden,  $CS$  die Seite des regelmäßigen 10 Ecks: also ist die Seite des regelmäßigen 5 Ecks gleich  $\sqrt{CS^2 + AC^2}$ , und dieses ist, weil bei  $C$  rechte Winkel sind, gleich  $AS$ . Also ist  $AS$  die Sehne von  $\frac{1}{5}$  des ganzen Umfanges.

$\delta$ ) Da man nach (8.) einen beliebigen Kreisbogen durch die grade Linie und den Kreis halbiren kann, so kann man ferner den Umfang, vermittelst seiner Hälfte, seines Drittheils und Fünftheils, in 4, 8, 16, 32.... in 6, 12, 24, 48.... und in 10, 20, 40, 80.... überhaupt in  $2^n$ , in  $3 \cdot 2^n$  und in  $5 \cdot 2^n$  Theile theilen; und da  $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$ , so kann man auch, vermittelst des Unterschiedes von  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{5}$  des Umfanges,  $\frac{2}{15}$  und  $\frac{1}{15}$  des Umfanges finden, und folglich den Umfang auch in  $3 \cdot 5 \cdot 2^n$  gleiche Theile theilen.

## 396.

$\alpha$ ) Den Mittelpunkt einer gegebenen Kreislinie zu finden, ziehe man in derselben zwei beliebige, nicht parallele Sehnen  $AB$  und  $CD$  (Fig. 196.) und auf diese Sehnen nach (391.  $\beta$ ) Perpendikel  $ME$  und  $MF$ , welche sie halbiren. Der Durchschnittspunkt  $M$  der Perpendikel ist der Mittelpunkt der Kreislinie. Denn die schrägen Linien aus allen Punkten des Perpendikels  $ME$  nach  $A$  und  $B$  sind gleich lang (§. 58.) und alle schräge Linien aus Punkten außerhalb  $ME$ , nach  $A$  und  $B$ , sind ungleich lang (§. 63.); eben so die schrägen Linien aus allen Punkten in und außerhalb des Perpendikels  $MF$ , nach  $C$  und  $D$ . Also kann der Mittelpunkt der Kreislinie nur in den Perpendikeln  $ME$  und  $MF$  liegen. Folglich liegt er in ihrem Durchschnitt  $M$ .

$\beta$ ) Nach derselben Regel kann man durch 3 gegebene Punkte, z. B.  $A, B, G$  (Fig. 196.), eine Kreislinie ziehen. Denn die graden Linien  $AB, BG$  und  $GA$ , welche die gegebenen Punkte verbinden, sind Sehnen des gesuchten Kreises. Zieht man also auf zwei derselben Perpendikel, welche sie halbiren, so ist der Durchschnittspunkt dieser Perpendikel der Mittelpunkt einer Kreislinie, in welcher die gegebenen drei Punkte liegen.

$\gamma$ ) Will man, um den Mittelpunkt einer gegebenen Kreislinie zu finden, nicht, wie in ( $\alpha$ .), die grade Linie zu Hülfe nehmen, so ziehe man aus einem beliebigen Punkte  $A$  der gegebenen Kreislinie (Fig. 197.) mit einem beliebigen Halbmesser  $AB$ , welcher kleiner ist als der Durchmesser der gegebenen Kreislinie, und gröfser als der vierte Theil derselben, eine Kreislinie  $BCDE$  und mache  $BC = CD = DE = AB$ , so dafs  $BCDE$  ein Halbkreis und  $BAE$  eine grade Linie ist. Wenn  $F$  der Punkt ist, wo die Kreislinie  $BCDE$  die gegebene Kreislinie schneidet, so ziehe man mit dem Halbmesser,  $FE$  aus  $E$  und  $A$  Bogen, die sich in  $G$  schneiden, und aus  $G$ , mit dem nämlichen Halbmesser, einen Bogen, der die Kreislinie  $BCDE$  in  $H$  schneidet, endlich mit dem Halbmesser  $BH$  aus  $A$  und  $B$  Bogen, die sich in  $M$  schneiden. Der Durchschnitt  $M$  dieser Bogen ist der Mittelpunkt der gegebenen Kreislinie.

Denn wegen  $GA = GE = GH$  ist  $GHA = GAH$  und  $GAE = GEA$ ; und wegen  $HA = AE$ ,  $\triangle HGA = \triangle AGE$ , also  $GAH = GEA$ ,

und weil der äußere Winkel  $GAB = GEA + AGE$  ist,  $GAB = GAH + AGE$ , folglich  $HAB = AGE = HGA$ . Nun ist  $BA = HA$ , eben wie  $GA = GH$ ; also ist, nächst  $HAB = HGA$ ,  $\frac{BA}{HA} = \frac{GH}{GA}$ ; folglich sind die Dreiecke  $HAB$  und  $HGA$  ähnlich, und folglich ist  $\frac{GA}{AH} = \frac{AH}{BH}$ , oder weil  $GA = FE$ ,  $AH = AE$ ,  $AH = BA$  und  $BH = BM$  ist,  $\frac{FE}{AE} = \frac{BA}{BM}$ . Es ist aber  $AE = AF$  und  $BM = AM$ . Also ist auch  $\frac{FE}{AF} = \frac{BA}{AM}$ . Folglich sind die gleichschenkligen Dreiecke  $FAE$  und  $BMA$  ähnlich und folglich ist  $MAB = MBA = AFE = AEF$ . Nun ist der äußere Winkel  $FAB = AFE + AEF = 2AFE = 2MAB$ , also ist  $MAF = MAB$ . Da nun außerdem  $AB = AF$  und  $MA = MA$  ist, so ist  $\triangle MAB = \triangle MAF$ , und folglich, weil  $MB = MA$ ,  $MF = MA$ ; also  $MA = MB = MF$ , woraus folgt daß  $M$  der Mittelpunkt des gegebenen Kreises  $BFA$  ist.

## 397.

$\alpha$ ) Nach einem und demselben Punkte einer gegebenen graden Linie  $DE$  (Fig. 198.) aus zwei gegebenen Punkten  $A$  und  $B$  grade Linien zu ziehen, die mit der gegebenen Linie gleiche Winkel  $ACD = BCE$  machen, ziehe man aus einem der gegebenen Punkte, z. B.  $A$ , nach (391.  $\alpha$ .), auf  $DE$  die senkrechte  $AFG$ , mache  $FG = AF$  und ziehe  $GCB$  grade, so sind  $AC$  und  $BC$  die verlangten Linien; denn wegen  $AF = FG$ ,  $FC = FC$  und  $\angle AFC = \angle GFC = 90^\circ$  ist  $\triangle AFC = \triangle GFC$ , also  $\angle GCF = \angle ACF$ , und weil die Scheitelwinkel  $\angle GCF$  und  $\angle BCE$  gleich sind,  $\angle ACD = \angle BCE$ .

$\beta$ ) Um aus zwei gegebenen Punkten  $A$  und  $B$  (Fig. 199.) grade Linien  $AC$ ,  $CO$ ,  $OP$ ,  $PM$ ,  $MB$  zu ziehen, die mit gegebenen graden Linien  $DE$ ,  $EK$ ,  $KQ$ ,  $QB$  gleiche Winkel  $\angle DCA = \angle OCE$ ,  $\angle COE = \angle POK$ ,  $\angle OPK = \angle MPQ$ ,  $\angle PMQ = \angle BMR$  machen, ziehe man wieder, aus einem der beiden gegebenen Punkte, z. B.  $A$ , auf die erste gegebene grade Linie  $DE$ ,  $AFG$  senkrecht, und mache  $GF = AF$ ; ferner ziehe man aus  $G$  auf die verlängerte gegebene zweite grade Linie  $EK$ ,  $GIL$  senkrecht und mache  $IL = GI$ ; sodann aus  $L$  auf die verlängerte dritte gegebene grade Linie  $KQ$ ,  $LHN$  senkrecht und mache  $HN = LH$ ; eben so aus  $N$  auf die verlängerte vierte gegebene grade Linie  $QB$ ,  $NST$  senkrecht und mache  $ST = NS$  u. s. w. Zieht man alsdann  $FMB$ ,  $NPM$ ,  $LOP$ ,  $GCO$  und  $AC$  grade, so sind die Winkel  $\angle DCA = \angle OCE$ ,  $\angle COE = \angle POK$ ,  $\angle OPK = \angle MPQ$  und  $\angle PMQ = \angle BMR$ ; denn wegen  $AF = FG$ ,  $FC = FC$  und  $\angle AFC = \angle GFC = 90^\circ$  ist,  $\triangle AFC = \triangle GFC$ , also  $\angle GCF = \angle ACF$ , und weil die Scheitelwinkel  $\angle GCF$  und  $\angle OCE$  gleich sind,  $\angle DCA = \angle OCE$ . Eben so ist, wegen  $GI = LI$ ,  $IO = IO$  und  $\angle GIO = \angle LIO$  u. s. w.

## 398.

$\alpha$ ) Aus einem gegebenen Punkte  $A$  (Fig. 200.) an eine gegebene Kreislinie  $DFE$ , deren Mittelpunkt  $C$  ist, Tangenten zu ziehen, halbiere man nach (§. 393.  $\alpha$ .)  $AC$  in  $B$  und



ziehe aus B mit dem Halbmesser  $AB=BC$  eine Kreislinie. In den Punkten D und E, in welchen dieselbe die gegebene Kreislinie schneidet, berühre grade Linien AD und AE aus A den gegebenen Kreis. Denn ADE und AEC sind Umfangswinkel des Kreises ADCE über dem Durchmesser, und folglich rechte. Also stehen AD und AE auf den Endpunkten der Halbmesser DC und EC des gegebenen Kreises senkrecht und sind folglich Tangenten desselben (§. 260. I.), die durch den gegebenen Punkt A gehen.

β) Grade Linien DEC, FGC, MN, PQ (Fig. 201.) zu ziehen, die zwei gegebene Kreise zugleich berühren, ziehe man aus den Mittelpunkten der beiden Kreise A und B beliebige, mit einander parallele Halbmesser, sowohl auf einerlei Seite der graden Linie ABC, welche die Mittelpunkte verbindet, wie AH, BI, als auf verschiedenen Seiten derselben, wie AK, BL. Durch die Durchschnittspunkte H, K, L solcher Halbmesser und der beiden Kreislinien ziehe man grade Linien HC und KC, L. Wo dieselben die grade Linie ABC durch die Kreis-Mittelpunkte schneiden, nämlich in C und C<sub>1</sub>, treffen auch die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise die grade Linie durch die Mittelpunkte. Man darf also nur aus C und C<sub>1</sub>, nach (α.), an den einen Kreis Tangenten CE, CG und C<sub>1</sub>M, C<sub>1</sub>P ziehen, so berühren dieselben auch den andern Kreis. Wenn nämlich AH und BI parallel sind, so sind die Dreiecke CAH und CBI ähnlich. Also ist  $\frac{AC}{BC} = \frac{AH}{BI}$ , oder

$\frac{AB+BC}{BC} = \frac{AH}{BI} = \frac{AB}{BC} + 1$ . Nun sey DE eine Tangente der beiden Kreise, so sind AD und BE auf DE senkrecht (§. 260. III.) und folglich mit einander parallel. X sey der Punkt, in welchem die Tangente DE die grade Linie AB durch die Mittelpunkte trifft, so sind die Dreiecke DAX und EBX ähnlich. Also ist  $\frac{AX}{BX} = \frac{AD}{BE}$ ,

oder  $\frac{AB+BX}{BX} = \frac{AD}{BE} = \frac{AB}{BX} + 1$ . Vorhin war  $\frac{AH}{BI} = \frac{AB}{BC} + 1$ , und die Halbmesser AD, AH und BE, BI sind gleich, so daß  $\frac{AD}{AE} = \frac{AH}{BI}$ :

also ist  $\frac{AB}{BX} + 1 = \frac{AB}{BC} + 1$ , oder  $\frac{AB}{BX} = \frac{AB}{BC}$ , woraus  $BX=BC$  folgt.

Also trifft die Tangente DE an beide Kreise, die grade Linie AB durch die Mittelpunkte in dem nämlichen Punkte, wie die grade Linie HIC durch die Endpunkte beliebiger mit einander paralleler Durchmesser AH und BI. Eben so verhält es sich mit den andern Tangenten der beiden Kreise.

399.

α) Zwei Kreislinien BFHA und BF<sub>1</sub>H<sub>1</sub>A (Fig. 202.) zu finden, welche beide durch zwei gegebene Punkte A und B gehen und zugleich eine gegebene grade Linie E<sub>1</sub>DE berühren, ziehe man die grade ABDK, mache DK=DB, halbiere AK in M, ziehe aus M, mit dem Halbmesser MA, den Kreis KGA, errichte in D das Perpendikel DG auf KA und mache FD=F<sub>1</sub>D=GD, so berühren die gesuchten Kreise die gegebene grade Linie E<sub>1</sub>DE in F und F<sub>1</sub> und gehen also durch die drei Punkte A, B, F und A, B, F<sub>1</sub>. Man kann daher ihre Mittelpunkte C und C<sub>1</sub>

nach (§. 396.) finden und alsdann die Kreise aus  $C$  und  $C_1$  mit den Halbmessern  $CA$  und  $C_1A$  ziehen. Weil nemlich  $DF$  und  $DF_1$  Tangenten sind, so ist  $DF^2 = DF_1^2 = DB \cdot DA$  (§. 277.). Ferner sind in dem Kreise  $KGA$  die rechtwinkligen Dreiecke  $KDG$  und  $ADG$  ähnlich, weil der Umfangswinkel  $KGA = \varphi$  und also  $KGD = \varphi - DGA = GAD$  ist. Also ist  $\frac{KD}{GD} = \frac{GD}{DA}$ , oder  $GD^2 = KD \cdot DA$ , oder weil  $KD = DB$  war,  $GD^2 = DB \cdot DA$ . Vorhin war  $DF^2 = DF_1^2 = DB \cdot DA$ ; also ist  $DF = DF_1 = DG$ .

$\beta$ ) Die Kreislinie  $ABF$  (Fig. 203.) zu finden, welche durch einen gegebenen Punct  $A$  geht und zugleich eine gegebene grade Linie  $DC$  in einem gegebenen Punct  $B$  berührt, ziehe man die grade  $AB$ , halbiere sie in  $E$ , ziehe in  $E$ ,  $EM$  auf  $AB$ , und in  $B$ ,  $MB$  auf  $DC$  senkrecht. Der Durchschnittspunct  $M$  von  $ME$  und  $MB$  ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises  $ABF$ . Denn weil  $AEB = MEB = \varphi$  und  $AE = BE$ ,  $ME = ME$ ; so ist  $\triangle AEM = \triangle BEM$  und folglich  $AM = MB$ . Der Kreis  $ABF$ , welcher durch  $A$  und  $B$  geht, berührt aber  $DC$  in  $B$ , weil zugleich  $MB$ , in  $B$ , auf  $DC$  senkrecht ist.

$\gamma$ ) Zwei Kreislinien  $AED$  und  $AIH$  (Fig. 204.) zu ziehen, welche zwei gegebene grade Linien  $BP$  und  $BQ$  berühren und zugleich durch einen gegebenen Punct  $A$  gehen, der innerhalb des Winkels liegt, welchen die Linien einschließen, halbiere man den gegebenen Winkel  $PBQ$ , ziehe auf die halbirende Linie  $BCC_1$ , aus dem gegebenen Puncte  $A$ , die grade Linie  $AFG$  senkrecht, mache  $GF = FA$  und suche nach ( $\alpha$ .) die beiden Kreise, welche durch die beiden Puncte  $A$  und  $G$  gehen und zugleich eine der beiden gegebenen graden Linien  $BP$  oder  $BQ$  berühren. Diese Kreise sind die verlangten und berühren auch die andere gegebene grade Linie. Die Mittelpuncte aller,  $BP$  und  $BQ$  berührenden Kreise, also auch die Mittelpuncte der beiden gesuchten Kreise, liegen nämlich in der den Winkel  $PBQ$  halbirenden graden Linie  $BCC_1$  (§. 266.).  $GFA$  ist also eine Sehne und  $BC$  ein Durchmesser: also steht  $GFA$  auf  $BC$  senkrecht und  $GF$  ist gleich  $FA$  (§. 253. VI.).

$\delta$ ) Zwei Kreislinien zu finden, welche zwei gegebenen grade Linien  $BDD_1$  und  $BEE_1$  (Fig. 205.) und einen gegebenen Kreis  $KRS$  zugleich berühren, ziehe man mit den gegebenen graden Linien, in Entfernungen die dem Halbmesser  $MK$  des gegebenen Kreises gleich sind, Parallelen  $FG$ ,  $F_1G_1$  und  $HI$ ,  $F_1I_1$ , und suche nach ( $\beta$ .) die Mittelpuncte der Kreise  $PMQ$ ,  $P_1MQ$ , etc., welche die Parallelen  $FG$ ,  $HI$  und  $F_1G_1$ ,  $F_1I_1$  berühren und zugleich durch den Mittelpunkt  $M$  des gegebenen Kreises  $KRS$  gehen. Die nemlichen Mittelpuncte haben die gesuchten Kreise, welche  $BD$  und  $BE$  und den Kreis  $KRS$  berühren. Die gesuchten Kreise können dann aus diesen Mittelpuncten gezogen werden, wenn man die Halbmesser um  $KM$  kleiner nimmt. Denn z. B. der gesuchte Kreis  $DKE$  berührt die gegebenen graden Linien  $BD$  und  $BE$  und den gegebenen Kreis  $KRS$ , wo auch der Mittelpunkt  $M$  des letztern, in einer mit der gesuchten concentrischen Kreislinie  $PMQ$ , liegen mag, also auch dann, wenn  $M$  in den Parallelen  $FG$  oder  $HI$ , also in den Puncten  $P$  und  $Q$  liegt, in welchen die Kreislinie  $PMQ$  die Parallelen  $FG$  und  $HI$  berührt. Eine Kreislinie  $PMQ$ , welche diese Parallelen berührt und zugleich durch den Mit-



telpunct des gegebenen Kreises geht, hat also mit der gesuchten Kreisl Linie  $DKE$  den Mittelpunct gemeinschaftlich, und ihr Halbmesser ist um  $KM$  grösser. Eben so verhält es sich mit den andern gesuchten Kreisl inien. Liegt der Mittelpunct des gegebenen Kreises  $M$  innerhalb der Parallelen  $F_1G_1$  und  $F_1I_1$ , so giebt es vier gesuchte Kreise; liegt  $M$ , wie in der Figur, zwischen zwei Parallelen, so giebt es ihrer nur zwei.

e) Eine Kreisl inie zu ziehen, welche drei andere gegebene Kreisl inien  $UVW$ ,  $\alpha\beta\gamma$  und  $\delta\epsilon\varphi$  (Fig. 157.) berührt, ziehe man, concentrisch mit den beiden grössern gegebenen Kreisen  $\alpha\beta\gamma$  und  $\delta\epsilon\varphi$ , die Kreisl inien  $GHI$  und  $DEF$ , deren Halbmesser um den Halbmesser des kleinsten Kreises  $UVW$  kleiner sind. Ferner aus dem Mittelpuncte  $A$  des kleinsten Kreises, innerhalb, Tangenten  $AK$  und  $AN$  an die beiden andern Kreise  $GHI$  und  $DEF$ . Sodann mache man  $AC_1 = AC$ , ziehe  $C_1C_2$  mit  $KN$  parallel, mache  $AC_3 = AC_1$ , ziehe  $C_3C_4$  mit  $KN$  parallel, und mache  $AC_5 = AC_4$ . Auf gleiche Weise mache man  $AT$  gleich dem Halbmesser  $CN$ , ziehe  $TT_1$  mit  $KN$  parallel, mache  $AT_2 = AT_1$  und ziehe  $T_2T_3$  mit  $KN$  parallel. Hierauf ziehe man mit dem Halbmesser  $AT_3$  aus  $C_5$  eine Kreisl inie  $F_2MF_3$ . An diese Kreisl inie und die gegebene Kreisl inie  $GHI$  lege man die Tangente  $MI$ , und ziehe durch die Berührungspuncte  $M$  und  $I$  und durch  $A$ , die graden Linien  $AI$  und  $AM$ . Der Mittelpunct  $X$  eines Kreises  $ADG$ , welcher durch die beiden Puncte  $G$  und  $D$ , in welchen  $AI$  und  $AM$  die Kreise  $GHI$  und  $DEF$  schneiden, und durch den Punct  $A$  geht, ist zugleich der Mittelpunct des gesuchten Kreises  $pqr$ , welcher die drei gegebenen Kreise  $UVW$ ,  $\alpha\beta\gamma$  und  $\delta\epsilon\varphi$ , und zwar innerhalb, berührt. Den Kreis, welcher die gegebenen Kreise ausserhalb berührt, findet man durch ein gleiches Verfahren, wenn man damit anfängt, um  $B$  und  $C$ , concentrisch mit  $\alpha\beta\gamma$  und  $\delta\epsilon\varphi$ , Kreise zu ziehen, deren Halbmesser um den Halbmesser des kleinsten Kreises grösser sind, statt dass sie vorhin um eben so viel kleiner waren. Wenn nämlich  $LF$  und  $IM$  parallele Tangenten an den gegebenen Kreisl inien  $DEF$  und  $GHI$  sind, so ist zu Folge (§. 290.)

$$\frac{AK^2}{AN^2} = \frac{AM}{AE}. \text{ Nun war } AC_1 = AC \text{ und } C_1C_2 \text{ mit } KN \text{ parallel, so}$$

dass die Dreiecke  $KAN$  und  $C_2AC_1$  ähnlich sind: also ist  $\frac{AK}{AN} = \frac{AC}{AC_1}$ ,

$$= \frac{AC_2}{AC}, \text{ also } AC_2 = \frac{AK}{AN} \cdot AC. \text{ Ferner war } AC_3 = AC_1 \text{ und } C_3C_4$$

mit  $C_1C_2$  parallel, so dass die Dreiecke  $C_4AC_3$  und  $C_2AC_1$  ähnlich sind; also ist  $\frac{AC_2}{AC_1} = \frac{AC_4}{AC_3}$ , oder  $\frac{AC_2}{AC} = \frac{AC_4}{AC_3}$ , also  $AC_4$

$$= \frac{AC_2^2}{AC}, \text{ folglich, weil } AC_2 = \frac{AK}{AN} \cdot AC \text{ war, } AC_4 = \frac{AK^2}{AN^2} \cdot AC, \text{ oder}$$

$$\frac{AC_4}{AC} = \frac{AK^2}{AN^2}. \text{ Nun war } AC_5 = AC_4, \text{ also ist } \frac{AC_5}{AC} = \frac{AK^2}{AN^2}. \text{ Eben}$$

so ist, wenn man  $AT = CN = CF$  macht,  $TT_1$  mit  $KN$  parallel zieht,  $AT_2 = AT_1$  macht und  $T_2T_3$  mit  $KN$  parallel zieht,

$$\frac{AT_3}{AT} = \frac{AK^2}{AN^2}; \text{ also, weil } AT = CF \text{ war, wenn man } C_5M = AT_3 \text{ macht,}$$

$$\frac{C_5M}{CF} = \frac{AK^2}{AN^2}. \text{ Nun ist die grade Linie } MI \text{ eine Tangente an den}$$

Kreis um  $C_5$  und an den gegebenen Kreis um  $B$ ; sie steht also auf den Halbmessern  $BI$  und  $C_5M$ , durch die Berührungspunkte, senkrecht. Ist nun  $LF$  eine mit  $MI$  parallele Tangente an den gegebenen Kreis um  $C$ , so ist auch der Halbmesser  $CF$  auf  $KF$  senkrecht, folglich ist alsdann  $C_5M$  mit  $CF$  parallel. Da nun  $\frac{C_5M}{CF} = \frac{AK^2}{AN^2}$  und  $\frac{AC_5}{AC} = \frac{AK^2}{AN^2}$  war, also  $\frac{C_5M}{CF} = \frac{AC_5}{AC}$  ist, so sind in den Dreiecken  $ACF$  und  $AC_5M$ , wegen der Parallelen  $C_5M$  und  $CF$ , die Winkel bei  $C$  und  $C_5$  gleich, und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, Gleichvielfache; folglich sind die Dreiecke ähnlich und ihre Winkel bei  $A$  sind gleich, so daß  $A$ ,  $F$  und  $M$  in grader Linie liegen, und  $\frac{AM}{AF}$  ist gleich  $\frac{AC_5}{AC}$ , gleich  $\frac{AK^2}{AN^2}$ . Da nun diejenigen parallelen Tangenten  $LF$  und  $IM$  an die beiden gegebenen Kreise um  $C$  und  $B$ , für welche  $\frac{AM}{AF} = \frac{AK^2}{AN^2}$  ist, zu Folge des Satzes (§. 290.) die Eigenschaft haben, daß ihre Berührungspunkte  $F$  und  $I$  mit den Berührungspunkten  $D$  und  $G$  des Kreises um  $X$ , welcher die mit den zwei gegebenen, concentrischen Kreise  $DEF$  und  $GHI$  berührt, und durch den Mittelpunkt  $A$  des dritten geht, in grader Linie liegen, und jetzt  $F$  mit  $A$  und  $M$  in grader Linie liegt, so sind die Berührungspunkte  $D$  und  $G$  die Durchschnittspunkte der graden Linien  $AM$  und  $AI$  mit den Kreisen  $DEF$  und  $GHI$  und der Mittelpunkt  $X$  des gesuchten, die drei gegebenen berührenden Kreises, ist der Mittelpunkt eines Kreises  $PQR$  durch  $D$ ,  $G$  und  $A$ .

## 400.

Wenn zwei Seiten  $AC$  und  $BC$  eines Vierecks  $ADCB$  (§. 396.), ferner die Diagonal  $AB$  an diesen beiden Seiten, oder auch statt ihrer der Winkel  $BCA$ , welchen die beiden Seiten einschließen, desgleichen die beiden Winkel  $ADC$  und  $BDC$  an der andern Diagonal, den gegebenen Seiten gegenüber, gegeben sind, und man soll das Viereck finden, so zeichne man mit den gegebenen Stücken zuerst das Dreieck  $ACB$  und lege nach (394.  $\alpha$ .) an die gegebenen Seiten  $AC$  und  $BC$  die gegebenen Winkel, ihnen gegenüber, nemlich  $CAE = CDA$  und  $CBF = CDB$ , suche darauf nach (399.  $\beta$ .) die Mittelpunkte der Kreise  $P$  und  $Q$ , welche  $AE$  und  $BF$  berühren und zugleich durch  $A$  und  $C$ ,  $B$  und  $C$  gehen, nemlich dadurch, daß man  $AC$  in  $G$ ,  $BC$  in  $H$  halbiert und  $GP$  auf  $AC$ ,  $HQ$  auf  $BC$ , desgleichen  $PA$  auf  $EA$ ,  $QB$  auf  $FB$  senkrecht zieht, von welchen Perpendikeln die Durchschnitte  $P$  und  $Q$  die gesuchten Mittelpunkte geben, so ist der zweite Durchschnittspunkt  $D$  dieser beiden Kreise die vierte Ecke des Vierecks, und das verlangte Viereck ist  $ADBC$ . Denn jeder Winkel im Umfange des Kreises um  $P$ , über der Sehne  $AC$  ist dem Winkel  $CAE$  zwischen der Sehne und der Tangente  $AE$  gleich (§. 275. I.): Also ist auch  $CDA = CAE$ . Eben so ist  $CDB = CBF$ . Also haben die Winkel  $CDA$  und  $CDB$  mit dem gemeinschaftlichen Schenkel  $CD$  die verlangte Größe, und folglich ist  $ADBC$  das gesuchte Viereck.

Durch Rechnung ist diese Aufgabe in (§. 380.) gelöst.

Fallen die Mittelpunkte der beiden Kreise, deren Durchschnitt den gesuchten Punkt  $D$  giebt, zusammen, nemlich wenn das gesuchte

Viereck centrisch nach den Ecken ist, so läßt sich aus den gegebenen Stücken das gesuchte Viereck nicht finden. Man sehe auch (§. 380. Anm.).

## 401.

*Wenn der Durchmesser eines Kreises gegeben ist, so läßt sich zwar eine grade Linie, welche genau so lang ist als der Umfang des Kreises, weder durch Zeichnung finden, noch durch Zahlen und Brüche ausdrücken; dagegen aber kann man durch Zeichnung, auf mancherlei Art, grade Linien finden, deren Länge der Länge des Umfanges sehr nahe kommt.*

*α) Eins der leichtesten Mittel ist, daßs man die Seite  $AE = EF = FA$  (Fig. 207.) des dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Dreiecks und die Seite des regelmäßigen Vierecks  $AB = BC = CD = DA = GF$  in eine grade Linie  $AFG$  zusammengesetzt. Die Summe  $AG$  dieser Linien ist nur um etwa den 214ten Theil des Halbmessers von der Länge des halben Kreis-Umfanges verschieden. Denn da der Umfangs-Winkel  $ABC$  ein rechter und  $AB = BC$  ist, so ist  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ , also  $AB^2 = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}4AM^2 = 2AM^2$  und  $AB = FG = AM\sqrt{2}$ . Da auch der Umfangs-Winkel  $AEC$  ein rechter ist, so ist  $AE^2$  oder  $EF^2 = AC^2 - EC^2 = 4AM^2 - EC^2$ , und da  $EC = AM$ ,  $EF^2 = 4AM^2 - AM^2 = 3AM^2$ , also  $EF = AM\sqrt{3}$ ; folglich ist  $FG = AM(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ . Nun ist  $\sqrt{2} = 1,4142136$  und  $\sqrt{3} = 1,7320508$ ; also  $AG = 3,1462644 AM$ . Der halbe Umfang  $ABEC$  ist gleich  $\frac{1}{2}\pi$ ,  $AM = 3,1415926 AM$ . Also ist  $AG$  nur um  $0,0046718 AM$ , oder um etwa den 214ten Theil des Halbmessers von der Länge des halben Umfanges verschieden.*

*β) Noch genauer und ebenfalls sehr leicht findet man eine grade Linie, die so lang ist als ein bestimmter Theil des Kreis-Umfanges, durch Zeichnung, auf folgende Weise. Man nehme, wie vorhin,  $AH = HE = EC =$  dem Halbmesser  $AM$ , beschreibe mit dem Halbmesser  $AE = CH$ , aus  $A$  und  $C$  Bogen, die sich in  $I$  schneiden und aus  $H$  mit dem Halbmesser  $HI$  einen Bogen  $IK$ , der den Kreis-Umfang in  $K$  schneidet, so kommt die Länge der Sehne  $AK$  der Länge des vierten Theils  $AHB$  vom Kreis-Umfange sehr nahe. Die Länge der Sehne  $AK$  ist, wenn man den Halbmesser gleich 1 setzt, gleich  $1,5711996$ , die Länge des vierten Theils vom Kreis-Umfange ist  $1,5707663$ ; also die Sehne nur um  $0,0004333$ , oder um etwa  $\frac{1}{2300}$  des Halbmessers länger. Man findet diese Zahlen, wenn man aus den beiden Seiten  $AH = 1$  und  $AI = AE = \sqrt{3}$  des Dreiecks  $HAI$ , nebst dem eingeschlossenen Winkel  $HAI = HAM - IAM$ , die Seite  $HI = HK$  berechnet, und die zu der Summe der Winkel  $AMH$  und  $HMK$  gehörige Sehne  $AK$  nimmt.*

## 402.

*Zu finden, wie oft eine gegebene grade Linie  $AB$  (Fig. 208.) in einer andern  $CD$  enthalten ist.*

*Erste Art. Man versuche, wie oft sich  $AB = CE = EF$  von der Linie  $CD$  wegnehmen läßt, bis ein Rest  $FD$  bleibt, der kleiner ist als  $AB$ ; es geschehe z. B. 2mal. Hierauf versuche man, wie oft sich der Rest  $FD = CG = GH$ , umgekehrt von der Linie  $AB = CE$  wegnehmen läßt, bis ein Rest  $HE$  bleibt, der kleiner ist als  $AB$ ; es geschehe wiederum 2mal. Man versuche, wie oft sich der*

neue Rest HE von dem vorigen Rest  $FD = CG$  wegnehmen läßt, bis ein Rest IG bleibt, der kleiner ist als HE; es geschehe 1mal. Man versuche wie oft sich der neue Rest IG von dem vorigen Rest  $HE = CI$  wegnehmen läßt, bis ein Rest bleibt, der kleiner ist als IG, welches 3mal seyn mag; und so immer fort: so kann man, so genau als man will, finden, wie oft AB in CD enthalten ist.

In dem Beispiel ist

$$CD = 2AB + FD$$

$$AB = 2FD + HE$$

$$FD = 1HE + IG$$

$$HE = 3IG + MI \text{ u. s. w.}$$

Ist der letzte Rest MI so klein, daß man ihn weglassen kann, so findet man  $IG = \frac{HE}{3}$ , also  $FD = HE + \frac{HE}{3} = HE \left(1 + \frac{1}{3}\right)$  und

$$HE = FD \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}, \text{ folglich } AB = 2FD + FD \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = FD \cdot \left(2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}\right)$$

$$\text{und } FD = AB \cdot \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}, \text{ folglich } CD = 2AB + AB \cdot \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

$$= AB \cdot \left(2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}\right). \text{ So findet man in Zahlen, durch einen}$$

Kettenbruch ausgedrückt, wie oft AB in CD enthalten ist. Man kann daraus, zufolge Rechenkunst (§. 171.), auch gewöhnliche Brüche in den kleinsten Zahlen, finden, die das nemliche ausdrücken.

Statt jedesmal den neuen Rest von dem vorigen wegzunehmen, kann man auch alle Reste von der ursprünglichen Linie wegnehmen, welches ebenfalls Brüche giebt, die das verlangte bezeichnen.

*Zweite Art.* Man theile die eine der beiden zu vergleichenden Linien z. B. CD (Fig. 208.) in eine beliebige Zahl gleicher Theile, z. B. in 10 gleiche Theile, auch wohl den ersten oder letzten dieser Theile wiederum in eben so viele Theile, und so ferner, bis die Theile so klein sind, daß sie sich nicht unmittelbar weiter theilen lassen. Gesetzt  $CK = KG$  etc. (Fig. 209.) sey einer der letzten oder kleinsten 10 Theile, so errichte man auf CD durch die Theilungs-Puncte, Perpendikel CE, KF, GH etc., ziehe mit CD, in beliebigen gleichen Entfernungen  $CM = MN$  etc. von einander, Parallelen  $MM_1, NN_1$  etc. und verbinde die auf einander folgenden Theilungs-Puncte von CD und der äußersten Parallele EL, durch grade Linien KE, GF etc., so geben diese Linien KE, GF etc. noch sichtbare Unterabtheilungen des kleinsten Theils CK von CD, der sich an sich selbst nicht weiter theilen ließe; denn z. B. der Theil  $M_2 M_3$ , welchen die Linie EK, mit FK, von der Linie  $MM_1$  abschneidet, ist der 10te Theil von  $CK = EF$ , wenn EC durch die Parallelen in 10 gleiche Theile getheilt wird;  $N_2 N_3$  ist  $\frac{2}{10}$  von CK; u. s. w.

Die mit CD parallel gemessenen Entfernungen von Puncten in den beiden Linien EK und FK, welche zwischen zwei auf einander folgenden Parallelen liegen, geben wiederum noch Theile von den Zehntheilen der Linie CK. Ist z. B. die gegebene Linie AB (Fig. 208.) gleich der mit CD parallelen Linie XY (Fig. 209.), und XS ist gleich  $\frac{1}{10} RS$ , so ist  $AB = UD + SV + \frac{1}{10}(RW - SV) = 4CK + \frac{1}{10}CK + \frac{1}{10}CK = 4,53CK = 0,453 CD$ .

Theilt man, statt der gegebenen Linie  $CD$ , die Einheit des Längenmaasses so ein, wie  $CD$ , so heisst die Figur *verjüngter Maassstab*, und da man nun dadurch finden kann, wieviel Theile jede beliebige Linie von der Einheit des Maasses enthält, so kann man auch die Länge beliebiger Linien auf diese Weise mit einander vergleichen.

*Dritte Art.* Man theile die eine von den beiden gegebenen Linien, z. B.  $CD$ , in eine beliebige Zahl gleicher Theile, z. B. in 10 Theile, wie (Fig. 210.), verlängere sie, mit gleicher Theilung, nach  $DK$ , und lege die andere Linie  $AB$  an die eingetheilte Linie, und zwar einen Endpunkt der einen Linie an einen Endpunkt der andern, z. B.  $A$  an  $C$ . Der andere Endpunkt  $B$  von  $AB$  falle in  $E$ , so kommt es nur darauf an, die Länge  $FE$ , vom nächsten Theilungspunkt  $F$  der Linie  $CD$ , bis an  $E$ , zu schätzen; denn  $AB$  ist gleich  $FE + CF = FE + \frac{1}{10}CD$ . Diesen Theil  $FE$  zu messen, theile man eine dritte Linie, welche so lang ist als eine beliebige Zahl von gleichen Theilen der Linie  $CD$ , z. B. die Linie  $MN = CG$ , welche 7 Zehnthelle von  $CD$  enthält, in einen Theil mehr, oder in einen Theil weniger, also in 8, oder in 6 gleiche Theile. Man lege die dritte Linie, mit einem ihrer Endpunkte  $M$ , an den Punkt  $B$  der Linie  $CD$ . Trifft alsdann irgend ein Theilungs-Punkt der Linie  $MN$  grade mit irgend einem Theilungs-Punkte der Linie  $CD$ , oder ihrer Verlängerung zusammen, z. B.  $P$  mit  $L$ , so dass  $MP = EL$ , so lässt sich die Länge  $FE$  bis auf Bruchtheile von  $CD$  schätzen, deren Nenner, wenn  $CG$  in  $n$  Theile und  $MN = CG$  in  $n + 1$  Theile getheilt worden,  $n(n + 1)$  ist, also bis auf Theile die viel kleiner sind als die von  $CD$ . Weil nemlich  $MN = CG$  seyn soll, so gehen  $n$  Theile von  $CD$  auf  $n + 1$  Theile von  $MN$ ; folglich enthält jeder Theil von  $CD$ ,  $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$  Theile von  $MN$ , und jeder Theil von  $CD$  ist also um  $\frac{1}{n}$  eines Theils  $MQ$  von  $MN$  gröfser, als jeder Theil von  $MN$ . Fällt also z. B., wenn man  $M$  in  $E$  legt,  $P$  in  $L$ , so ist die Länge  $CD$ , von  $C$  an bis zum nächst vorhergehenden Theilungspunkt  $D$ , um  $DD_1 = \frac{1}{n} MQ$  kürzer als  $CD_1$ , die Länge  $CB$  um  $BB_1 = \frac{2}{n} MQ$  kürzer als  $CB_1$ , die Länge  $CS$  um  $SS_1 = \frac{3}{n} MQ$  kürzer als  $CS_1$ , die Länge  $CG$  um  $GG_1 = \frac{4}{n} MQ$  kürzer als  $CG_1$ , die Länge  $CH$  um  $HH_1 = \frac{5}{n} MQ$  kürzer als  $CH_1$ , und endlich die Länge  $CF$  um  $FM = \frac{6}{n} MQ$  kürzer als die Länge  $CM$ ; und da nun, nach der Voraussetzung  $M$  in  $E$  fällt, so ist  $FM_1 = FE$  und folglich das gesuchte  $FE = \frac{6}{n} MQ$ . Nun war  $MQ = \frac{MN}{n+1}$ , also ist  $FE = \frac{6}{n(n+1)} MN$ , so dass man also  $FE$  bis auf  $n(n+1)$  Theile des beliebigen Stückes  $MN$  von  $CD$  genau findet. Zu der dritten Hülfslinie  $MN$  kann man wieder die Einheit des Maasses nehmen, oder wenigstens  $CD$  in Theile theilen, die in der Einheit des Maasses aufgehen.

Besonders ist diese Art, kleinere Theile einer Länge zu messen, bei der Ausmessung von Kreisbogen oder Winkeln gewöhnlich. Wenn man z. B.  $14\frac{1}{2}$  Grade oder 29 halbe Grade in 30 Theile theilt und einen beweglichen Bogen macht, der mit den 30 Theilen an einen in Grade getheilten Rand oder Limbus eines Kreises hergeschoben werden kann, so läßt sich dadurch ein beliebiger Bogen bis auf den  $29 \times 30$ sten Theil von den 29 halben Graden oder bis auf den 30sten Theil von einem halben Grade, also bis auf eine Minute messen. Ein solcher Bogen heißt, nach seinem Erfinder, Nonius oder Vernier.

## 403.

*α) Ein Quadrat AC (Fig. 211.) zu finden, welches so groß ist als ein gegebenes Rechteck AF, setze man die eine Seite AE des Rechtecks, in grader Linie, an die andere anstoßende Seite AG, nemlich in AH, halbiere HG in M, ziehe den Halbkreis HBG und verlängere AE bis in B, an den Umfang des Kreises, so ist AB die Seite eines Quadrats AC, welches so groß ist, als das gegebene Parallelogramm AF. Denn die rechtwinkligen Dreiecke HAB und BAG sind ähnlich, weil  $HBG = \varphi$ , also  $HBA = \varphi - ABG = AGB$  ist. Also ist  $\frac{HA}{AB} = \frac{AB}{AG}$ , und folglich  $AB^2 = AH \cdot AG = AE \cdot AG$ ; und da nun  $AB^2$  den Inhalt des Quadrats AC,  $AE \cdot AG$  den Inhalt des Parallelogramms AF ausdrückt, so ist das Quadrat AC so groß als das Parallelogramm AF.*

*β) Will man ein Quadrat zeichnen, welches so groß ist als ein beliebiges Parallelogramm AK, so darf man nur statt der Seite AI die Höhe AE des Parallelogramms an die Grundlinie setzen; das übrige Verfahren bleibt das nämliche.*

*γ) Verlangt man ein Quadrat AC, welches so groß ist, als ein gegebenes Dreieck ALG, so setze man die halbe Höhe  $PN = LP$  des Dreiecks, in AH, an seine Grundlinie, und verfähre wie vorhin. Denn das Dreieck ALG ist so groß als das Rechteck AF von gleicher Grundlinie und der halben Höhe des Dreiecks.*

*δ) Verlangt man ein Quadrat, welches so groß ist als eine beliebige, von graden Linien umschlossene Figur ABCDEFG (Fig. 212.), so darf man nur erst ein Dreieck von gleicher Größe suchen. Man ziehe z. B. AH mit der Diagonal GB parallel und verlängere BC bis in H; so haben die Dreiecke ABG und HBG gleiche Grundlinien GB, und zwischen den Parallelen AH und GB, gleiche Höhe. Sie sind also gleich groß, und folglich ist auch das Dreieck GHC so groß als das Viereck GABC. Man ziehe HI mit der Diagonal GC parallel, so haben die Dreiecke GHC und GIC gleiche Grundlinien GC, und zwischen den Parallelen HI und GC gleiche Höhe und sind folglich gleich groß. Mithin ist auch das Dreieck GID so groß als das Viereck GHCD, und folglich so groß als das Fünfeck GABCD. Führt man so fort, so kann man ein Dreieck finden, welches so groß ist als die gegebene vielseitige Figur ABCDEFG. Sucht man alsdann, nach (γ), ein Quadrat, welches so groß ist als das Dreieck, so hat man auch ein Quadrat, welches so groß ist als die gegebene Figur.*

Man nennt auch dergleichen Verfahren, Figuren zu zeichnen, welche so groß sind als andere: die gegebenen Figuren verwandeln.



Die Verwandlung der Figuren durch Zeichnung, um etwa den Inhalt einer gegebenen Figur an der verwandelten einfacheren Figur leichter berechnen zu können, sind nie rathsam, weil man durch die verwickelte Zeichnung auf dem Papiere zu sehr an der Genauigkeit verliert; auch sind sie schwerlich jemals nöthig, weil zu der Berechnung des Inhalts einer gradlinigen Figur nur die ersten Elemente der Rechenkunst, nemlich das Multipliciren von ganzen Zahlen und Brüchen gehört. Es ist, um den Inhalt einer Figur zu finden, immer besser, dieselbe nach (§. 188.) in Dreiecke zu theilen, Grundlinien und Höhen der Dreiecke auf einem verjüngten Maassstabe zu messen, und danach den Inhalt in Zahlen zu berechnen.

## 404.

*α) Ein Quadrat zu finden, welches so groß ist als zwei oder mehrere, beliebige andere Quadrate zusammen genommen, setze man erst auf die Seite AB das eine Quadrats, rechtwinklig, und durch den Endpunct derselben, die Seite BC eines andern Quadrats, so ist die Hypothenuse CA des rechtwinkligen Dreiecks ABC die Seite eines Quadrats, welches so groß ist als die Quadrate über AB und BC zusammen genommen. Denn es ist in dem rechtwinkligen Dreieck ABC,  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ . Man setze von neuem die Seite eines dritten Quadrats CD rechtwinklig auf CA, so ist die Hypothenuse AD die Seite eines Quadrats, welches so groß ist, als die Quadrate über AC und CD, und folglich so groß, als die drei Quadrate über AB, BC und CD zusammen genommen u. s. w.*

*β) Ganz auf dieselbe Weise kann man eine Figur finden, die so groß als mehrere beliebige ähnliche Figuren zusammen genommen, und ihnen allen ähnlich ist. Denn der Inhalt ähnlicher Figuren und die Quadrate ihrer Seiten sind Gleichvielfache (§. 205.). Eine beliebige Seite derjenigen ähnlichen Figur, welche so groß ist als alle die gegebenen ähnlichen Figuren zusammen genommen, wird also eben so gefunden, als wenn die Figuren bloß Quadrate über diesen Seiten wären; folglich nach (α.).*

*γ) Wenn die Quadrate, oder die ähnlichen Figuren, deren Summe man in eine, ebenfalls ähnliche Figur zusammenziehen will, gleich groß sind, also wenn bloß eine ähnliche Figur gesucht wird, die 2, 3, 4 etc. mal so groß ist als eine gegebene Figur, so kann man auch die Seiten der gesuchten Figur, ohne Hülfe der graden Linie, bloß durch den Kreis finden. Man beschreibe mit der Seite AM (Fig. 214.) der gegebenen Figur, um die ähnlich liegende Seite der mehrfach größeren Figur zu finden, als Halbmesser, einen Kreis und mache  $AB = BC = CD = DE = EF = FA = MA$ . Man beschreibe ferner mit dem Halbmesser  $AC = BD$ , aus A und D, zwei Kreise, die sich in G und H schneiden, sodann aus C und E, mit dem nemlichen Halbmesser, zwei Kreisbogen, die sich in I schneiden. Ferner mit dem Halbmesser MG, aus A und D, Kreisbogen, die sich in L und P schneiden, und endlich aus A und L, mit dem Halbmesser AM, Kreisbogen, die sich in K schneiden, so ist*

MG<sup>2</sup>

$$\begin{array}{ll}
 MG^2 = 2AM^2 & BI^2 = 7AM^2 \\
 AC^2 = 3AM^2 & GH^2 = 8AM^2 \\
 AD^2 = 4AM^2 & AI^2 = 9AM^2 \\
 DK^2 = 5AM^2 & KI^2 = 10AM^2 \\
 GI^2 = 6AM^2 &
 \end{array}$$

denn in dem rechtwinkligen Dreieck  $ACD$  ist  $CD = AM$  und  $AD = 2AM$ , also  $AC^2 = 4AM^2 - AM^2 = 3AM^2$ . Ferner ist, weil  $AG = AC$  seyn soll, in dem rechtwinkligen Dreieck  $AMG$ ,  $MG^2 = AG^2 - AM^2 = 3AM^2 - AM^2 = 2AM^2$ . Ferner ist  $AD^2 = 4AM^2$ . Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreiecke  $KAD$ ,  $KD^2 = AK^2 + AD^2$  und weil  $AK = AM$ ,  $KD^2 = 4AM^2 + AM^2 = 5AM^2$ . Ferner ist  $MO = QD$ , also weil  $OI = QA$ ,  $DI = AM$  und  $MI = 2AM$ , folglich wegen  $GI^2 = GM^2 + MI^2$ ,  $GI^2 = 2AM^2 + 4AM^2 = 6AM^2$ . Ferner ist  $AR = \frac{1}{2}AM$ , also  $BR^2 = AM^2 - \frac{1}{4}AM^2 = \frac{3}{4}AM^2$  und  $RI = 2\frac{1}{2}AM$ , also  $RI^2 = 6\frac{1}{4}AM^2$ , mithin  $BI^2$  oder  $BR^2 + RI^2 = 7AM^2$ . Ferner war  $MG^2 = 2AM^2$  und  $GH$  ist gleich  $2GM$ . Also ist  $GH^2 = 2(2AM)^2 = 8AM^2$ . Ferner ist  $AI = 3AM$ , also  $AI^2 = 9AM^2$ , und endlich ist, wegen  $KH = AM$ ,  $KI^2 = 9AM^2 + AM^2 = 10AM^2$ . Die Quadrate über den Linien  $MG$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $DK$ ,  $GI$ ,  $BI$ ,  $GH$ ,  $AI$  und  $KI$  sind also 2, 3, 4, 5 . . . . 10 mal so groß als das Quadrat über der Linie  $AM$ , und da die Inhalte beliebiger ähnlicher Figuren und die Quadrate über ähnlichliegenden Seiten Gleichvielfache sind, so sind zugleich  $MG$ ,  $AC$ ,  $BD$  etc. die Seiten ähnlicher Figuren, welche 2, 3, 4 etc. mal größer sind als die gegebene Figur, mit der ähnlichliegenden Seite  $AM$ .

Mit den obigen 9 Linien kann man auch alle größeren Vielfachen finden. Wenn z. B. eine 31 mal größere Figur als die mit der Seite  $AM$  verlangt wird, so nehme man  $AM$  6 mal, welches eine 36 mal größere Figur geben würde, ziehe einen Kreis  $PQRS$  (Fig. 215.), dessen Durchmesser  $6AM$  ist. Man mache  $PQ = QR = RS$  dem Halbmesser gleich und setze die Linie  $DK$  (Fig. 214.), welche eine  $36 - 31 = 5$  mal größere Figur giebt von  $S$  nach  $Z$ , so ist  $PZ$  die Seite der 31 mal größeren Figur; denn da  $PS^2 = 36AM^2$ ,  $ZS = 5AM^2$  und das Dreieck  $PZS$  rechtwinklig ist, so ist  $PZ^2 = 36AM^2 - 5AM^2 = 31AM^2$ . Da die Quadrate bis 36 um nicht mehr als 1 + 10 verschieden sind, so kann man mit den obigen 10 Vielfachen alle Vielfachen bis zum 36fachen finden und mit diesen Vielfachen findet man die folgenden größeren Vielfachen auf eine ähnliche Weise weiter.

8) Die Seite eines Quadrats oder einer beliebigen andern Figur, deren Inhalt  $\frac{m}{n}$  mal so groß ist, als der Inhalt eines gegebenen Quadrats oder einer andern, der gesuchten ähnlichen Figur, kann man wie folgt finden. Die Seite des gegebenen Quadrats oder der gegebenen Figur sey  $AC$  (Fig. 216.), so theile man  $AC$  in  $m$  gleiche Theile und mache in der graden Linie  $CAB$ ,  $AB$  gleich  $n$  solcher Theile, halbiere  $BC$  in  $M$ , ziehe den Halbkreis  $BDC$ , errichte  $AD$  auf  $BC$  in  $A$  senkrecht, mache  $AE = AD$ , ziehe unter einem beliebigen Winkel  $FAE$  die grade  $AF$ , mache  $AF = AC$ , ziehe die grade  $FE$  und mit ihr durch  $C$  parallel, die grade  $GC$ ; so ist  $AG$  die ähnlich liegende Seite der gesuchten Figur, deren Inhalt  $\frac{m}{n}$  mal der



Inhalt der gegebenen Figur ist. Denn wegen  $\frac{AC}{m} = \frac{AB}{n}$  ist  $AB = \frac{n}{m} AC$ , und weil in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken  $BAD$  und  $DAC$ ,  $\frac{BA}{AD} = \frac{AD}{AC}$ , oder  $AD^2 = AB \cdot AC$  ist,  $AD^2 = \frac{n}{m} AC^2$ , also  $AD = AE = AC \sqrt{\frac{n}{m}}$ . Nun sind die Dreiecke  $AGC$  und  $AFL$  wegen den Parallelen  $GC$  und  $FE$ , ähnlich; Also ist  $\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AG}$  folglich, weil  $AE = AC \sqrt{\frac{n}{m}}$  und  $AF = AC$  ist,  $\frac{AC \sqrt{\frac{n}{m}}}{AC} = \frac{AC}{AG}$ , oder  $\sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{AC}{AG}$ , also  $AG = AC \sqrt{\frac{m}{n}}$ , oder  $AG^2 = \frac{m}{n} AC^2$ . Das Quadrat und folglich auch eine beliebige Figur über  $AG$  ist also  $\frac{m}{n}$  mal so groß als ein Quadrat oder eine ähnliche Figur über  $AC$ .

## 405.

Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen gradlinigen Figur gleich ist, ziehe man durch alle Ecken  $A, B, C, D, \dots$  (Fig. 217.) der gegebenen Figur, parallele grade Linien, so sind alle Punkte in diesen Parallelen, welche, wie  $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$  von  $A, B, C, D, \dots$  gleich weit entfernt sind, so nämlich dass  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$  etc. ist, die Ecken einer der Figur  $ABCD, \dots$  gleichen Figur  $A_1B_1C_1D_1, \dots$ . Denn  $AA_1, BB_1, BB_1, CC_1, CC_1, DD_1$  etc. sind Parallelogramme, folglich ist  $A_1B_1 = AB, B_1C_1 = BC, C_1D_1 = CD, \dots$  desgleichen ist  $A_1B_1$  mit  $AB, B_1C_1$  mit  $BC, C_1D_1$  mit  $CD$  etc. parallel; also sind auch die Winkel  $A_1B_1C_1, B_1C_1D_1$  etc. den Winkeln  $ABC, BCD$  etc. gleich; mithin sind alle Seiten und alle Winkel der Figur  $A_1B_1C_1D_1, \dots$  den Seiten und Winkeln der Figur  $ABCD, \dots$  gleich; folglich sind die Figuren  $A_1B_1C_1D_1, \dots$  und  $ABCD, \dots$  selbst gleich.

## 406.

Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen gradlinigen Figur ähnlich ist, ziehe man durch alle Ecken  $A, B, C, D$  etc. (Fig. 218.) der gegebenen Figur, grade Linien nach einem und demselben Punkte  $M$ , so sind beliebige Punkte in diesen graden Linien, welche paarweise in Parallelen  $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1$  etc. mit den Seiten der gegebenen Figur  $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1$  etc. liegen, die Ecken einer der gegebenen ähnlichen Figur  $A_1B_1C_1D_1, \dots$ . Denn z. B. die Dreiecke  $AMB$  und  $A_1MB_1, BMC$  und  $B_1MC_1, CMD$  und  $C_1MD_1$  etc. sind ähnlich, weil sie wegen der Parallelen  $AB$  und  $A_1B_1, BC$  und  $B_1C_1, CD$  und  $C_1D_1$  etc. gleiche Winkel haben; also ist  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$  und  $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$ , folglich  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ . Eben so ist  $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}, \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1}$  u. s. w. Also ist

ist  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1}$  etc. Mithin sind die Seiten der Figur  $ABCD \dots$  Gleichvielfache, während zugleich, wegen der Parallelen, die Winkel der beiden Figuren, zwischen ähnlich liegenden Seiten, gleich sind. Also sind die beiden Figuren ähnlich.

Man darf daher nur, nachdem die Linien  $AM, BM, CM, DM$  etc. gezogen worden, von einer der Ecken der gesuchten Figur, z. B.  $A_1$ , ausgehend, Parallelen  $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1$  etc. ziehen, so entsteht eine der gegebenen, ähnliche Figur  $A_1B_1C_1D_1 \dots$

Sollen die ähnlich liegenden Seiten der gesuchten Figur bestimmte Gleichvielfache von den Seiten der gegebenen Figur seyn, so macht man  $A_1M$  zu eben einem solchen Vielfachen von  $AM$ .

Denn wegen der ähnlichen Dreiecke  $AMB$ , und  $A_1MB_1$  ist  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AM}{A_1M}$ , und da  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \dots$ , auch  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \dots = \frac{AM}{A_1M}$

Soll der Inhalt der gesuchten Figur ein bestimmtes Vielfache von dem Inhalt der gegebenen seyn, so muss man eine Seite der verlangten Figur, z. B.  $A_1B_1$ , aus der ähnlichliegenden Seite  $AB$  der gegebenen, suchen: das nämliche Vielfache ist  $A_1M$  von  $AM$ , wonach man dann die Parallele  $A_1B_1$  mit  $AB$  und hierauf auch die übrigen Seiten der gesuchten Figur ziehen kann.

## 407.

Von einem gegebenen Dreiecke ein Stück von gegebener Grösse gradlinig abzuschneiden, berechne man zuerst den Inhalt des ganzen Dreiecks und sehe zu, der wievielte Theil vom Ganzen das abzuschneidende Stück ist. Es sey der  $m$ te Theil.

$\alpha$ ) Soll nun die Theilungs-Linie durch einen der Scheitel-Puncte  $A$  (Fig. 219.) des gegebenen Dreiecks  $ABC$  gehen, so theile man die gegenüberliegende Seite  $BC$  in  $m$  gleiche Theile, mache  $BD = \frac{1}{m}BC$  und ziehe die grade Linie  $AD$ : alsdann ist  $ABD$  der abzuschneidende  $m$ te Theil des Dreiecks  $ABC$ . Denn die Dreiecke  $ABD$  und  $ABC$  haben gleiche Höhen; also sind ihre Inhalte und ihre Grundlinien Gleichvielfache, folglich ist  $\frac{\Delta ABC}{\Delta ABD} = m$ .

$\beta$ ) Soll die Theilungs-Linie durch einen gegebenen Punct  $E$  gehen, der in einer der Seiten des Dreiecks liegt, so theile man erst den abzuschneidenden  $m$ ten Theil des Dreiecks  $ABC$  nach ( $\alpha$ .) durch eine grade Linie  $AD$  ab, welche durch die gegenüberliegende Ecke  $A$  geht. Hierauf ziehe man die Grade  $AE$  und mit ihr parallel durch  $D$  die Grade  $DF$  und von  $F$  nach die Grade  $FE$ , so ist  $\Delta BEF = \frac{1}{m} \Delta ABC$ ; denn  $\Delta ABD$  ist gleich

$\frac{1}{m} \Delta ABC$  und die Dreiecke  $FDA$  und  $FDE$ , über  $FD$ , zwischen den

Parallelen  $FD$  und  $AE$ , sind gleich groß. Also ist  $\triangle BFD + \triangle FDE = \triangle BFD + \triangle FDA$ , das heisst,  $\triangle BFE = \triangle ABD = \frac{1}{m} \triangle ABC$ .

7) Soll die Theilungs-Linie durch irgend einen Punkt  $D$  (Fig. 220.) im Innern des Dreiecks gehen und zusammen mit der graden Linie  $DA$ , welche diesen Punkt mit einem der Scheitel des Dreiecks verbindet, den abzuschneidenden Theil absondern, so ziehe man  $AE$  und  $AF$  mit  $DB$  und  $DC$  parallel und schneide von dem Dreieck  $EDF$  nach ( $\alpha$ .) den mten Theil ab. Fällt der Theilungspunkt, wie  $K$ , zwischen  $B$  und  $D$ , so dass  $\triangle EDK = \frac{1}{m} \triangle EDF$ , so ist  $BADK$  der abzuschneidende mte Theil des Dreiecks  $ABC$ . Fällt der Theilungspunkt, wie  $L$ , ausserhalb  $B$  und  $C$ , so dass  $\triangle EDL = \frac{1}{m} \triangle EDF$ , so ziehe man  $LI$  mit  $BD$  und  $EA$  parallel und durch  $I$  und  $D$  die Grade  $ID$ . Alsdann ist das Dreieck  $IDA$  der abzuschneidende mte Theil des Dreiecks  $ABC$ . Die Dreiecke  $EBD$  und  $ABD$  nämlich, so wie  $CDF$  und  $CDA$ , über den Grundlinien  $BD$  und  $DC$ , und zwischen den Parallelen  $BD$ ,  $EA$  und  $DC$ ,  $AF$  sind gleich groß; daher ist, wenn man das Dreieck  $BDC$  hinzu thut, das Dreieck  $ABC$  so groß als das Dreieck  $EDF$ . Ist nun  $\triangle EDK = \frac{1}{m} \triangle EDF$ , so ist

auch  $BADK = \frac{1}{m} \triangle ABC$ . Denn  $\triangle EDK = \triangle BDK + \triangle EBD$  und  $BADK = \triangle BDK + \triangle ABD$ , und vorhin war  $\triangle EBD = \triangle ABD$ . Ist  $EDL = \frac{1}{m} \triangle EDF$ , so ist  $\triangle IDA = \frac{1}{m} \triangle ABC$ ; denn die Dreiecke  $LBD$  und  $IBD$ , über der Grundlinie  $BD$  und zwischen den Parallelen  $LI$  und  $BD$ , sind gleich groß: es ist aber  $\triangle EDL = \triangle EDB - \triangle LBD$  und  $\triangle IDA = \triangle BDA - \triangle IBD$ ; also ist, weil  $\triangle EBD = \triangle BDA$  und  $\triangle LBD = \triangle IBD$ ,  $\triangle IDA = \triangle EDL = \frac{1}{m} \triangle EDF = \frac{1}{m} \triangle ABC$ .

8) Soll die Theilungs Linie mit einer Seite des gegebenen Dreiecks einen gegebenen Winkel machen, so ziehe man unter eben diesem Winkel  $BFA$  (Fig. 221.) durch die der Seite gegenüberliegende Ecke  $A$ , die Grade  $AF$ . Nun schneide man vermittelt einer graden Linie  $AD$ , die durch eben die Ecke  $A$  geht, nach ( $\alpha$ .) den mten Theil von  $ABC$  ab. Ueber denjenigen Theil der Grundlinie, in welchen  $D$  fällt, also in (Fig. 221.) über den Theil  $BF$ , ziehe man einen Halbkreis und  $DE$  durch  $D$  auf  $BF$  senkrecht, mache  $BH = BE$  und ziehe  $GH$  unter dem bestimmten Winkel  $BHG$  gegen  $BC$ , also mit  $AF$  parallel; so ist  $\triangle AGH = \frac{1}{m} \triangle ABC$ . Denn in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken  $BDE$

und  $EDF$  ist  $\frac{BD}{BE} = \frac{BE}{BF}$ , und weil  $BE = BH$  seyn soll,  $\frac{BD}{BH} = \frac{BH}{BF}$ . Aber wegen der Parallelen  $GH$  und  $AF$  sind die Dreiecke  $BGH$  und  $BAF$  ähnlich. Also ist  $\frac{BH}{BF} = \frac{BG}{BA}$ ; folglich ist  $\frac{BD}{BH} = \frac{BG}{BA}$ , folglich  $BD.BA = BH.BG$ . Daher ist  $\triangle BGH = \triangle BAD$ . Aber  $\triangle BAD = \frac{1}{m} \triangle ABC$ , also  $\triangle BGH = \frac{1}{m} \triangle ABC$ .

Ein einzelner besonderer Fall ist es, nur, wenn die Theilungs-Linie  $KL$  mit einer Seite  $AC$  des Dreiecks parallel seyn soll. Das Verfahren bleibt das nämliche.  $AF$  fällt dann in  $AC$ ; man muss also alsdann den Halbkreis über die ganze Seite  $BC$  ziehen,  $BK = BI$  machen und durch  $K$ ,  $E$  mit  $AC$  parallel legen.

Eben so ist es nur ein einzelner besonderer Fall wenn die Theilungs-Linie etwa auf  $BC$  senkrecht seyn soll. Das Verfahren ist immer das Nämliche.

e) Soll die Theilungs-Linie durch irgend einen Punkt ausserhalb oder innerhalb des gegebenen Dreiecks, z. B. wie  $DEF$  durch den Punkt  $D$  (Fig. 222.) ausserhalb des Dreiecks  $ABC$  gehen und das Dreieck  $BEF$

$= \frac{1}{m} \Delta ABC$  abschneiden, so ziehe man  $AL$  durch  $A$  mit  $BC$

und  $KDL$  durch  $D$  mit  $AB$  parallel, theile nach ( $\alpha$ .) das Dreieck

$BAG = \frac{1}{m} ABC$  ab, ziehe  $LM$  mit  $AG$  und  $LH$  mit  $DM$  parallel,

halbiere  $KH$  in  $O$ ,  $KO$  in  $Q$ , mache  $KR = KB + KQ$ , ziehe über  $RH$  den Halbkreis  $RNH$ , setze das Perpendikel  $KN$  auf  $RC$  zu  $KO$ , in  $OP$ ,

mache  $BF = KP$  und ziehe  $DEF$  grade; so ist  $\Delta BEF = \frac{1}{m} \Delta ABC$ .

Denn wegen der Parallelen  $DM$  und  $LH$  sind die Dreiecke  $DML$  und  $DMH$ , folglich auch die Dreiecke  $KLM$  und  $KDH$  gleich groß.

Das Dreieck  $KLM$  ist aber, wegen  $KL = BA$ ,  $LM = AG$  und  $KLM = BAG$ , dem Dreiecke  $BAG$  gleich; also sind auch die Dreiecke

$KDH$  und  $ABG$  gleich groß; mithin ist  $\Delta KDH = \frac{1}{m} \Delta ABC$ .

Nun ist in den ähnlichen Dreiecken  $KDF$  und  $BEF$ ,  $\frac{KD}{BE} = \frac{KF}{BF}$ , und

da die Dreiecke  $KDH$  und  $BEF$  gleich groß seyn sollen,  $KD \cdot KH = BE \cdot BF$  (§. 169.), oder  $\frac{KD}{BE} = \frac{BF}{KH}$ . Also muss, wenn die Dreiecke

$KDH$  und  $BEF$  gleich groß und zwar beide so groß als das Dreieck

$ABG = \frac{1}{m} \Delta ABC$  seyn sollen,  $\frac{KF}{BF} = \frac{BF}{KH}$  seyn. Nun wurde

$KR = KB + KQ = KB + \frac{1}{2}KH$  und  $BF = KN + KO = KN + \frac{1}{2}KH$  gemacht, so dass  $KN = BF - \frac{1}{2}KH$  ist. Es ist also, weil in den ähnlichen

rechtwinkligen Dreiecken  $RKN$  und  $NKH$ ,  $\frac{KN}{KR} = \frac{KH}{KN}$  ist,

$\frac{BF - \frac{1}{2}KH}{KB + \frac{1}{2}KH} = \frac{KH}{BF - \frac{1}{2}KH}$ , woraus  $BF^2 - BF \cdot KH + \frac{1}{4}KH^2 = KB \cdot KH$

$+ \frac{1}{4}KH^2$ , oder  $BF^2 = BF \cdot KH + KB \cdot KH$ , oder  $BF^2 = (BF + KB)KH$ ,

oder weil  $BF + KB = KF$  ist,  $BF^2 = KF \cdot KH$ , oder  $\frac{KF}{BF} = \frac{BF}{KH}$

folgt. Das Nämliche musste aber wegen der Gleichheit der Grösse der Dreiecke  $KDH$  oder  $ABG$  und  $BEF$  seyn, also sind die Dreiecke

$ABG$  und  $BEF$  gleich groß und es ist  $\Delta BEF = \frac{1}{m} \Delta ABC$ .

Diese Aufgabe ist in (§. 370.) durch Rechnung gelöst.

## 408.

Vermittelt der Sätze (§. 407) von Theilung des Dreiecks, kann man von jeder beliebigen gradlinigen Figur, unter diesen oder jenen Bedingungen für die Lage der Theilungs-Linie, Stücke von gegebener Grösse abschneiden..

$\alpha$ ) Gesetzt man solle von der Figur  $ABCDEFGG$  (Fig. 223.) parallel mit der Seite  $AB$ , ein Stück von gegebener Grösse abschneiden, so ziehe man erst durch alle andere Ecken der Figur Parallelen mit  $AB$ , nämlich  $GG_1$ ,  $CC_1$ ,  $FF_1$ ,  $EE_1$ , und berechne den Inhalt der Trapeze  $ABGG_1$ ,  $GG_1CC_1$ ,  $CC_1FF_1$ ,  $FF_1EE_1$ . Man addire von denselben so viele, bis man eine Fläche findet, welche grösser als die ist, die man abschneiden soll. Alsdann geht die Theilungslinie  $XY$  nothwendig durch das letzte Trapez hindurch, welches man addirte. Sie gehe z. B. zwischen  $FF_1$  und  $EE_1$  hindurch. Da man den Inhalt der Figur  $ABCF_1C_1G$  kennt, so weiss man auch wieviel noch von dem Trapeze  $FF_1EE_1$  abzuschneiden ist. Dieses Stück noch abzuschneiden, verlängere man die Seiten des Trapezes  $FE$  und  $F_1E_1$ , bis sie sich in  $P$  schneiden, und berechne den Inhalt des Dreiecks  $PFF_1$ . Dazu den Rest  $EXYB_1$ , der von dem Trapeze  $FF_1EE_1$  übrig bleiben musste, giebt das Dreieck  $EXY$ , welches von dem Dreieck  $EFF_1$ , parallel mit seiner Grundlinie  $FF_1$ , abzuschneiden ist. Die Theilungs-Linie  $XY$  für diesen Abschnitt findet man nach (§. 407.  $\delta$ ).

$\beta$ ) Gesetzt von der Figur  $ABCDEFGG$  (Fig. 224.) soll durch eine grade Linie  $XY$ , die verlängert durch einen gegebenen Punct  $M$  geht, ein Stück  $XYBCDEX$  von gegebener Grösse abgeschnitten werden, so ziehe man durch den Punct  $M$  und durch alle Ecken der Figur grade Linien und berechne den Inhalt der durch dieselben abgeschnittenen Figuren  $D_1DE$ ,  $C_1CD_1D$ ,  $B_1BC_1C$ ,  $G_1G_2B_1B$  u. s. w. Man addire solcher, von der ersten an, so viele bis man eine Fläche bekommt, die grösser ist als die abzuschneidende; so geht die Theilungs-Linie nothwendig durch das letzte addirte Trapez hindurch, z. B. durch  $G_1G_2BB_1$ . Zieht man den Inhalt der Figur  $BCDEB_1$  von der abzuschneidenden Fläche ab, so bleibt die Fläche  $XYBB_1$ , welche noch von dem letzten Trapeze abzuschneiden ist. Für diese Fläche die Theilungs-Linie  $XY$ , unter der Bedingung, dass sie verlängert durch den Punct  $M$  geht, zu finden, verlängere man die Seiten  $BG_1$  und  $B_1G_2$ , bis sie sich in  $P$  schneiden und berechne den Inhalt des Dreiecks  $PG_1G_2$ , so kommt es, weil auch die Fläche  $XG_2G_1Y$  bekannt ist, nur darauf an, von dem Dreieck  $PBB_1$  einen bestimmten Theil  $PXY$  mittelst einer, verlängert durch den bestimmten Punct  $M$  gehenden Theilungs-Linie  $MX$  abzuschneiden; welches nach (§. 407.  $\epsilon$ ) geschieht u. s. w.

# Verbesserungen.

Seite	2 Zeile	8 v. o. lese man gröfser oder kleiner statt kleiner oder gröfser.
— 9 —	7 v. u. l. m. $EACBF$ st. $EACDF$	
— 10 —	2 v. u. l. m. keinen st. keinem	
— 23 —	8 v. o. l. m. $(n-2)2\rho$ st. $(n-2)\rho$	
— 27 —	6 v. o. l. m. $AC$ st. $BC$	
— 31 —	1 v. u. l. m. $\triangle EGF$ st. $\triangle EGI$	
— 32 —	15 v. u. l. m. $GD$ und $GF$ st. $\overline{GD}$ und $\overline{GE}$	
— 34 —	6 v. u. $DF$ st. $EF$	
— 49 —	20 v. o. etc. l. m. II: <i>Wenn ein Dreieck über einer seiner Seiten gleichschenkelig ist, und über der nämlichen Seite liegt zugleich ein anderes beliebiges Dreieck, der Winkel des gleichschenkligen Dreiecks aber, der gemeinschaftlichen Seite gegenüber etc. statt II. Wenn ein etc. bis gegenüber</i>	
— 54 —	4 v. u. l. m. der st. die	
— 65 —	22 v. u. l. m. $B$ st. $D$ und Z. 24 v. u. $D$ st. $B$	
— — —	1 v. o. l. m. Centricität st. Gleichheit	
— 66 —	17 v. o. l. m. $B$ st. $D$ , Z. 19 v. o. $D$ st. $B$ und Z. 25 v. o. $M$ st. $B$	
— 70 —	14 v. o. und S. 76 Z. 20 v. u. l. m. einen st. einem	
— 80 —	9 v. o. l. m. und st. und	
— 87 —	15 v. o. l. m. $\frac{2\rho}{3}$ st. $\frac{2\rho}{k}$	
— 93 —	1 v. u. l. m. $—[a.b]—([a.b]—[b^2])$ statt $—a.b—([a.b]—[b^2])$	
— 98 —	3 v. u. l. m. Quadrats eines der gleichen st. Quadrats der gleichen	
— 99 —	3 v. o. l. m. $[BD^2]$ st. $[BD^2]^2$	
— 116 —	1 v. u. etc. müssen die Worte: „Wäre der Halbmesser in dem einen Vieleck gröfser als im andern, so wären alle Winkel am Mittel-Punct, über gleichen Seiten, in dem ersten kleiner als in dem andern (§. 104.), also die Summen der Winkel am Mittel-Punct wiederum verschieden.“ wegfallen.	
— 126 —	22 v. u. l. m. $(m+e)B$ st. $(m+e)A$	
— 127 —	10 v. u. l. m. <i>des Paral.</i> st. <i>das Paral.</i>	
— 133 —	8 v. u. l. m. $ABC$ st. $ABG$	
— 137 —	2 v. o. l. m. einen st. einem	
— 141 —	10 v. u. l. m. $(a^2+c^2-b^2)^2$ st. $(a^2+b^2-c^2)^2$	
— — —	6 v. u. l. m. 11 st. 10	
— 142 —	9 u. 10 v. o. l. m. 16. $\triangle^2$ st. $\triangle^2$ u. Z. 11 v. o. $\triangle$ st. 16. $\triangle$	
— 143 —	3 v. u. l. m. $CD_3$ st. $BD_3$	
— 144 —	17 u. 18. v. u. l. m. $BC$ st. $BK_1$	
— 145 —	2 v. o. l. m. $9c^2$ st. $9c$	
— — —	19 v. o. l. m. $k_2^4$ st. $—k_2^2$	

Seite 453 Zeile 8 v. u. l. m.  $\gamma_n = 2(n-2)\varrho - (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1})$   
 $\gamma_n = 2(n-2)\varrho = \gamma_2$

— 457 — 16 v. o. l. m. 24.  $z_{3,n}^2$  st. 24.  $z_{3,4}^2$

— — — 6 v. u. l. m. (§. 374. 3.) st. (§. 373. 3.)

— 459 — 7 v. o. l. m. (§. 374. 6.) st. (§. 373. 6.)

— — — 19 v. u. l. m.  $\gamma_1$  st.  $\gamma$

— 460 — 5 v. u. l. m.  $q_{3,n}$  st.  $q_{2,n}$

— 461 — 13 v. u. l. m.  $c_1$  st.  $c$

— 464 — 17 v. o. l. m.  $z_{2,m}^2$  st.  $\gamma_{2,m}^2$

— 469 — 12 v. u. etc, muß es statt die erste Zeile und von da bis so viel als heißen:

Es ist  $c_2 \sin \gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \dots$   
 $\dots \pm c_{m-1} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{m-2}) = p_{2,m-1}$ . Setzt man

$$93. \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{m-1} = \alpha,$$

so ist  $\mp c_m \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_{m-1}) = \mp c_m \sin \alpha$  und der Rest von (92) ist so viel als

Seite 471 Zeile 2 v. o. l. m. VI. st. V und Zeile 4 v. o. VII st. V

— 473 Gl. 7 l. m.  $\tan(\frac{1}{2}\pi + \lambda)$  st.  $\tan(\pi - \lambda)$

— 474 Zeile 6 v. u. l. m.  $a, b, \gamma, \alpha_1, \alpha_2 \dots$  st.  $a, b, \alpha_1, \alpha_2 \dots$

— 475 — 8 v. o. l. m.  $\psi + \gamma$  st.  $\psi$

— — — 12 v. u. l. m.  $\beta_n + \gamma$  st.  $\beta_n$

— 476 — 24 v. u. l. m.  $\varphi$  und  $\psi$  st.  $\psi$  und  $\psi$

— 480 — 7 v. o. l. m.  $c_n$  st.  $c_4$

— — — 22 v. o. l. m.  $p_{4,n}$  st.  $p_{3,n}$

— 481 — 20 v. u. l. m.  $F_{3,n}$  (21.) st.  $F_{2,n}$  (19.)

— 482 — 12 v. u. l. m.  $C_n C_p$  st.  $c_n c_p$  und  $C_m C_n$  st.  $C_{m,n}$

— 485 — 7 v. o. l. m.  $c_n$  st.  $c_1$

— 488 — 7 v. o. l. m.  $\frac{c_1}{\sin \varphi}$  st.  $\frac{c}{\sin \varphi}$

— 500 — 18 v. o. l. m. gehören zu gleichen Theilen  
st. sind gleiche Theile

— 501 — 11 v. u. l. m.  $SZ = \frac{1}{2} AC \sqrt{5}$  st.  $SZ = \frac{1}{2} ACS \sqrt{5}$

— 503 — 20 v. u. l. m.  $QR$  st.  $QB$

— — — 11 v. u. l. m.  $TMB$  st.  $FMB$

— 504 — 5 v. u. l. m.  $ADC$  st.  $ADE$

— — — 6 v. u. und 2 v. u. l. m.  $F_1 DF$  st.  $E_1 DE$

— 505 — 14 v. u. l. m.  $HI$  st.  $HI_1$

— 508 — 16 v. o. l. m. zusammensetzt st. zusammen  
gesetzt.

— — — 23 v. o. l. m.  $AG$  st.  $FG$

— — — 1 v. u. l. m.  $FD$  st.  $AB$

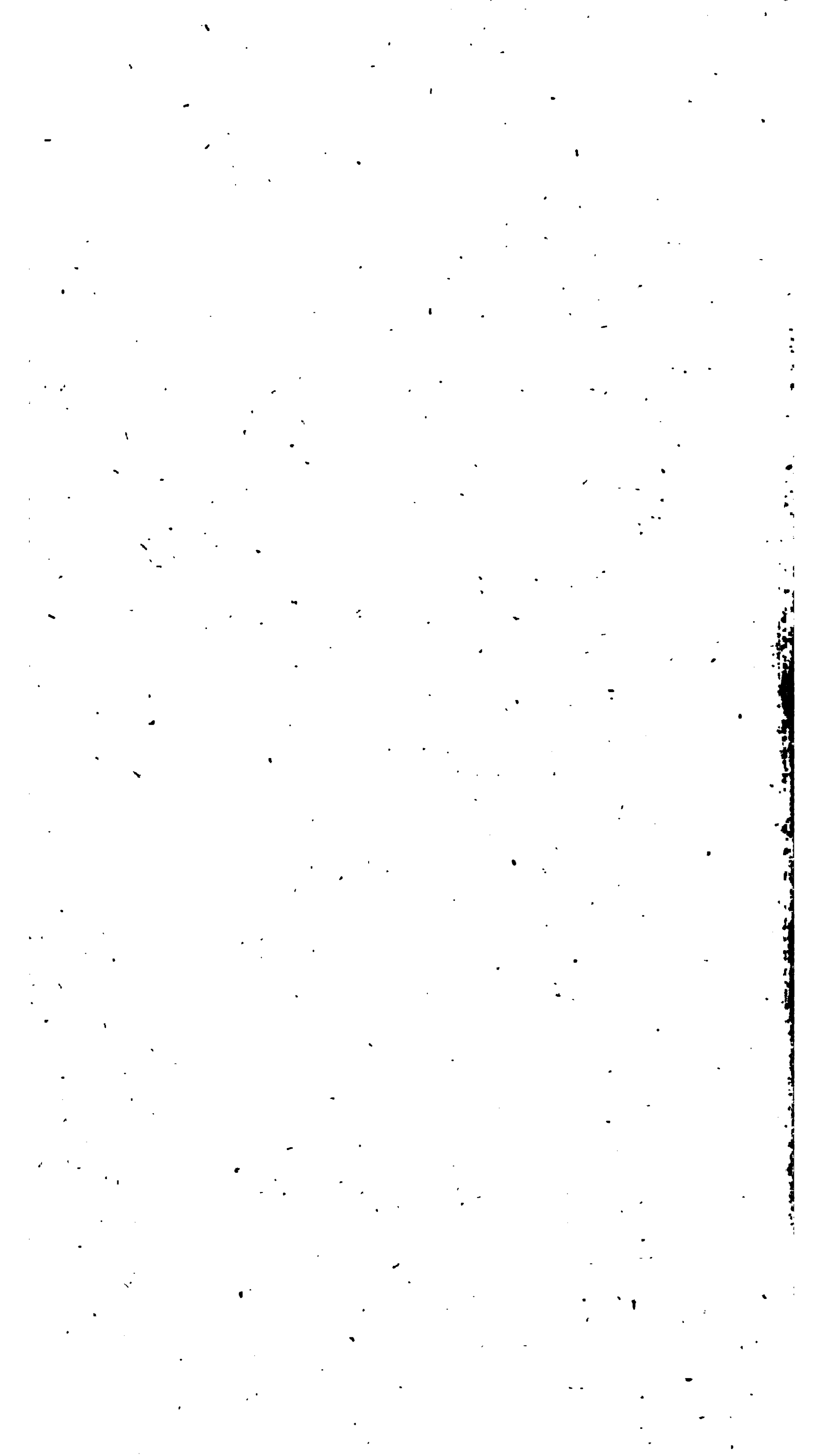
— 510 — 16 v. o. l. m.  $FE$  st.  $FD$

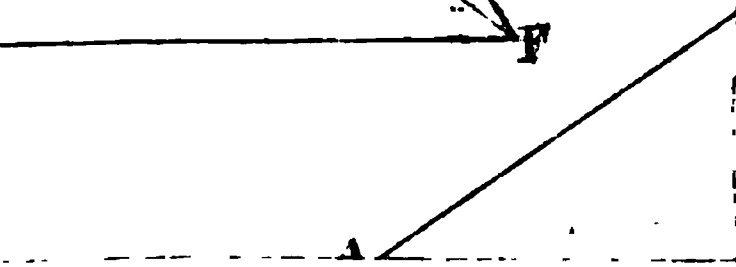
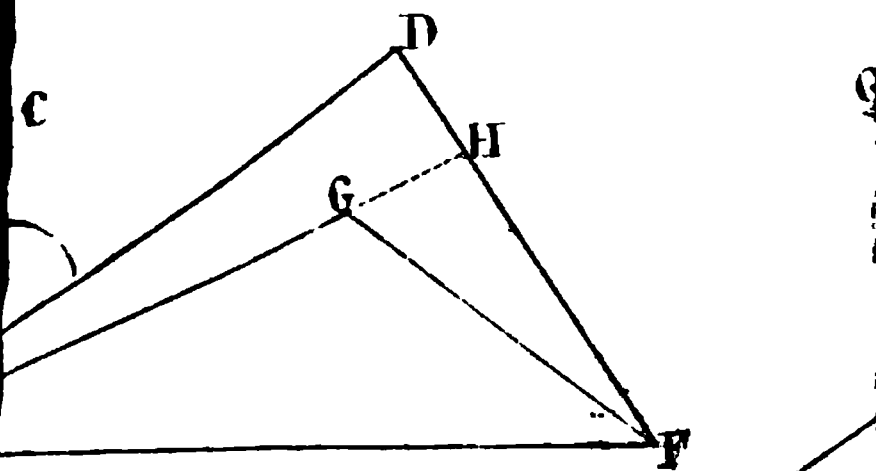
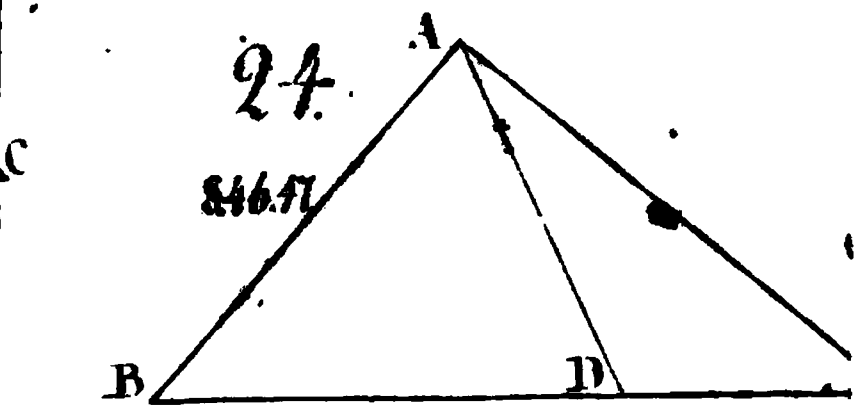
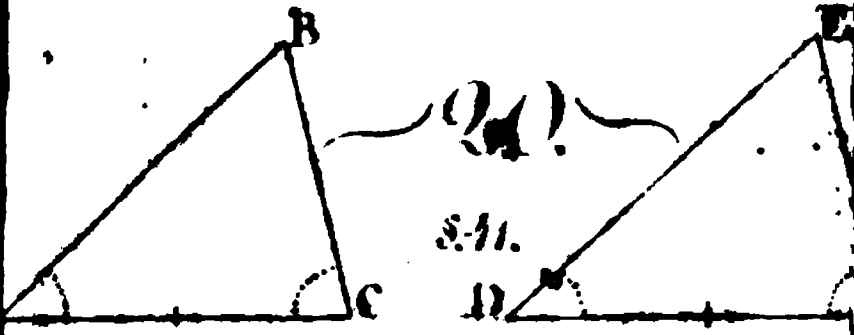
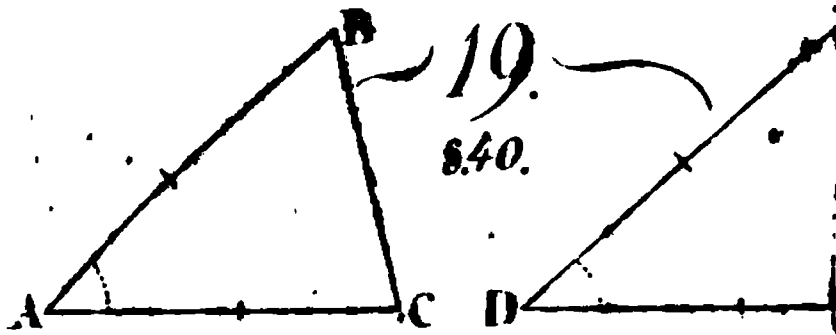
In Fig. 210 soll über der zweiten Linie  $Q$  st.  $H$  stehen

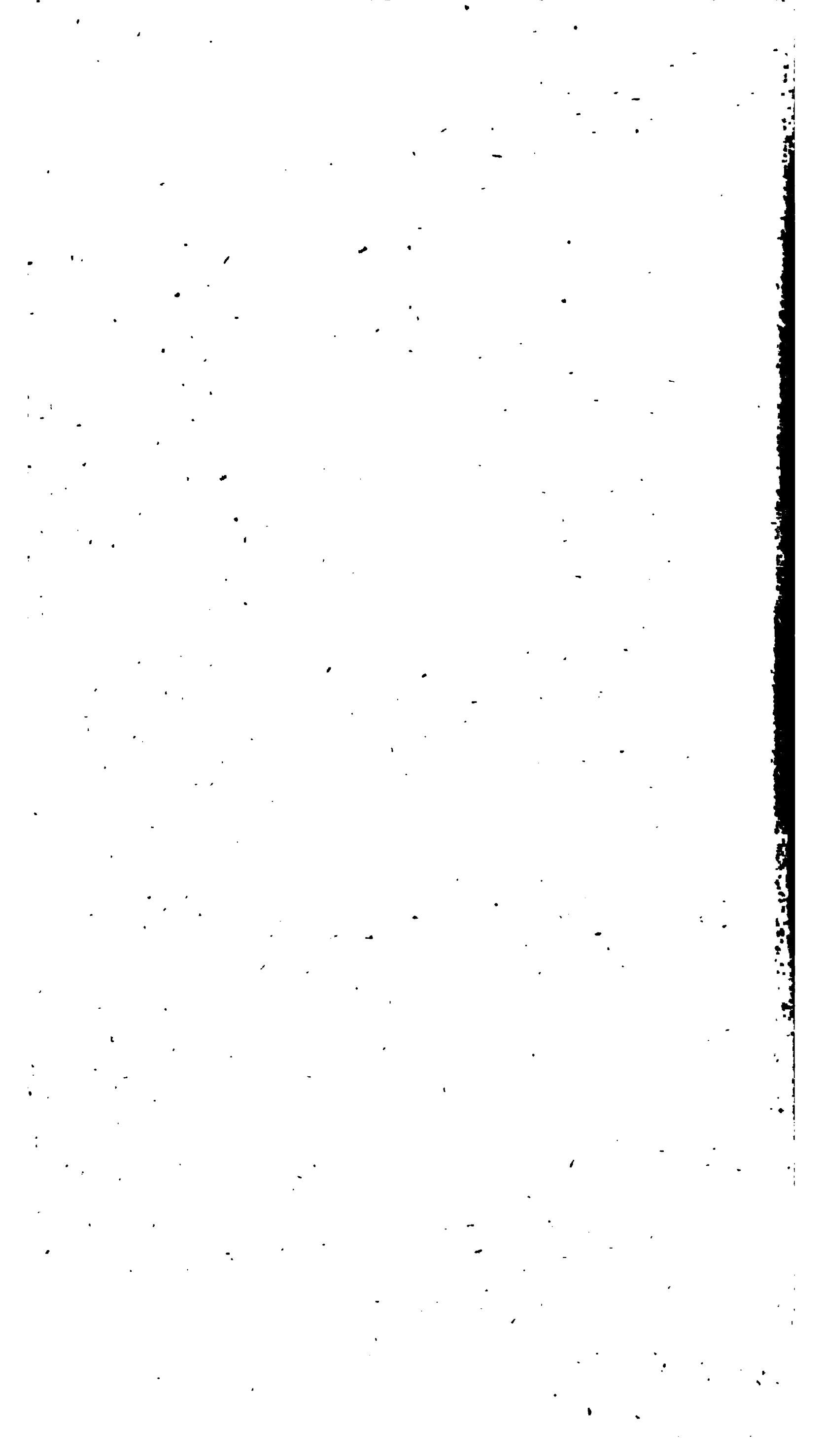
Seite 510 Zeile 8 v. u. l. m.  $FM_1$  st.  $FM$  und  $CM_1$  st.  $CM$ .

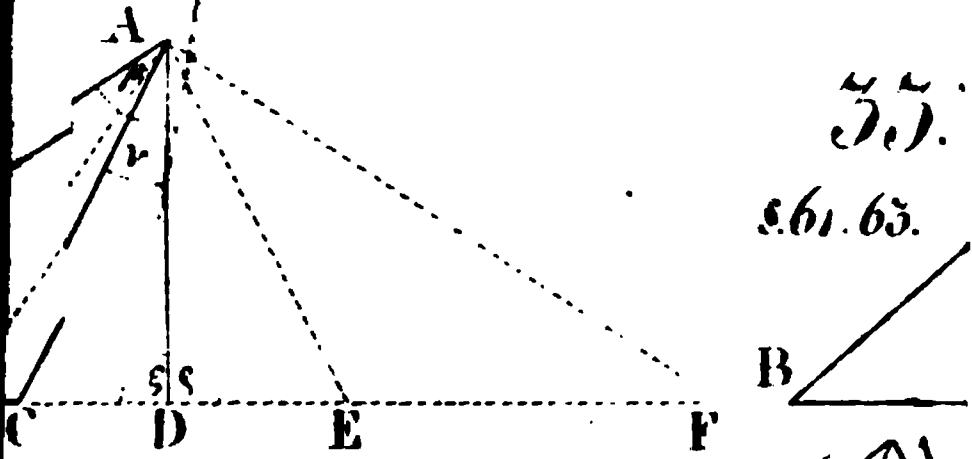






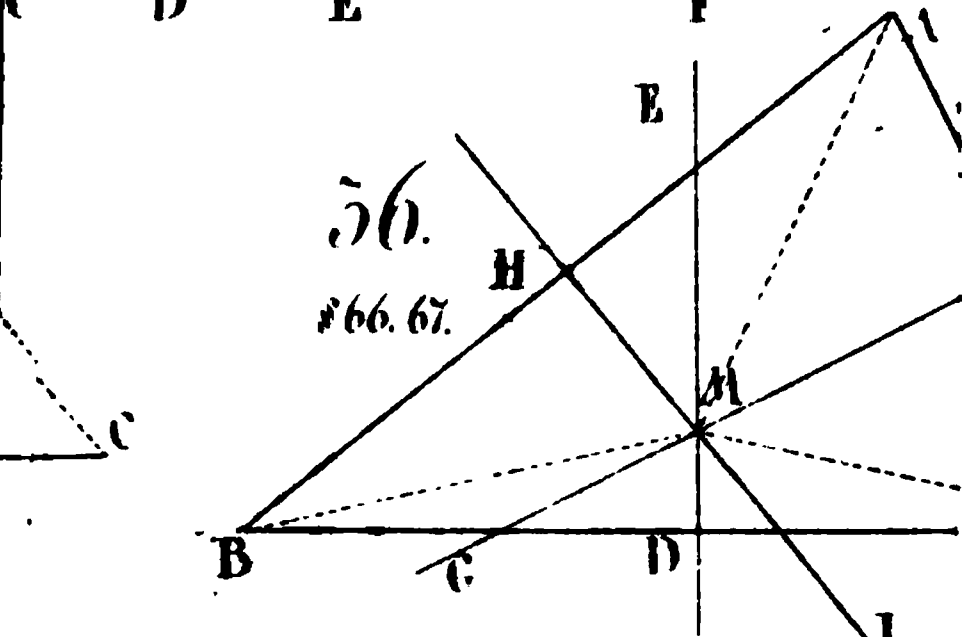






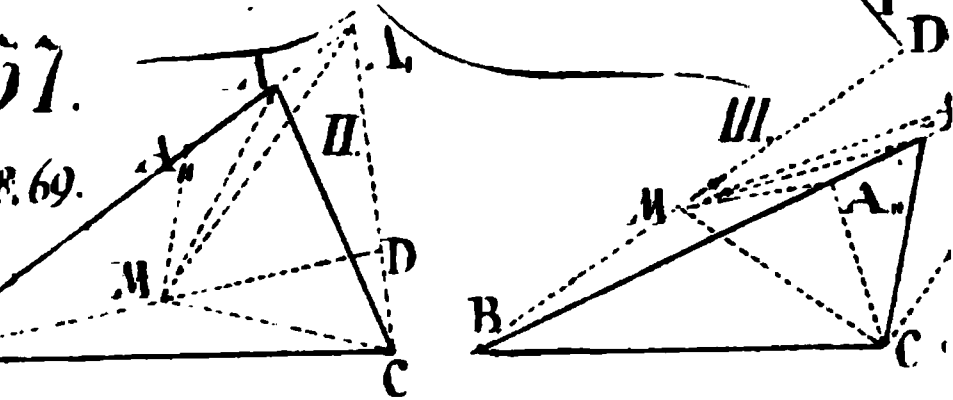
55.

§ 61. 63.



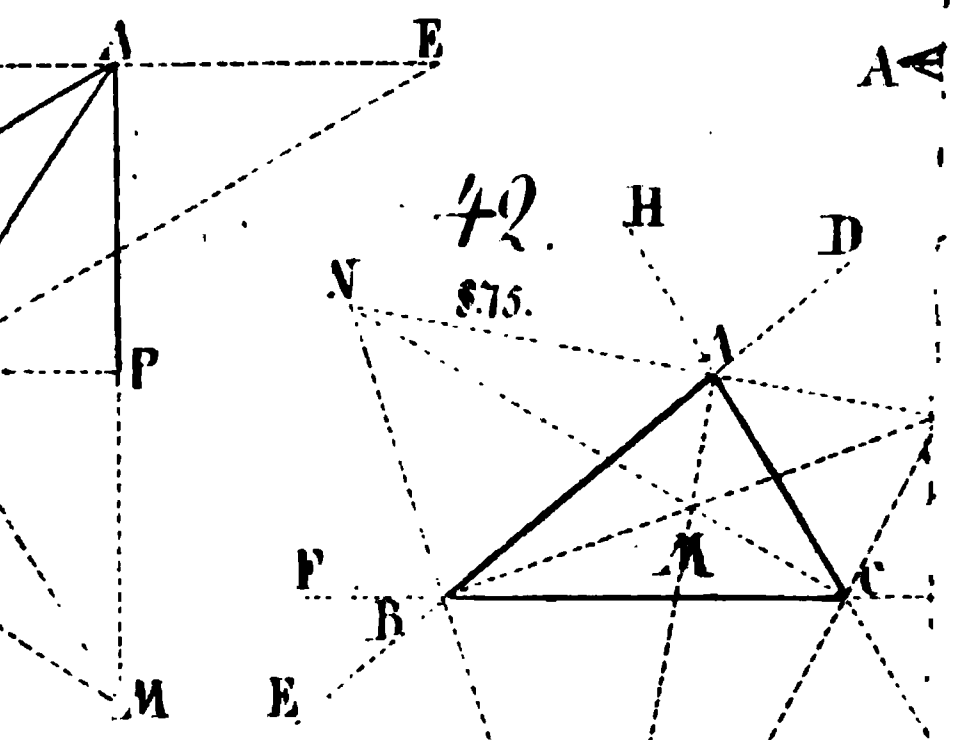
56.

§ 66. 67.



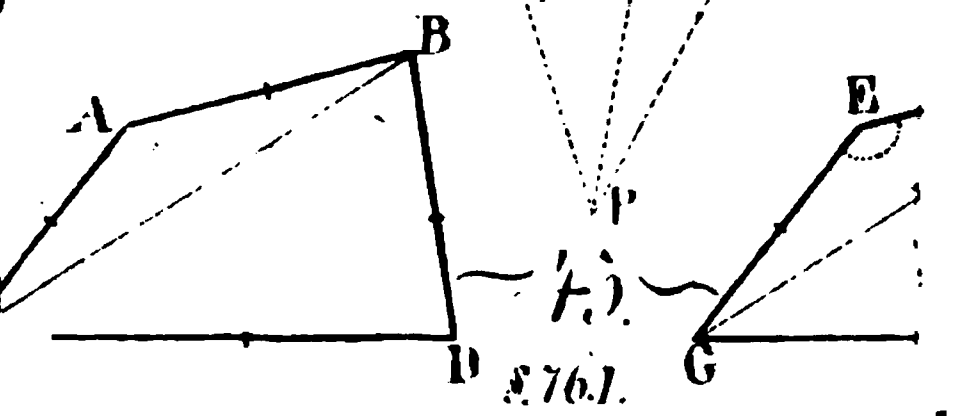
57.

§ 69.



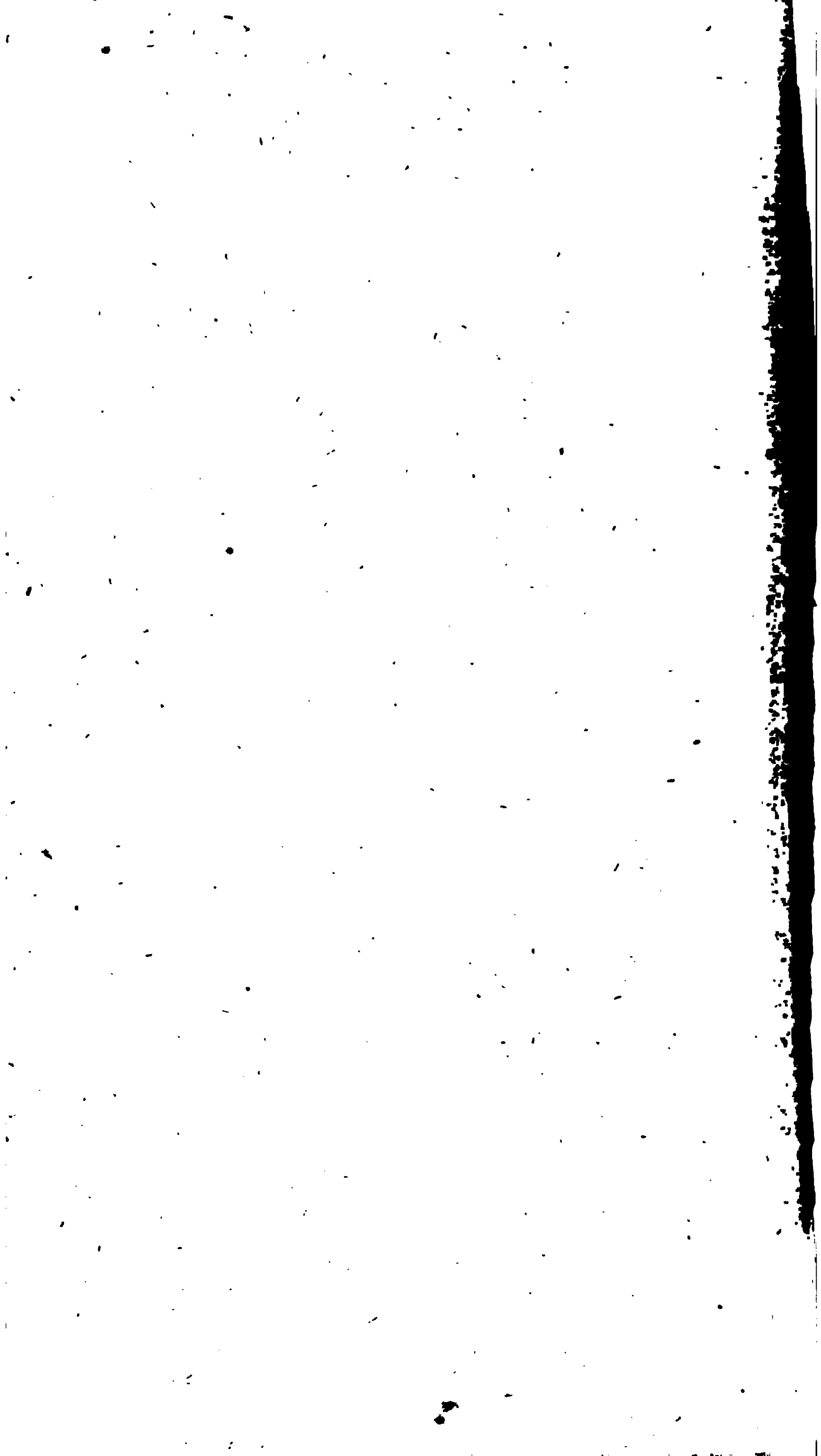
72.

§ 75.



73.

§ 76. 1.



100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

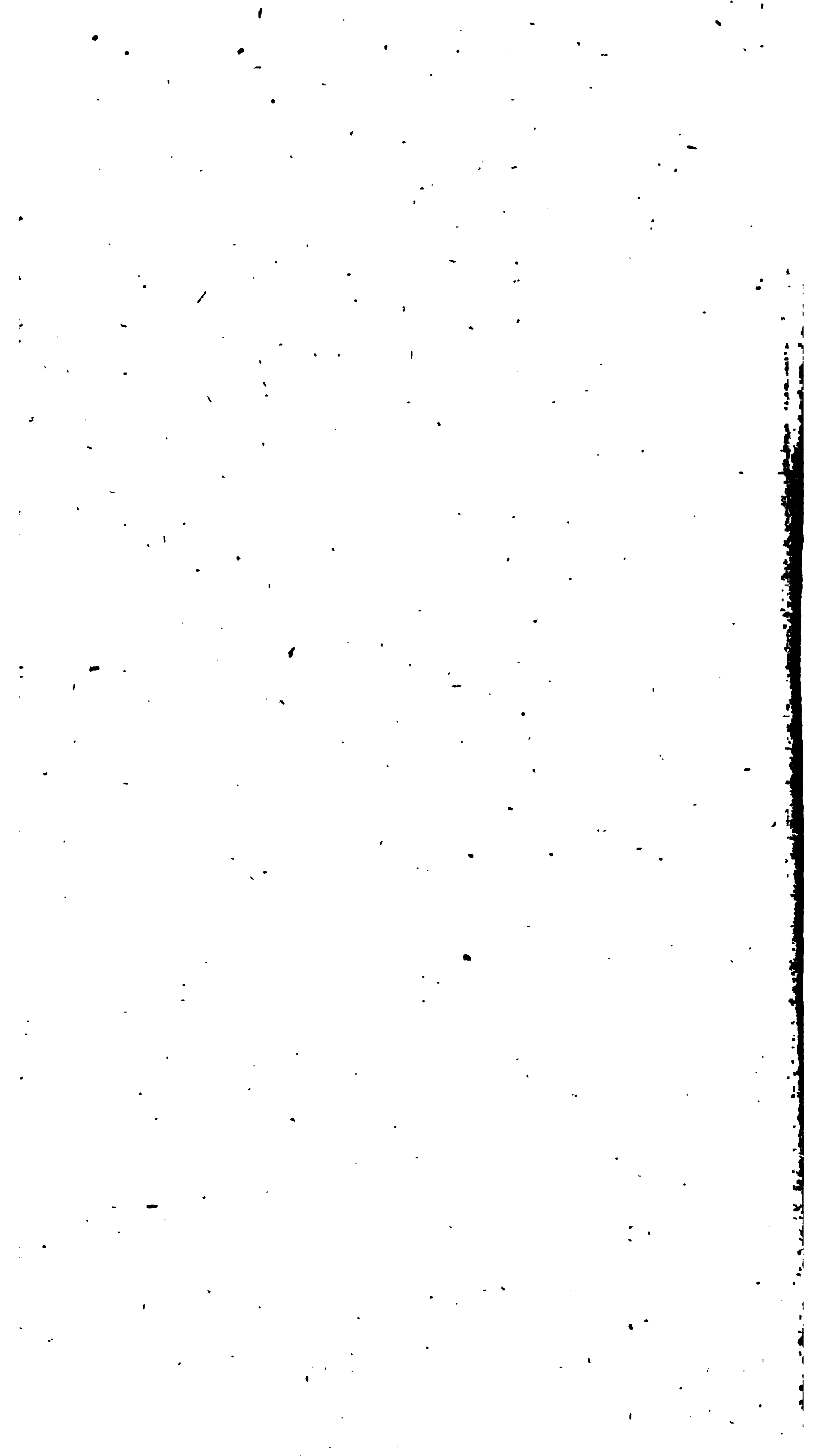
100

100

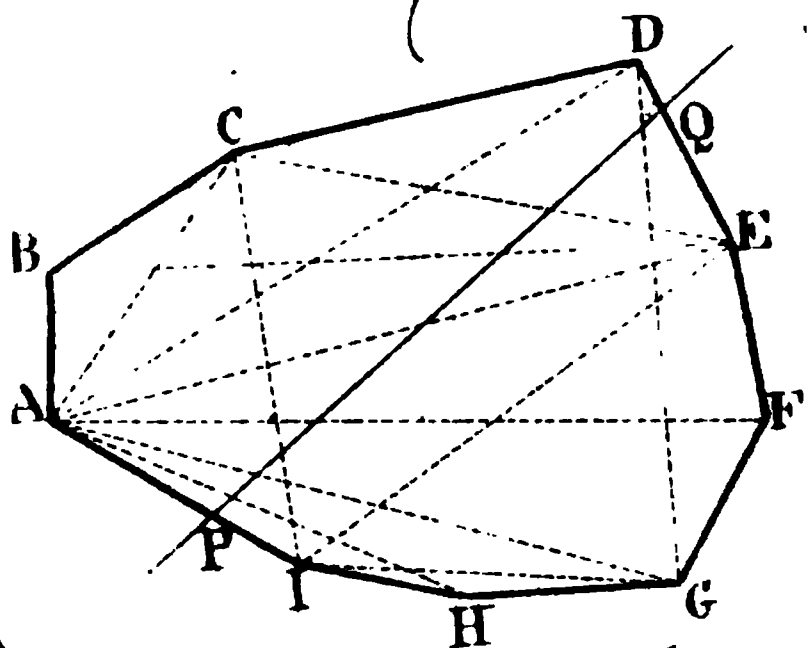
100

100

100

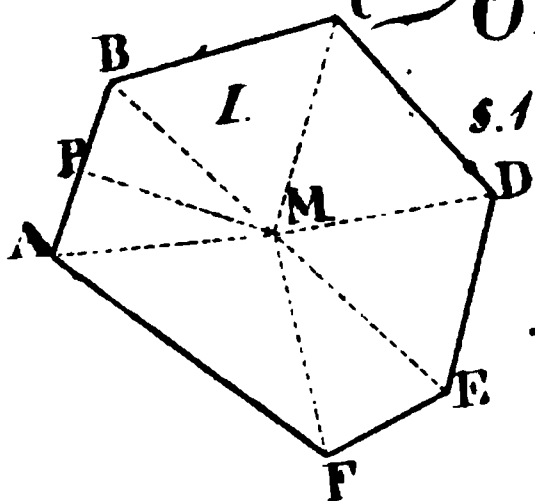


51  
§.93.



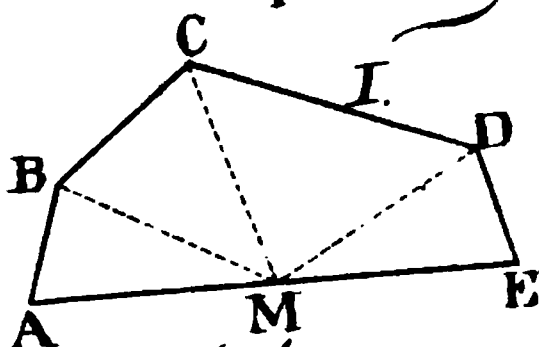
62.

§.104. π

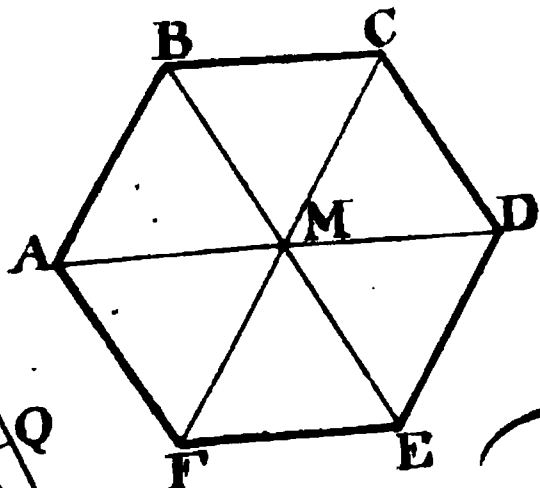


63.

§.105.

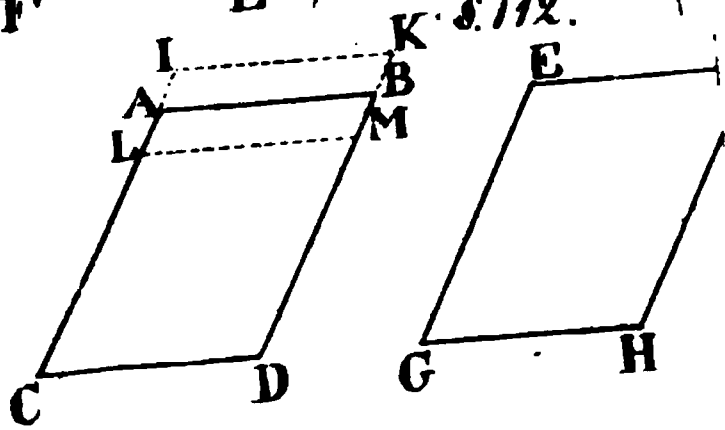


66. §.110.

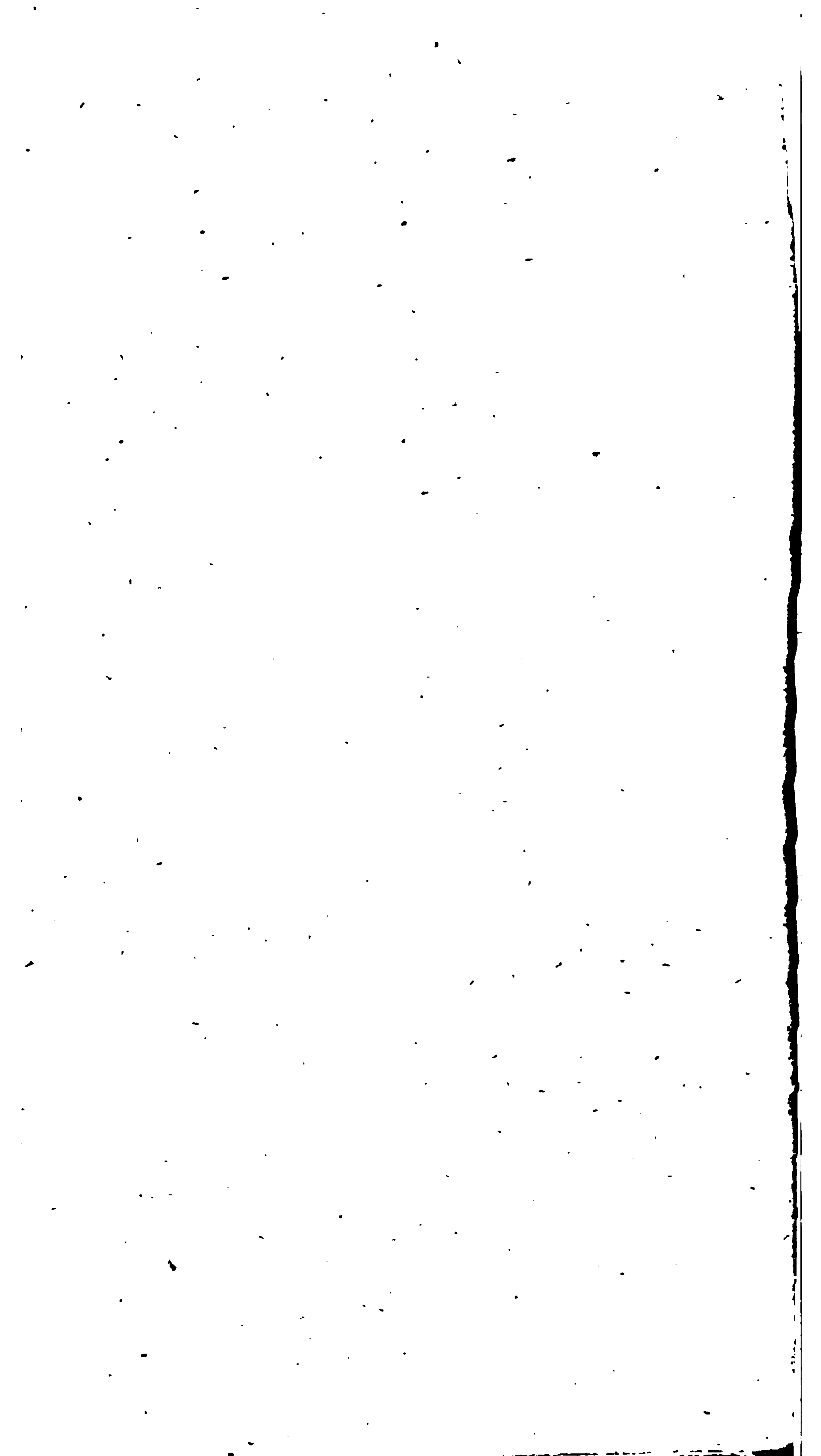


69.

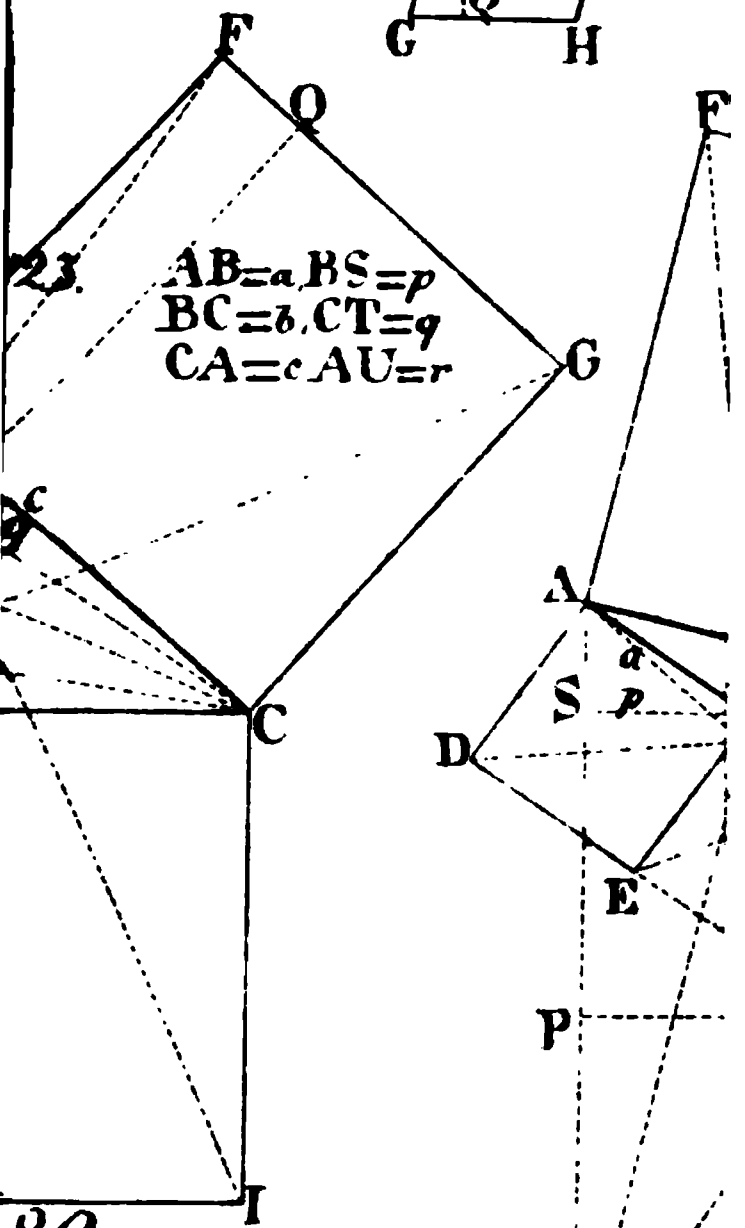
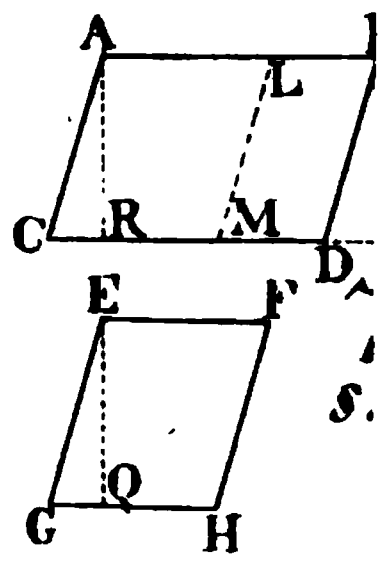
§.112.





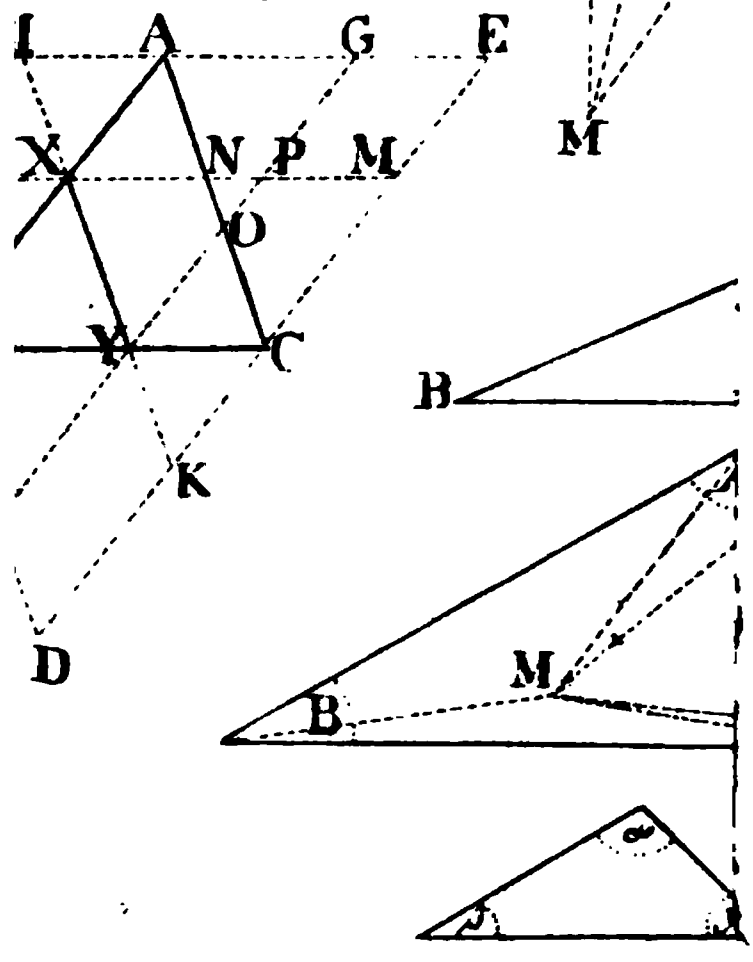


2.  
17.

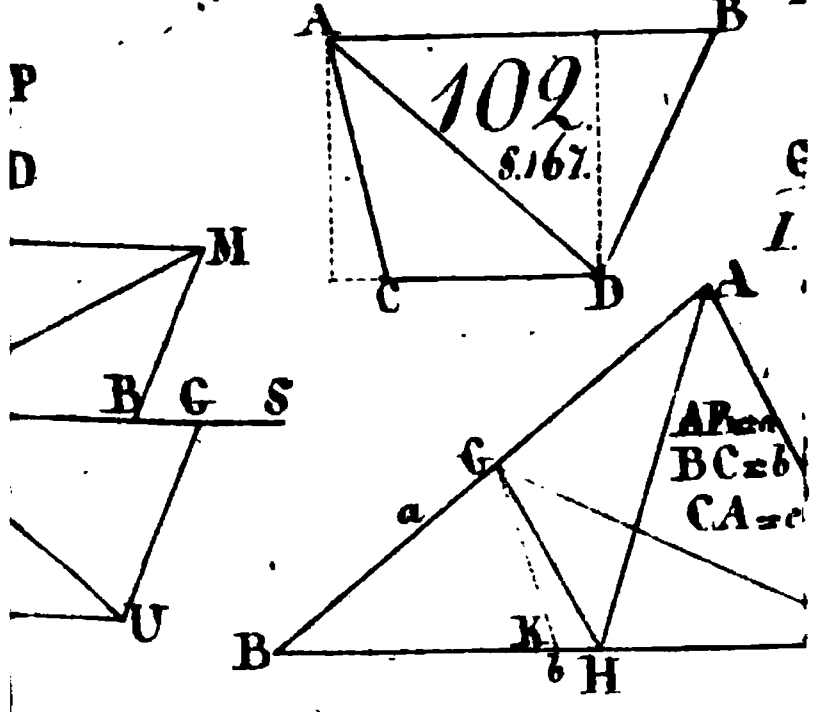
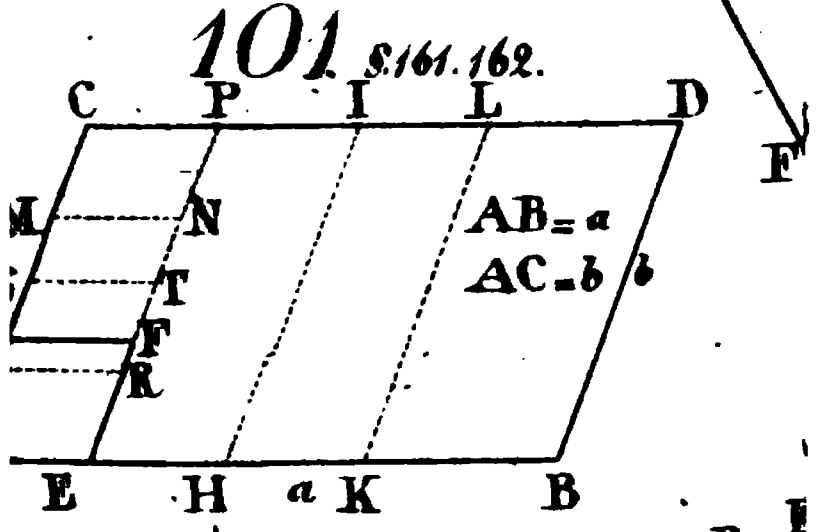
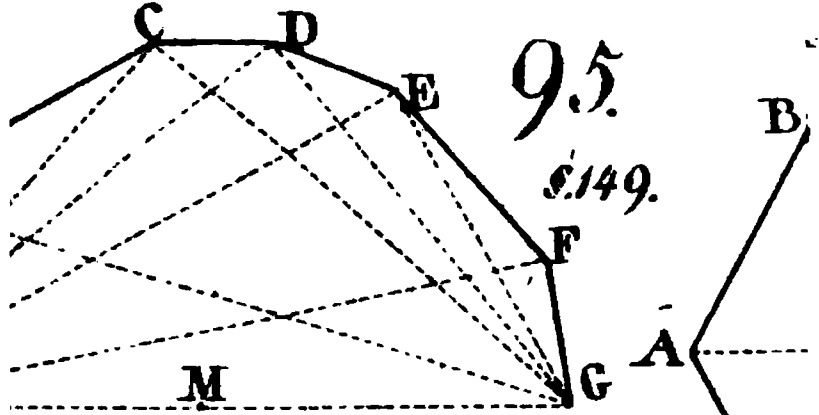
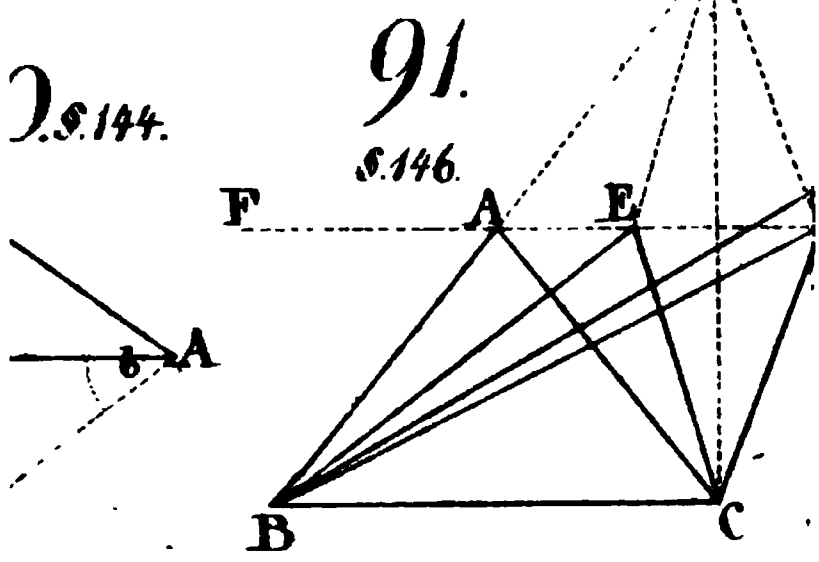
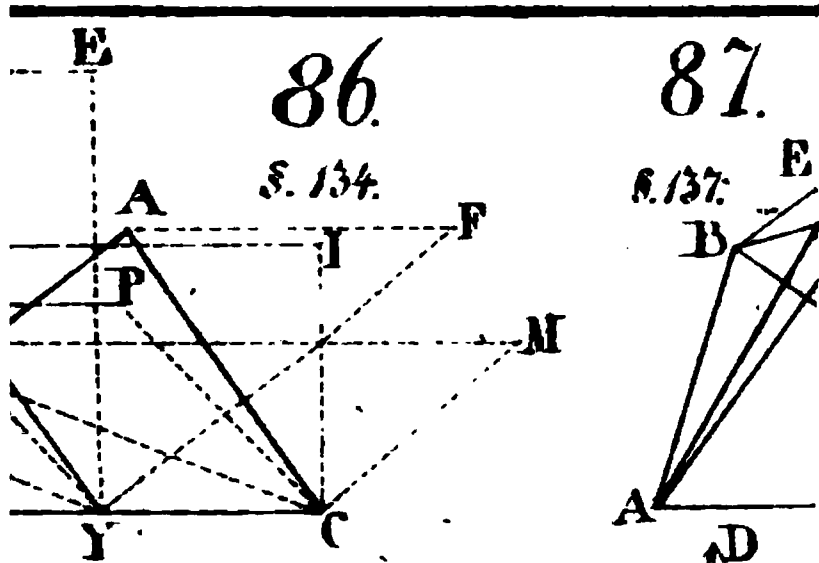


23.  
 $AB=a, BS=p$   
 $BC=b, CT=q$   
 $CA=c, AU=r$

82. L. 132.









О. I. §. 180

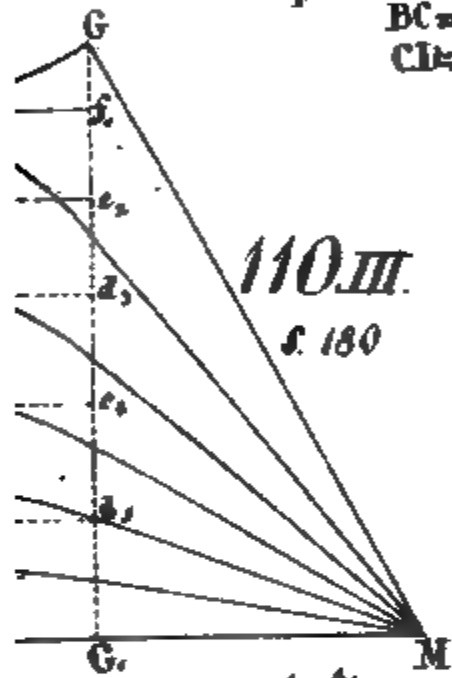
109.

§. 179



2. II §. 180

$DA = a$   
 $AB = b$   
 $BC = c$   
 $CD = d$



110. III.

§. 180





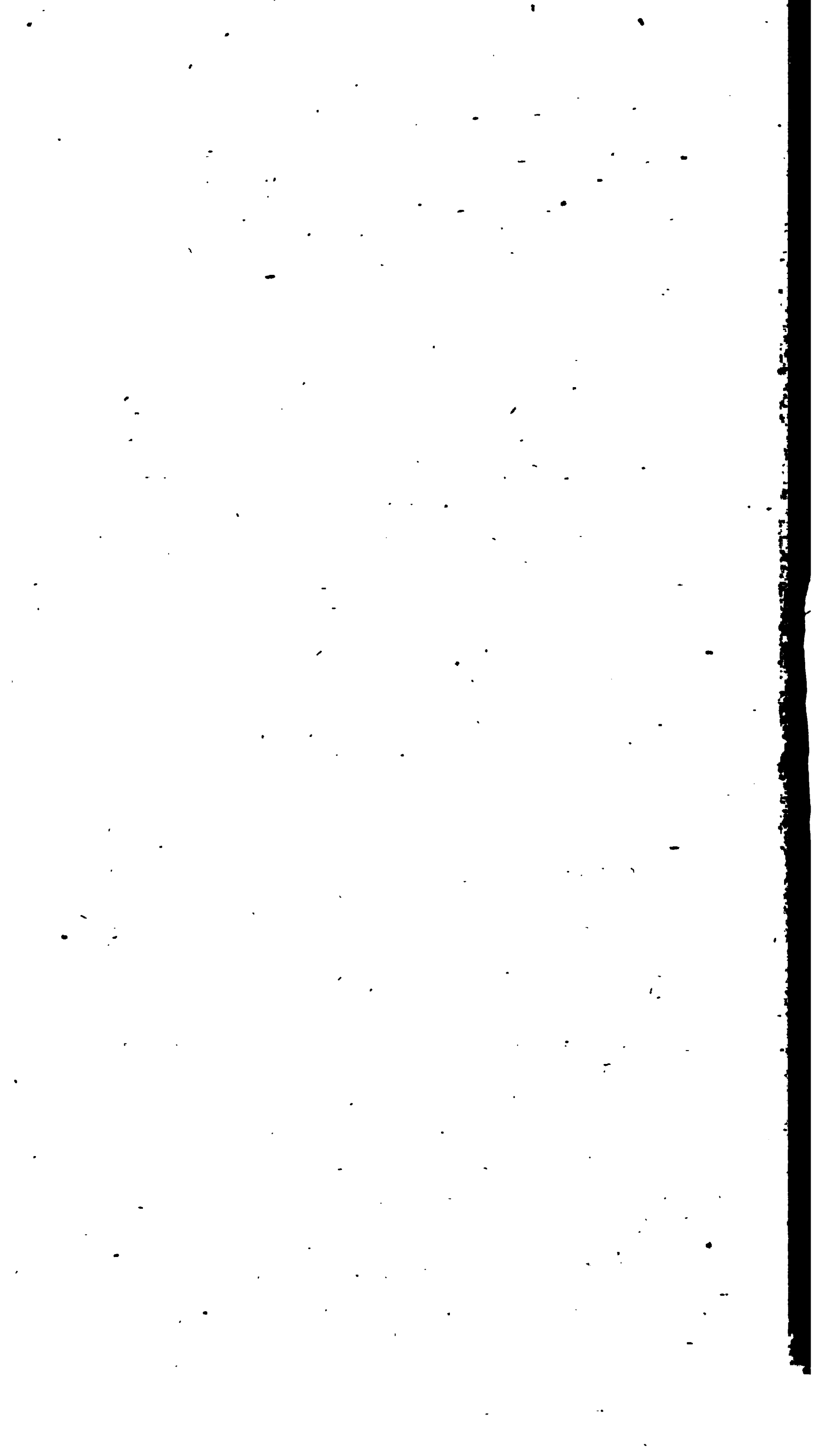
2

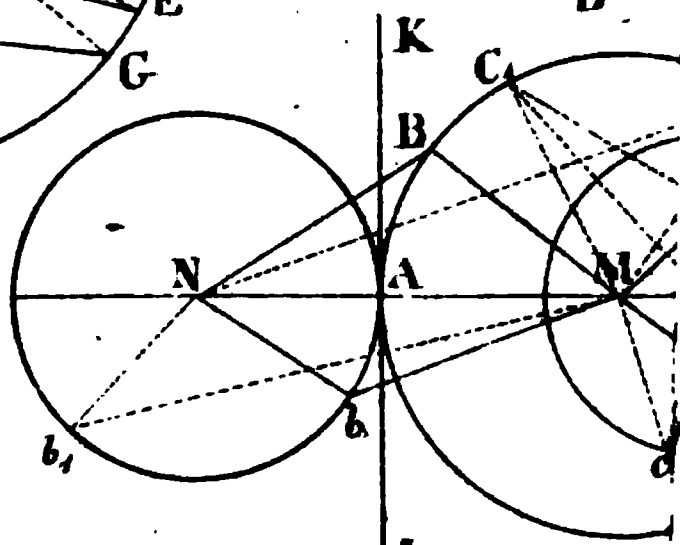
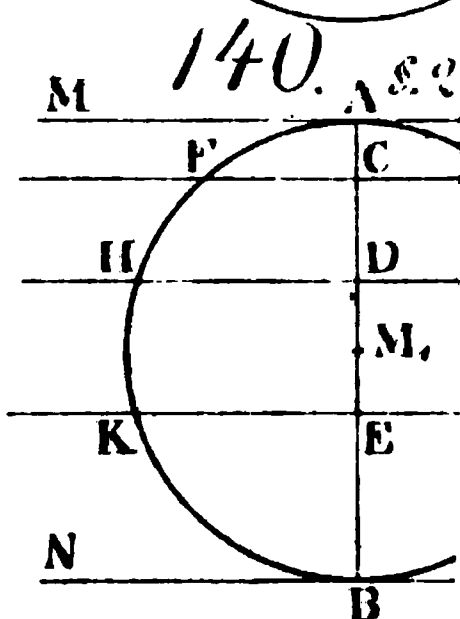
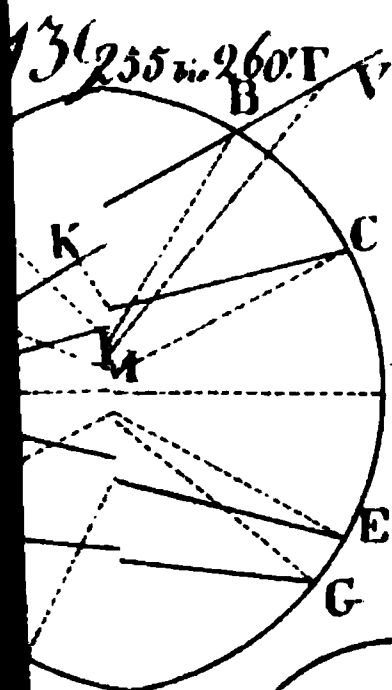
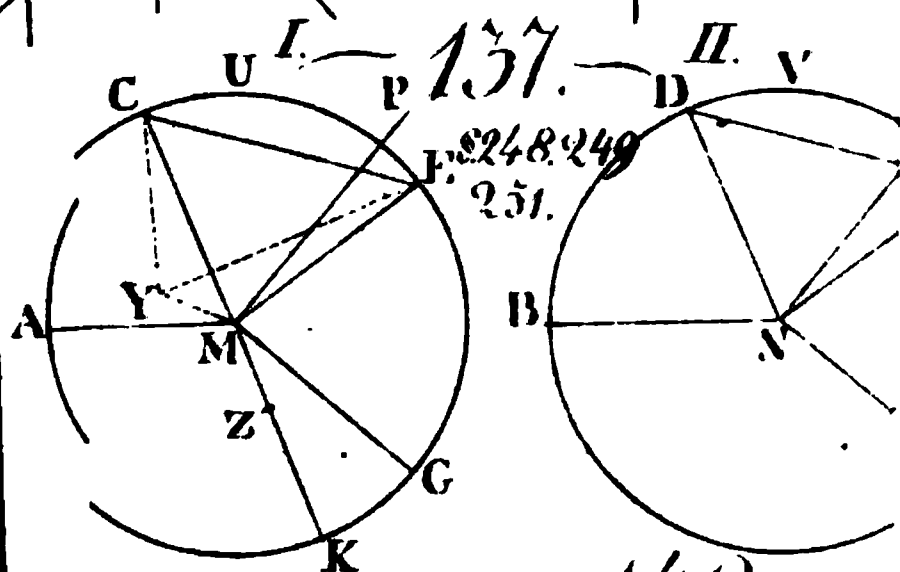
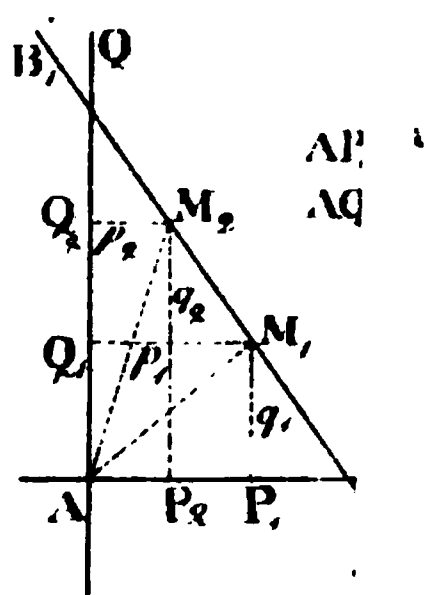
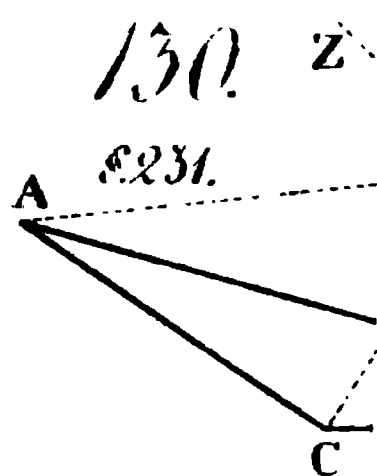
1

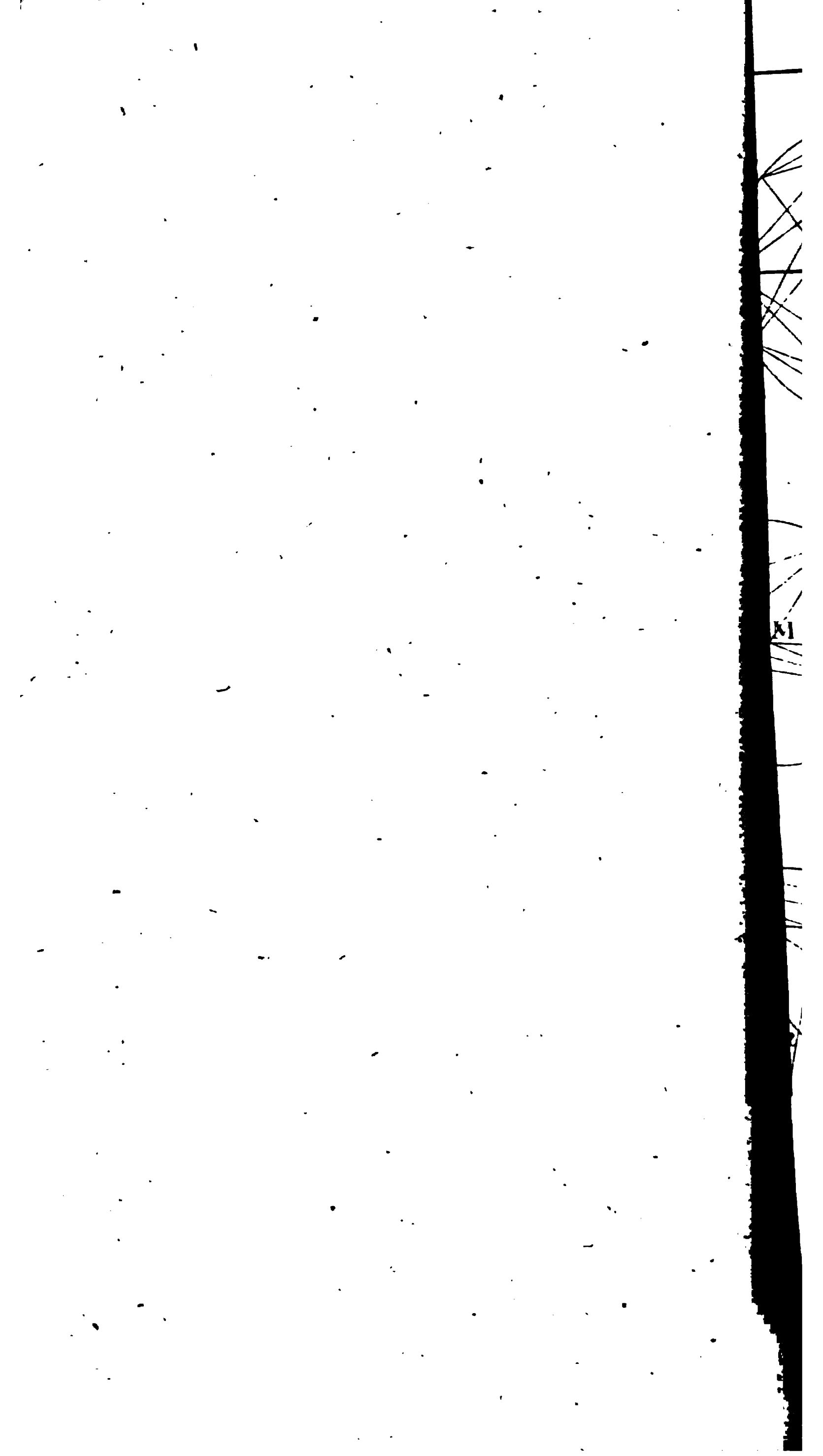
1

—









144.

5273 274.275

1

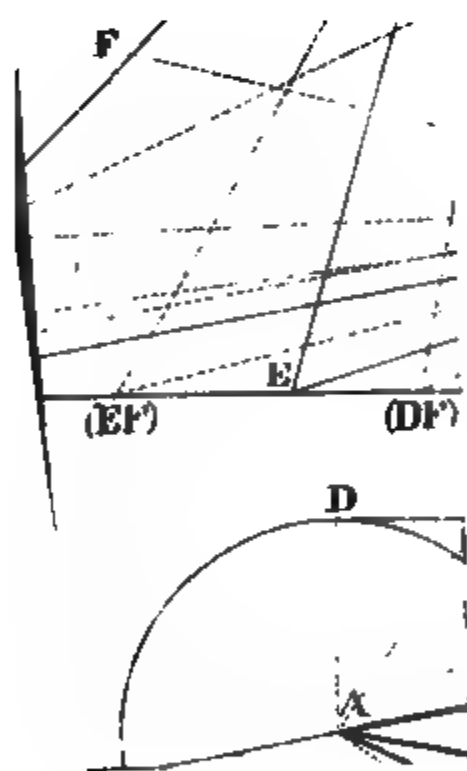
A

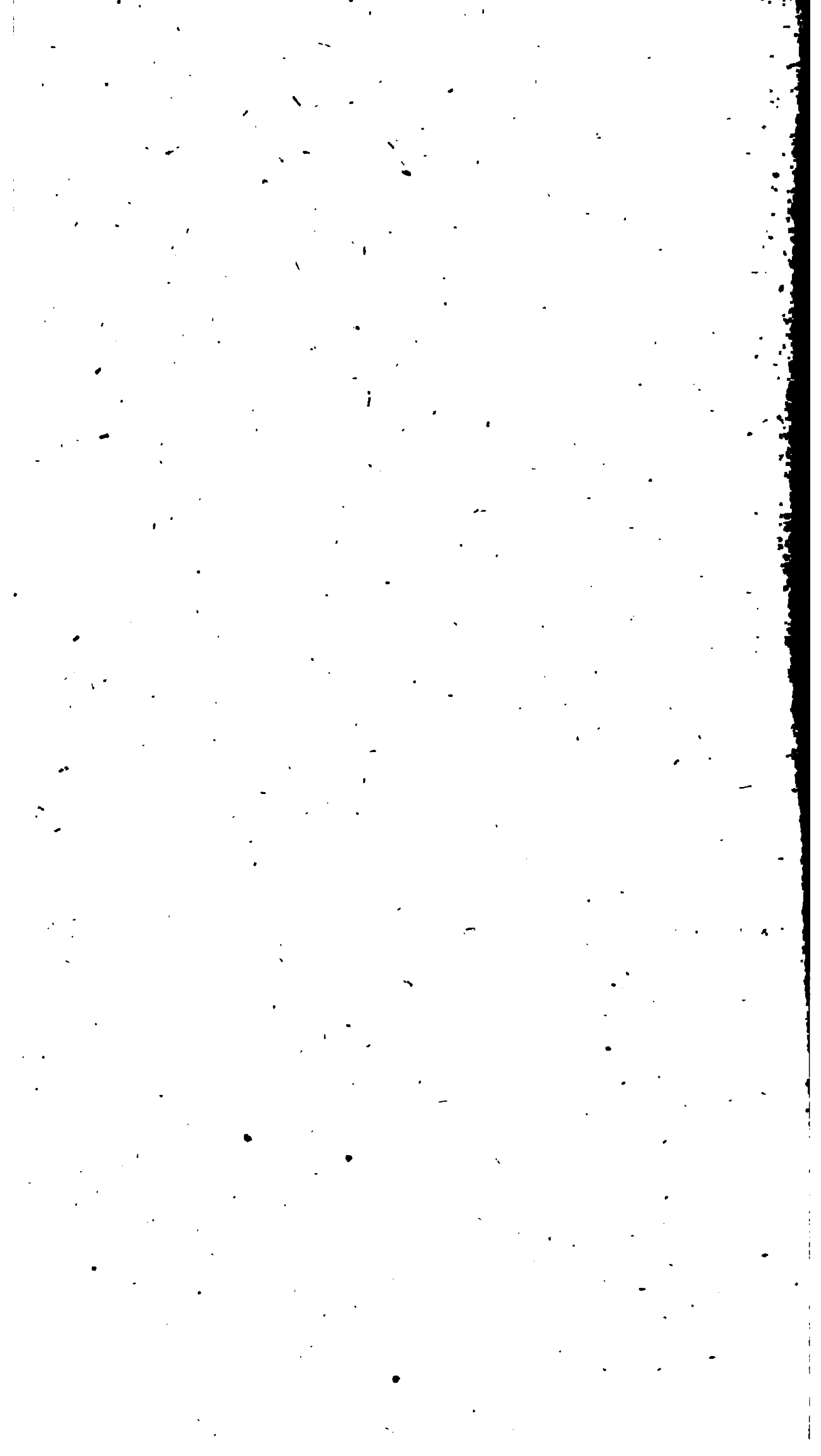
B

C

O. 282.

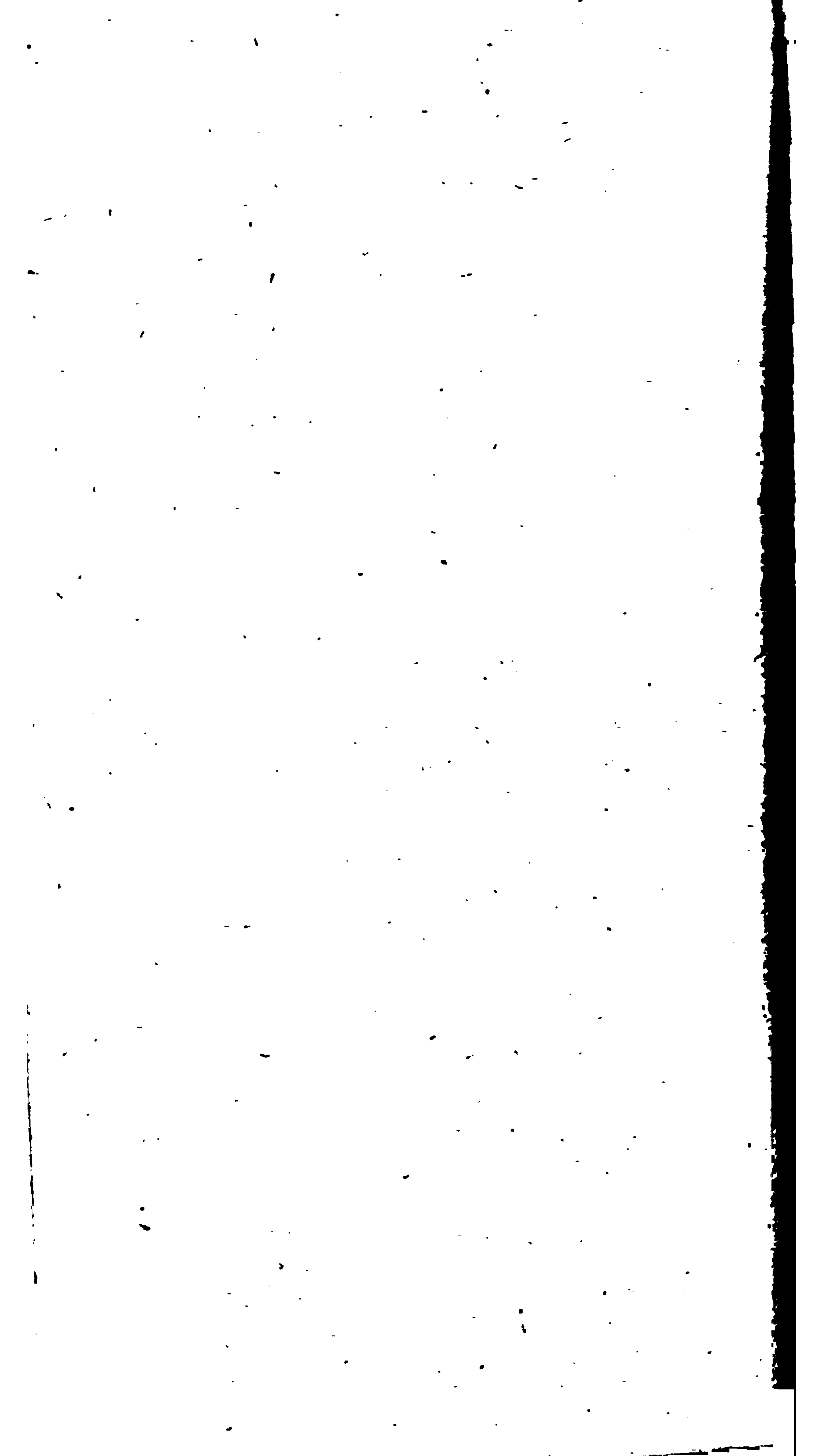




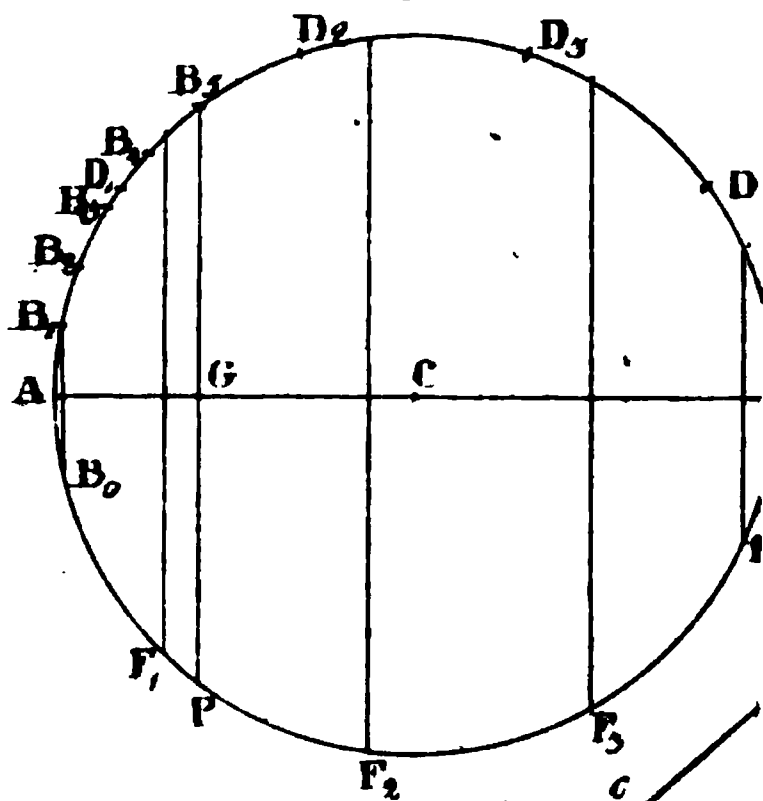






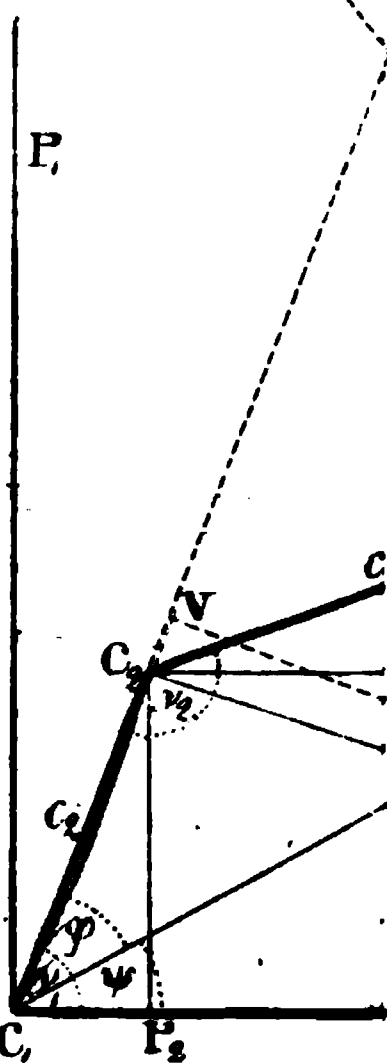
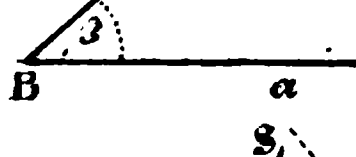
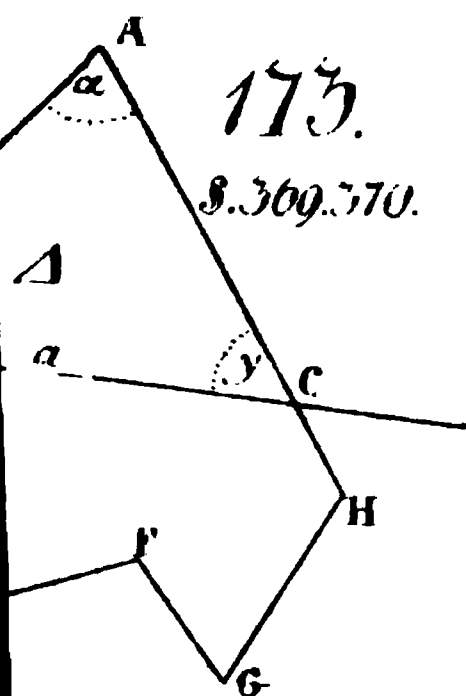


109. s. 342.



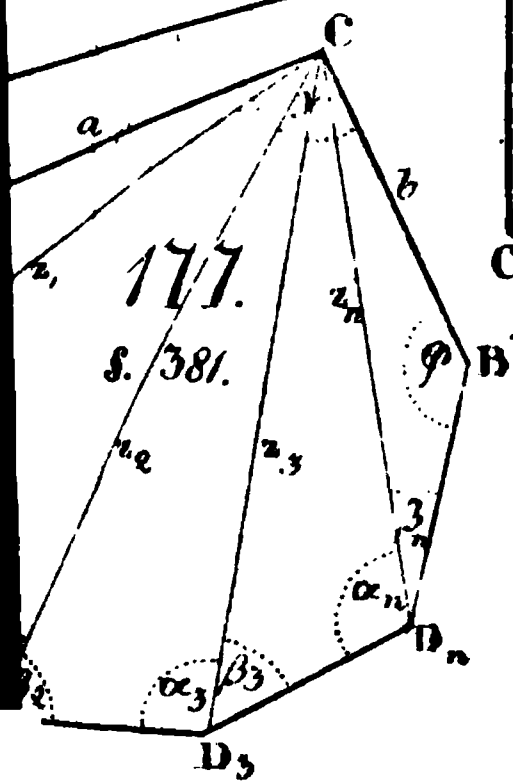
173.

*\$369.370.*



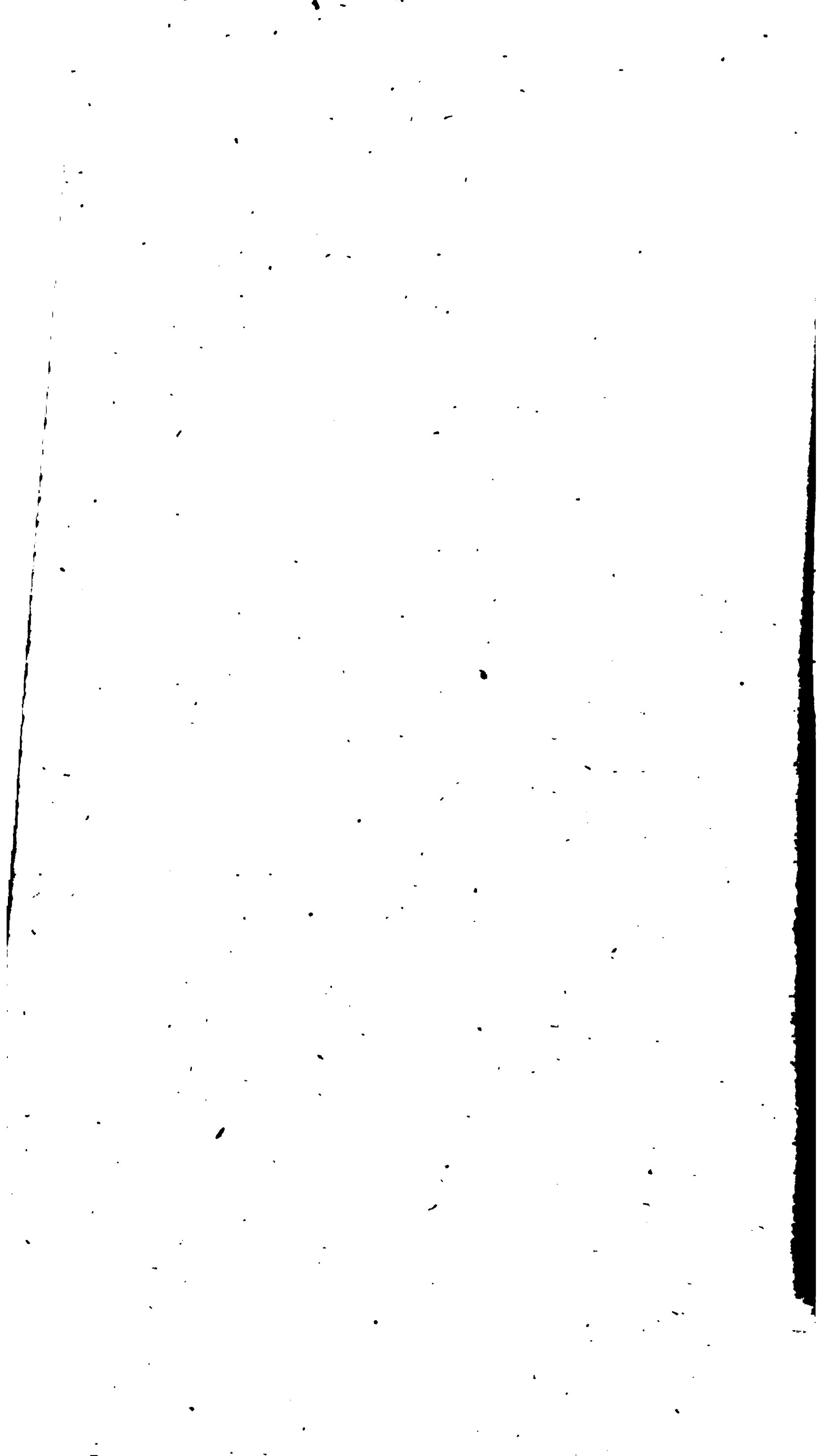
176.

6.380.



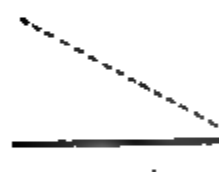
177.

£. 381.





4. s. 392.



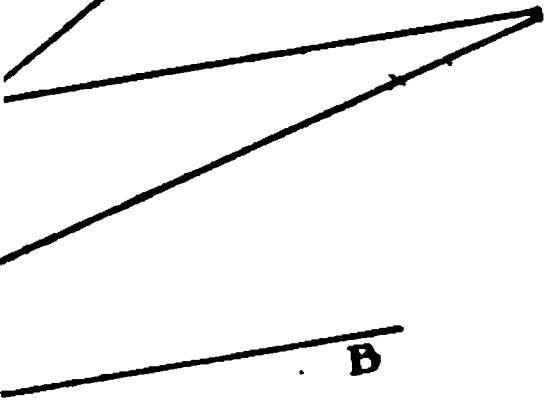
188.  
s. 394. α.



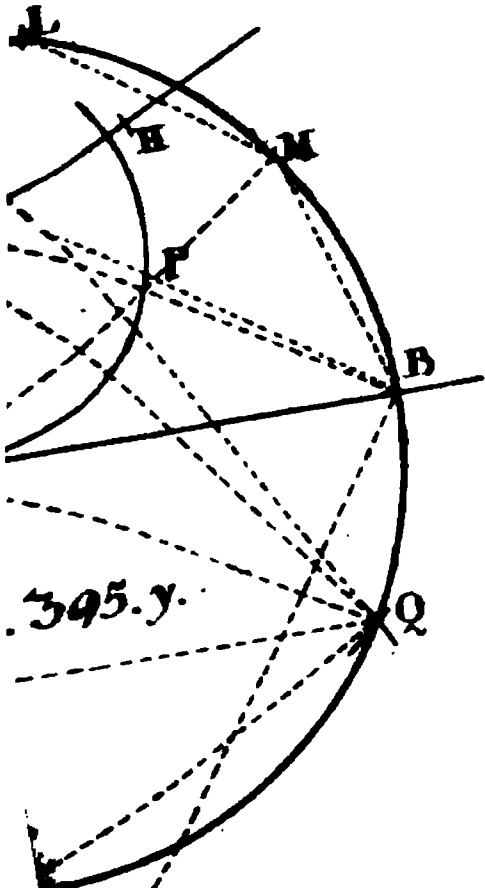
188.  
s. 394



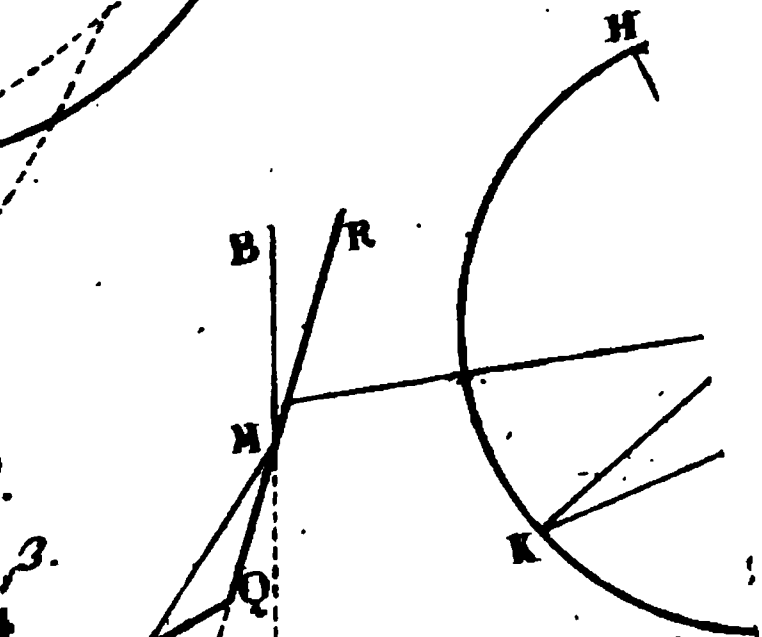
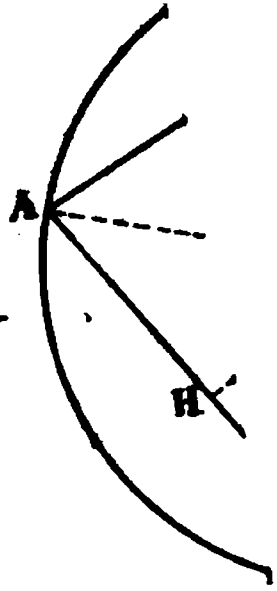
102. s. 394. 6.



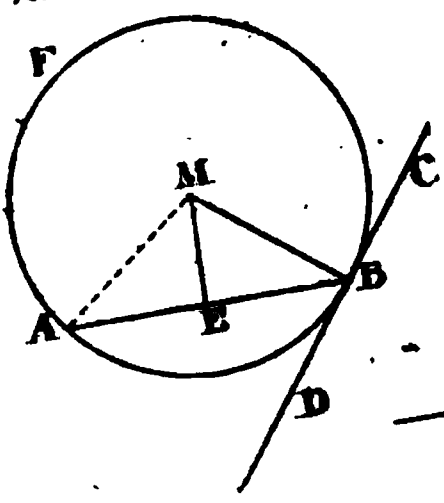
s. 34

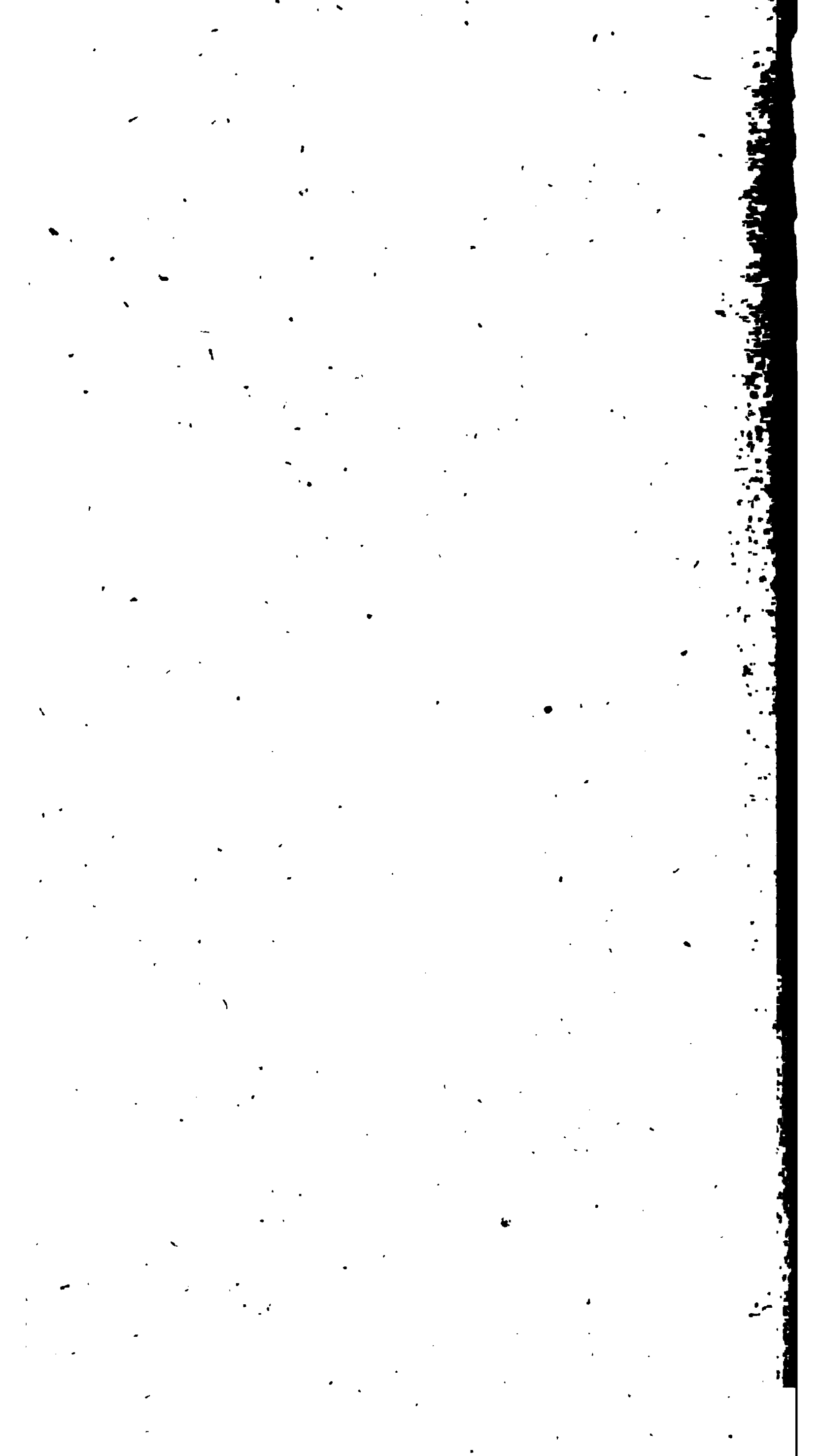


395. y.



203. s. 399. 3.





,

,

,

,

,



